



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA FRACTAL APLICADA AL DISEÑO TEXTIL Y LA
MODA: ENTRE EL ARTE Y LA CIENCIA**

**Línea de investigación:
Matemática pura y aplicada**

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

Autora

Ramirez Ccahuata, Roxana

Asesor

Aycho Flores, Milton Angelino

ORCID: 0002-4391-5505

Jurado

Mendoza Arenas, Rubén Dario

Carranza Purca, Mario

Milla Garcia, Luis

Lima - Perú

2026

RECONOCIMIENTO - NO COMERCIAL - SIN OBRA DERIVADA
(CC BY-NC-ND)



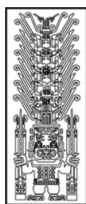
ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA FRACTAL APLICADA AL DISEÑO TEXTIL Y LA MODA: ENTRE EL ARTE Y LA CIENCIA

INFORME DE ORIGINALIDAD

16%	13%	5%	7%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	docplayer.es Fuente de Internet	2%
2	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	2%
3	Submitted to Universidad de Cantabria Trabajo del estudiante	1%
4	Submitted to Universidad Pedagogica y Tecnologica de Colombia Trabajo del estudiante	1%
5	www.coursehero.com Fuente de Internet	1%
6	www.ehu.eus Fuente de Internet	1%
7	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
8	1library.co Fuente de Internet	<1%
9	qdoc.tips Fuente de Internet	<1%
10	Submitted to Universidad de Málaga - Tii Trabajo del estudiante	<1%
11	semana.mat.uson.mx Fuente de Internet	<1%



Universidad Nacional
Federico Villarreal

VRIN | VICERRECTORADO
DE INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA FRACTAL APLICADA AL DISEÑO TEXTIL Y LA

MODA: ENTRE EL ARTE Y LA CIENCIA

Línea de Investigación

Matemática pura y aplicada

Tesis para optar el Título Profesional de

Licenciada en Matemática

Autora

Ramirez Ccahuata, Roxana

Asesor

Aycho Flores, Milton Angelino

ORCID: 0002-4391-5505

Jurado

Mendoza Arenas, Rubén Dario

Carranza Purca, Mario

Milla Garcia, Luis

Lima - Perú

2026

Dedicatoria

A Dios padre, el Amado, cuyo amor me sostiene,
me apoya y me fortalece.

A mis padres, Bertha y Victoriano, por confiar en
mí y creer siempre en mis capacidades; han sido
mi fuerza y ejemplo para seguir adelante.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por permitirme iniciar y culminar la carrera de Matemáticas, y por guiarme en la elección del tema y en el desarrollo de esta tesis. A nuestra santísima madre, la Virgen María, por interceder por mí ante Dios y darme la fuerza para seguir adelante; tu presencia es un motor en mi vida.

Al Estado Peruano, por garantizar la gratuidad de la enseñanza y permitir el acceso a la educación superior.

A mi familia, por su amor, apoyo y guía constante; en especial a mi madre, Bertha Ccahuata, ejemplo de esfuerzo y dedicación, y a mi padre, Victoriano Ramírez, por brindarme siempre su cariño, comprensión y amistad. A mi hermana Evelyn Ramírez, por su apoyo económico que me permitió mantenerme constante en mis estudios y culminar la carrera, y a mi hermana Sor María B. Ramírez, por sus oraciones, ánimo y confianza que me impulsaron a alcanzar mis metas.

Al Mg. Milton A. Aycho, asesor de tesis, por sus valiosos aportes en la corrección de la redacción y por sus indicaciones durante la elaboración de este trabajo. A Josué López, comunicador audiovisual, por su apoyo técnico en el arte del diseño gráfico, que contribuyó significativamente al desarrollo visual de esta tesis. A los profesores de la EPME – UNFV, quienes formaron parte de mi formación universitaria, por su paciencia, orientación y por compartir sus conocimientos en la enseñanza de las Matemáticas.

INDICE

I. INTRODUCCION.....	1
1.1. Descripción y formulación del problema.....	2
1.2. Antecedentes.....	3
1.3. Objetivos.....	5
1.3.1. Objetivo General.....	5
1.3.2. Objetivos Específicos.....	5
1.4 Justificación.....	5
II. MARCO TEORICO.....	7
2.1 Espacios Vectoriales.....	7
2.2. Transformaciones Lineales.....	13
2.3. Espacio Topológico.....	31
2.4. Espacios métricos.....	36
2.5. Topología en Espacios métricos.....	38
2.6. Continuidad de funciones en espacios métricos.....	42
2.7. Espacio métrico completo.....	45
2.8. Compacidad en Espacios Métricos.....	48
2.9. Funciones de variable compleja.....	53
2.10. Derivación de funciones de variable compleja.....	55
2.11. Sucesiones de funciones en variable compleja.....	57
2.12. Singularidades.....	59
2.13. Teorema del punto fijo de Banach.....	59
2.14. Continuos.....	65
2.15. Métrica de Hausdorff.....	67

2.16. Convergencia de la métrica de Hausdorff	75
2.17. Propiedades topológicas en $\mathcal{CB}(X)$	81
2.18. Aplicaciones contractivas sobre $\mathcal{K}(X)$	88
2.19. Sistema Iterado de Funciones.....	92
2.20. Dimensión fractal.....	100
2.20.1 Dimensión Topológica.....	100
2.20.2 Medida Exterior.....	101
2.20.3. Medida de Hausdorff.....	103
2.20.4. Dimensión de Hausdorff.....	104
2.21. Introducción al sistema dinámico.....	108
2.22. Conjunto de Julia.....	111
2.22.1. Conjunto de Mandelbrot.....	116
III. METODO.....	118
3.1. Tipo de investigación.....	118
3.2.Ámbito temporal y espacial.....	118
3.3.Variables.....	118
3.4.Población y muestra.....	118
3.5.Instrumentos.....	118
3.6.Procedimiento.....	119
3.7.Análisis de datos.....	120
3.8.Consideraciones éticas.....	120
IV. RESULTADOS.....	121
V. DISCUSION DE RESULTADOS.....	129
VI. CONCLUSIONES.....	131
VII. RECOMENDACIONES.....	133

VIII. REFERENCIAS.....135

IX. ANEXOS.....139

INDICE DE FIGURAS

Figura 1	Representación gráfica reflexiva del eje x con respecto al origen.....	15
Figura 2	El rombo ADBD' transformado por la reflexión del eje x origina el rombo A'D'1B'D".....	15
Figura 3	La reflexión del eje Y con respecto al origen.....	16
Figura 4	La transformación del rombo A1D1D'2B1 con respecto al eje Y es el rombo A'D'1B'D".....	16
Figura 5	Transformación de reflexión con respecto al origen de la figura ABCDEF a GHIJKL.....	17
Figura 6	El polígono ABCDE transformado por la reflexión $y=x$ obtenemos el polígono A'B'C'D'E'.....	18
Figura 7	Tocapu Incaico un conjunto de transformaciones matriciales.....	18
Figura 8	En la estrella BB'B"B"C se aplica la contracción en el eje X con $k=1/2$ transformando la estrella en NLIRP.....	19
Figura 9	Expansión de la estrella en el eje X, con $k=2$ y la comparación con su compresión si $k=1/2$	20
Figura 10	Expansión de la estrella de 6 puntas en el eje Y.....	21
Figura 11	Expansión y compresión de la estrella de 6 puntas en el eje Y.....	21
Figura 12	En la siguiente imagen se aplicara homotecia.....	22
Figura 13	Aplicación de homotecia en la imagen de valores son $k=0,5$ y $k=2$	23
Figura 14	En la imagen se aplicara homotecia inversa.....	23
Figura 15	Homotecia inversa aplicada en la figura si $k=-0.5$, $k=-1$ y $k=-2$	24
Figura 16	Motivo inca.....	25
Figura 17	Transformación de rotación.....	25

Figura 18 El polígono rota con un ángulo de 30°	27
Figura 19 El rayo es rotado y trasladado.....	30
Figura 20 Transformación del cometa.....	30
Figura 21 Interpretación grafica de los intervalos indicados en (i) y en (ii) Caso 1 y 2.....	33
Figura 22 Los espacios T_0, T_1, T_2	35
Figura 23 Representación de U y V en intervalos disjuntos.....	35
Figura 24 Circunferencia unitaria del plano complejo.....	36
Figura 25 La métrica usual en \mathbb{R}^2 : $x^2+y^2 < 1$; $x^2+y^2 \leq 1$; $x^2+y^2 = 1$	39
Figura 26 La recta identidad interceptada con la función polinómica cubica, obtenemos tres puntos fijos.....	59
Figura 27 Carpeta de Sierpinski.....	66
Figura 28 Comparación entre $\omega(A, B)$ y $\omega(B, A)$ en $A = \{(x, y): 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ y $B = \{(x, y): 5 \leq x \leq 11, 0 \leq y \leq 8\}$	67
Figura 29 En el lado izquierdo se muestra la sucesión $A_n \rightarrow A$ en $X=[0,1] \times [0,1]$ En el lado derecho tenemos $A_n = [0,1] \times \{\frac{1}{n}\}$ y $A=[0,1] \times \{0\}$ en $X=[0,1] \times [0,1]$	75
Figura 30 El triángulo de Sierpinski	91
Figura 31 La curva de Koch es semejante a la curva de cada una de sus partes.....	92
Figura 32 Construcción del conjunto de Cantor.....	95
Figura 33 Distancia entre C_n y C_{n+1} del conjunto de Cantor.....	96
Figura 34 Construcción del triángulo de Sierpinski.....	97
Figura 35 Distancia entre S_n y S_{n+1} del triángulo de Sierpinski.....	98
Figura 36 Construcción y distancia entre T_n y T_{n+1} de la carpeta de Serpinski.....	99
Figura 37 Entorno de los puntos del triángulo de Sierpinski.....	101
Figura 38 $\mathcal{H}^s(F)$ frente a s para un conjunto F.....	105
Figura 39 Conjunto Mandelbrot $n=500$ puntos, $k= 30$ iteraciones.....	117
Figura 40 Conjunto de Julia ($n=800, c=-0.79+0.15i, k=100, [-1 \ 1], [-1 \ 1]$).....	124

Figura 41 Conjunto de Julia ($n=500, c=0.360+0.1003i, k=150, [-1, 1], [-1.1, 1.1]$).....	125
Figura 42 Conjunto de Julia ($n=500, c=0.4+0.3i, k=200, [-1, 1], [-1.5, 1.5]$).....	126
Figura 43 Conjunto de Julia ($n=500, c=-0.689-0.4626i, k=50, [-1.5, 1.5], [-1, 1]$).....	127
Figura 44 Diseño Tocapu.....	128

RESUMEN

El arte visual generado a partir de la matemática ha evolucionado desde la geometría plana hasta la geometría fractal, abarcando tanto formas regulares como las irregulares presentes en la naturaleza. El presente trabajo, se centra en la métrica y la dimensión de Hausdorff aplicadas a conjuntos compactos y cerrados, así como en las aplicaciones contractivas y los sistemas iterados de funciones en dinámicas topológicas complejas. Se analizan los atractores fractales, destacando los conjuntos de Julia y Mandelbrot, mediante herramientas de análisis funcional y funciones holomorfas iteradas, generando imágenes autosimilares obtenidas por medios computacionales. Los resultados muestran la capacidad de la matemática para modelar patrones complejos y visualmente atractivos, evidenciando la conexión entre teoría matemática y diseño fractal.

Palabras clave: fractal, geometría fractal, métrica y dimensión de Hausdorff, sistema iterado de funciones, conjunto de Julia, moda fractal.

ABSTRACT

The visual art generated from mathematics has evolved from planar geometry to fractal geometry, encompassing both regular and irregular shapes found in nature. This work focuses on the Hausdorff metric and dimension applied to compact and closed sets, as well as on contractive mappings and iterated function systems in complex topological dynamics. Fractal attractors are analyzed, highlighting the Julia and Mandelbrot sets, using functional analysis tools and iterated holomorphic functions, generating self-similar images obtained through computational means. The results demonstrate the ability of mathematics to model complex and visually appealing patterns, showing the connection between mathematical theory and fractal design.

Keywords: fractal, fractal geometry, Hausdorff metric and dimension, iterated function system, Julia set, fractal fashion.

I. INTRODUCCION

Nuestro universo, se rige por leyes precisas y los científicos como los matemáticos se ocupan de descubrirlas. Durante el siglo XIX hasta el siglo XX, se desarrollaron estructuras matemáticas que fueron consideradas *monstruos matemáticos*, es decir no había una comprensión correcta de lo irregular y lo fragmentado, así como de lo regular y lo conexo.

Durante los años 1977-1982 el matemático Benoit Mandelbrot explico mediante su teoría fractal dichas estructuras denominadas fractales, inicialmente lo aplicó para comprender la naturaleza, el matemático decía “yo juego con imágenes no con fórmulas”. Ante ello, decimos que los fractales es la nueva forma de ver y entender las matemáticas.

El análisis minucioso que abarca en comprender el mundo de los fractales nos implica abordar espacios métricos completos, compacidad, topología, conexidad, direccionado hacia la métrica de Hausdorff y la dimensión de Hausdorff de un fractal el cual es mayor que su dimensión topológica. Benoit Mandelbrot define la dimensión fractal relacionado a la rugosidad de las formas naturales y objetos, siendo un aporte importante en la matemática. Es probable que el conjunto de Mandelbrot sea el más impresionante de la matemática moderna.

La iteración a partir de reglas simples ha permitido la creación de objetos impensables llamados fractales, entre los cuales destaca las sucesiones no normales que son originadas por el sistema iterado de funciones polinómicas holomorfas en el plano complejo como son los conjuntos de Julia y de Mandelbrot, desarrollados en los sistemas dinámicos generando objetos similares entre las partes y el todo.

Las computadoras permiten obtener estas imágenes por medio de su inmensa capacidad de iteración rápida con la ayuda de algoritmos, cuyo resultado se distingue por sus formas variadas llenas de color y de movimientos presentados en forma repetitiva y armoniosa.

1.1. Descripción y formulación del problema

1.1.1. Descripción del problema

La geometría fractal resalta el carácter artístico de la matemática, una rama que aún no ha sido plenamente desarrollada en nuestro país. Su aplicación en diversas áreas de la ciencia contribuye al avance del conocimiento y la tecnología, elementos fundamentales en el desarrollo científico y tecnológico de una nación.

Parte importante de este desarrollo se encuentra en el estudio de los fractales, estructuras matemáticas cuyas formas autosimilares y variadas permiten aportar al diseño de moda mediante la creación de telas basadas en modelos generados con software matemático. Estos programas ejecutan simulaciones que producen imágenes visualmente atractivas, facilitando la labor creativa del diseñador textil.

En el contexto peruano, la fabricación de telas con diseños fractales aún no se aborda con la misma profundidad ni con el nivel tecnológico alcanzado en países como los Estados Unidos o los europeos.

Por ello, se plantea la necesidad de promover el uso de la matemática computacional como medio para desarrollar software capaz de generar fractales aplicables al diseño textil. Esta iniciativa permitiría fortalecer la relación entre ciencia y arte, impulsando la creatividad, la innovación tecnológica y la formación de diseñadores y matemáticos capaces de contribuir al avance de la industria textil mediante la creación de una “moda fractal”.

1.1.2. Formulación del problema

Por lo expuesto anteriormente se define el problema de investigación.

¿Cómo puede aplicarse la teoría matemática de los fractales, reconocidos por la belleza de sus formas, en la elaboración de diseños para la industria de la moda textil?

1.2. Antecedentes

La geometría fractal, desde su formalización por Benoît Mandelbrot en los años setenta, ha revolucionado la forma de comprender las estructuras irregulares y autosimilares presentes tanto en la naturaleza como en el arte. Esta teoría ha trascendido el campo puramente matemático, convirtiéndose en una herramienta interdisciplinaria aplicada en la informática, la biología, la arquitectura y el diseño gráfico.

En el ámbito textil, la incorporación de modelos fractales permite generar patrones visuales de gran complejidad y belleza mediante la simulación computacional. Sin embargo, en el contexto nacional, aún son escasos los estudios que vinculan el lenguaje matemático de los fractales con su aplicación práctica en el diseño de modas, lo que plantea la necesidad de explorar esta relación entre la matemática aplicada y la creatividad artística.

Diversos autores abordaron el estudio de los fractales desde distintos puntos de vista:

Grijalva (2013) en su investigación, estudia la métrica de Hausdorff sobre el espacio de los subconjuntos no vacíos, acotados y cerrados de un espacio métrico X , el cual lo realiza de forma detallada. Para ello, define conceptos básicos de espacios métricos, convergencia en espacios métricos, funciones entre espacios métricos y continuos, para luego construir la métrica de Hausdorff destacando sus propiedades y la convergencia en dicha métrica. Además, desarrolló algunas propiedades topológicas tales como: acotación, compacidad, completitud y conexidad en conjuntos acotados y cerrados. Adicionalmente, se presenta una prueba del teorema del punto fijo y la aplicación de los sistemas iterados de funciones y la métrica de Hausdorff en geometría fractal, permitiendo de esta forma construir fractales que tengan la propiedad de autosimilitud mediante funciones de contracción.

García (2018) en su tesis, analiza la dimensión de Hausdorff la cual es una herramienta potente que permite el estudio de objetos geométricos y fractales, motivado por el matemático Benoit Mandelbrot quien postulo la necesidad de una nueva idea de dimensión fractal, para lo

cual en dicho estudio, se expuso la medida y la dimensión de Hausdorff con sus propiedades, también definió el conjunto de Mandelbrot y sus características mediante este estudio se logra calcular la dimensión de Hausdorff en fractales, estos resultados obtenidos son los mismos obtenidos por la dimensión fractal definida por Mandelbrot.

Quintana (2022) presenta en su estudio, un análisis analítico y geométrico del conjunto de Julia y sus propiedades. Desarrollo una introducción al plano complejo, su topología, funciones y sucesiones de funciones en variable compleja y sus propiedades. Además, expuso una introducción a la dinámica sobre polinomios en variable compleja y el conjunto de Mandelbrot, el cual origino la idea del conjunto de Julia, demostrando que las sucesiones que se obtienen al componer recursivamente una aplicación polinomial, donde los puntos en los cuales esta sucesión no es normal, pertenecen al conjunto de Julia de este polinomio, logrando establecer que coincide con el conjunto clausura de los puntos periódicos repulsores de dicha aplicación.

Adame (2005) explica los sistemas de funciones iteradas y los fractales, con ese fin estudia las transformaciones matriciales en el plano, transformaciones lineales y afines, analizando herramientas de tipo topológico y secuencial, definiendo el fractal como cualquier subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R}^n y el espacio de los fractales de \mathbb{R}^n como el conjunto $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \{K: K \subset \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset \text{ y } K \text{ es compacto}\}$. Luego, por medio de la métrica de Hausdorff desarrollo la distancia entre elementos de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, verificando que el espacio de los fractales $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d_H)$ es completo y además que el sistema iterado de funciones en \mathbb{R}^n es una familia finita de aplicaciones contractivas, demostrando la existencia de un único fractal como atractor.

Molero (2011) realizo el estudio de los conjuntos de Julia y Mandelbrot, las cuencas de atracción, los sistemas de funciones iteradas y sus aplicaciones. Además, se enfocó en el desarrollo detallado de los métodos numéricos en el plano complejo, así como de sus posibles

aplicaciones y por medio de algoritmos generaron fractales que combina movimientos, los programas se elaboraron en el lenguaje de programación Matlab. Finalmente, estableció una interfaz gráfica que facilite al usuario la ejecución de los programas para mostrar los resultados gráficos.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Analizar la geometría fractal y su simulación computacional mediante un lenguaje de programación, con el fin de generar imágenes aplicables al diseño textil y de modas.

1.3.2. Objetivos Específicos

- 1) Desarrollar las transformaciones lineales, afines y matriciales, analizando sus efectos geométricos en el plano.
- 2) Explicar la métrica y la dimensión de Hausdorff como fundamento para la determinación de la dimensión fractal.
- 3) Analizar las aplicaciones contractivas sobre compactos en el marco de los sistemas de funciones iteradas.
- 4) Describir la dinámica de un polinomio en variable compleja, particularmente los conjuntos de Julia y Mandelbrot, y aplicar su simulación mediante software matemático para la generación de fractales, cuyas imágenes serán exportadas a programas de diseño gráfico y empleadas en el diseño textil.

1.4 Justificación

La presente investigación tiene su origen en el estudio de los fractales, descubiertos y denominados por Benoît Mandelbrot, cuyas formas surgen a partir de procesos matemáticos complejos que pueden ser representados únicamente mediante el uso de computadoras. Estas estructuras fractales encuentran aplicación en diversas áreas de la ciencia y la tecnología debido a su capacidad para describir fenómenos irregulares y caóticos presentes en la naturaleza.

En el ámbito del diseño, los fractales constituyen una manifestación del arte matemático, cuyas imágenes, generadas mediante software especializado, ofrecen una fuente inagotable de patrones visuales, impredecibles y estéticamente atractivos. Esta característica los convierte en una herramienta valiosa para el diseño textil, donde pueden emplearse para la creación de telas y prendas innovadoras.

En la actualidad, la moda fractal se ha incorporado en la industria textil de países como Estados Unidos, Colombia y diversas regiones de Europa, mostrando el potencial creativo y tecnológico de esta fusión entre matemáticas y diseño. Por ello, resulta importante promover el acceso y uso de programas computacionales de diseño textil en los mercados nacionales, permitiendo así impulsar la creatividad, la innovación y el desarrollo tecnológico de la industria textil local.

Los resultados de esta investigación permitirán integrar la matemática aplicada, la simulación numérica y la teoría de la geometría fractal en los procesos de innovación textil. Asimismo, el estudio propone un enfoque interdisciplinario entre la matemática y el diseño, utilizando herramientas computacionales para generar nuevas propuestas gráficas que fortalezcan la relación entre la ciencia, la tecnología y el arte.

II. MARCO TEORICO

El análisis matemático aplicado en la investigación está orientado en la construcción de fractales, tanto en los planos complejo y cartesiano. Además, se analiza la métrica empleada en los fractales y la dimensión fractal. También, se desarrolla una introducción a los sistemas dinámico que permiten estudiar los conjuntos de Julia y Mandelbrot. Por ello, se proponen los siguientes conceptos.

2.1. Espacios Vectoriales

En la presente sección, se exponen algunos conceptos clave del algebra lineal, relacionados a los espacios vectoriales, geometría vectorial y sus principales propiedades que serán empleados a lo largo de la presentación.

Definición 2.1. Sea un conjunto $A \neq \emptyset$, se define una composición interna " $*$ " u operación binaria a una aplicación $*$: $A \times A \rightarrow A$

$$(a, b) \rightarrow a * b = c$$

Donde $c \in A$ es único. Se denotará por $(A, *)$ (Lázaro, 2017).

Definición 2.2. Dado un conjunto $G \neq \emptyset$ y una operación binaria $\circ : G \times G \rightarrow G$, diremos que (G, \circ) es un grupo si y solo si se cumplen:

a) Asociatividad: $x, y, z \in G \rightarrow x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

b) Elemento neutro: $\exists e \in G$ tal que $g \circ e = e \circ g = g \quad \forall g \in G$

c) Elemento inverso o simétrico: $\forall g \in G, \exists g^{-1} \in G$ tal que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

Además, si " \circ " satisface la propiedad conmutativa, es decir dados:

$g, g' \in G$ tal que $g \circ g' = g' \circ g$ se dice que (G, \circ) es un grupo abeliano (Herstein, 1979).

Definición 2.3. Consideremos $K \neq \emptyset$ un conjunto, $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ y \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, dos leyes de composición interna definidas en \mathbb{K} , entonces se define un cuerpo como la terna

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$ si se satisfacen las siguientes propiedades:

a) $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano, teniendo como elemento neutro a 0 (cero) y su elemento simétrico de $a \in \mathbb{K}$ es $-a$.

b) Si (\mathbb{K}, \cdot) , entonces debe cumplir:

i) Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

ii) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

iii) Existe $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{K} - \{0\}$.

iv) Para todo $a \in \mathbb{K} - \{0\}$, $\exists!$ $a^{-1} \in \mathbb{K} - \{0\}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, a^{-1} es la inversa de a .

v) Distributividad: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}$

Los elementos del cuerpo son llamados escalares (Lázaro, 2017).

Ejemplo: Tenemos a los números: $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^*, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, +, \cdot)$ siendo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

Definición 2.4. Consideremos un conjunto $V \neq \emptyset$, y dos operaciones binarias $+$ y \cdot , dadas por $+: V \times V \rightarrow V$ y $\cdot: K \times V \rightarrow V$, donde \mathbb{K} es el cuerpo de escalares, que satisfacen las siguientes propiedades:

a) Suma: $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V / \bar{u} + \bar{v} \in V$ (ley de composición interna).

b) Producto por un escalar: $\forall \bar{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K} \rightarrow \alpha \bar{u} \in V$ (ley de composición externa).

Una estructura algebraica $(V; +; \mathbb{K}; \cdot)$ será denominada espacio vectorial si se cumplen:

i) Conmutatividad: $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u} \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

ii) Asociatividad: $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} \quad \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$

iii) Elemento cero: $\exists! 0 \in V / \bar{v} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$

iv) Elemento opuesto: $\forall \bar{v} \in V, \exists! -\bar{v} / \bar{v} + (-\bar{v}) = (-\bar{v}) + \bar{v} = \bar{0}$

Es decir $(V, +)$ es un grupo abeliano.

v) Asociatividad en el producto: $\alpha(\beta\bar{u}) = (\alpha\beta)\bar{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{u} \in V$

vi) Elemento neutro: $1 \cdot \bar{v} = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V, 1 \in \mathbb{K}$

vii) Distributividad: $\alpha(\bar{u} + \bar{v}) = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v} \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$

$(\alpha + \beta)\bar{u} = \alpha\bar{u} + \beta\bar{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \bar{u} \in V$ (Lázaro, 2017).

Ejemplos.

- Vectores que son n-uplas de números reales: $(\mathbb{R}^n; +; \mathbb{R}; \cdot) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real.
- Las matrices de $n \times m$ con coeficientes reales: $(\mathbb{R}^{n \times m}; +; \mathbb{R}; \cdot) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ es un espacio vectorial real.
- El conjunto de polinomios en una variable de grado menor o igual a n con coeficientes reales: $(P_n; +; \mathbb{R}; \cdot) \rightarrow P_n$ es un espacio vectorial real.

Definición 2.5. Sea $(V; +; \mathbb{K}; \cdot)$ un espacio vectorial y el conjunto $A = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$,

decimos que $v \in V$ es combinación lineal de A si existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (\text{Espinoza, 2006}).$$

Ejemplo: El espacio vectorial $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \mathbb{R}; \cdot)$ y las matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrar la combinación lineal de A_1, A_2, A_3, A_4 para obtener la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$\text{Entonces } A = \frac{-3}{2}A_1 + 4A_2 + \frac{5}{2}A_3 + 5A_4.$$

Definición 2.6. Consideremos un espacio vectorial $(V; +; \mathbb{K}; \cdot)$ y un subconjunto finito A no vacío de V , se define el subespacio generado por A como el conjunto de las combinaciones lineales finitas de A (Espinoza, 2006).

$$\text{Se denotará por } S = \text{gen}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i / \alpha_i \in \mathbb{K}, v_i \in A \right\}$$

Ejemplo.

Dado el conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Hallar el $\text{gen}(A)$

Solución:

$$\text{Sea } A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S = \text{gen}(A) = \left\{ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 / \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Y como $gen(A) \subset \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in gen(A)$. Luego:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Donde: $\begin{cases} x = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ y = -\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \\ z = -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 - 4\alpha_4 \\ w = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 + 3\alpha_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{forma matricial}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & \vdots & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \vdots & y \\ -1 & 1 & 3 & -4 & \vdots & z \\ 2 & 3 & -1 & 3 & \vdots & w \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & \vdots & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \vdots & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & z + x + 3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & w - 2x - y \end{bmatrix} \rightarrow S = gen(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \begin{matrix} x + 3y + z = 0 \\ -2x - y + w = 0 \end{matrix} \right\}$$

Definición 2.7. Llamemos $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un subconjunto del espacio vectorial V sobre el cuerpo K . Diremos que A es linealmente dependiente si existen $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \quad (2.1)$$

Observación. A es linealmente independiente $\leftrightarrow \sum_{i=1}^n c_i v_i = 0 \rightarrow c_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Es decir, la única solución de la ecuación (2.1) es $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ (Espinoza, 2006).

Ejemplo: Determinar si el conjunto es linealmente dependiente o independiente.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \right\} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Solución: Supongamos que $\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ -1 & 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 3 & -4 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = -c_3 \\ c_2 = -c_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_3 \\ -c_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

El sistema tiene infinitas soluciones e implica que $A \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es linealmente dependiente.

Observación. Un espacio vectorial tiene una infinidad de bases y todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

Definición 2.8. Sea V un espacio vectorial sobre los reales. Se define una base de V a un subconjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$, que satisface las siguientes condiciones:

a) B es generador del espacio vectorial V , es decir $gen(B) = V$.

b) B es un conjunto de vectores linealmente independiente (Espinoza, 2006).

Ejemplo: Comprobar si el conjunto $E = \{(1,2,1); (3,7,5); (2,6,7)\}$ es base de \mathbb{R}^3

Solución:

i) Si es linealmente independiente.

$$c_1(1,2,1) + c_2(3,7,5) + c_3(2,6,7) = (0,0,0) \rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + 7c_2 + 6c_3 = 0 \\ c_1 + 5c_2 + 7c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Forma matricial: } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 7 & 6 & \vdots & 0 \\ 1 & 5 & 7 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 2c_3 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

De donde: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$

ii) $gen(E) = V$; en efecto, su $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$c_1(1,2,1) + c_2(3,7,5) + c_3(2,6,7) = (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + 2c_3 = x \\ 2c_1 + 7c_2 + 6c_3 = y \\ c_1 + 5c_2 + 7c_3 = z \end{cases}$$

$$\text{Luego: } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & x \\ 2 & 7 & 6 & \vdots & y \\ 1 & 5 & 7 & \vdots & z \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & x \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & y - 2x \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3x - 2y + z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 + 3c_2 + 2c_3 = x \\ c_2 + 2c_3 = y - 2x \\ c_3 = 3x - 2y + z \end{cases}$$

Entonces: $c_2 = -8x + 5y - 2z$; $c_1 = 19x - 11y + 4z$; $c_3 = 3x - 2y + z$

$gen(E) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / c_1 = 19x - 11y + 4z; c_2 = -8x + 5y - 2z; c_3 = 3x - 2y + z\}$

Por lo tanto, el conjunto de vectores forma una base en \mathbb{R}^3 .

Definición 2.9. La dimensión de un espacio vectorial V es el cardinal de cualesquiera de sus bases. Diremos que V es de dimensión finita si la base es finita, en caso contrario si el número de elementos de la base es infinito el espacio es de dimensión infinita.

Observación.

i) $\dim_{\mathbb{K}} V = n / n$: número de elementos, si $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Si B es base de V y $\#B = n$

Entonces $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

ii) El espacio trivial $\{0\}$ no tiene base entonces su dimensión es cero: $\dim(\{0\}) = 0$

iii) En general: $\dim_{\mathbb{K}}(R^n) = n$, en las matrices es: $\dim_{\mathbb{K}}(R^{n \times m}) = n \cdot m$ y en los polinomios: $\dim_{\mathbb{K}}(P_n) = n + 1$ (Espinoza 2006).

Definición 2.10. El espacio afín es una terna (E, V, ψ) , donde E es un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman puntos, que están asociado a un espacio vectorial V llamados vectores libres o vectores y la aplicación o ley de composición externa de V en E , , dado por:

$\psi: V \times E \rightarrow E$ es decir, a cada par $(\vec{v}, P) \in V \times E, \exists! Q \in E / Q = \vec{v} + P$, que satisface las siguientes condiciones:

a) $\vec{0} + P = P$; $\overrightarrow{PQ} = \vec{0} \rightarrow P = Q$; $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, para todo $P, Q \in E$

b) $\vec{v} + (\vec{u} + P) = (\vec{v} + \vec{u}) + P$, para todo $\vec{v}, \vec{u} \in V, P \in E$

c) $\forall P, Q \in E, \exists! \vec{v} \in V / \vec{v} + P = Q$.

d) $\forall P, Q, R \in E \rightarrow \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PQ}$ (Relación de Chales).

Dados los puntos P, Q del espacio afín $E: \vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, se define el producto escalar $\lambda \in \mathbb{K}$

Entonces $\lambda \vec{v} = \lambda \overrightarrow{PQ}$.

La dimensión del espacio afín como $\dim E = \dim V$ (Pérez, 2007).

Ejemplos.

- (R^n, R^n, ψ) es un espacio afín de dimensión n

Si V es un espacio vectorial euclídeo, entonces se define un producto escalar y E es llamado un espacio afín euclídeo y la distancia entre los puntos P y Q está definida por:

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

- El conjunto de puntos R^n es un espacio afin sobre el espacio vectorial $(R^n, +, \cdot)$ mediante la aplicación:

$$\psi: (R^n, +, \cdot) \times R^n \rightarrow R^n$$

$$(v_1, v_2, \dots, v_n), (p_1, p_2, \dots, p_n) \rightarrow (p_1 + v_1, p_2 + v_2, \dots, p_n + v_n)$$

La distancia entre los puntos: $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, viene dado por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + \dots + (q_n - p_n)^2}$$

2.2. Transformaciones Lineales

En esta sección, se expone las definiciones y ejemplos de transformaciones lineales, transformaciones matriciales y sus efectos geométricos en el plano, también tenemos la matriz de una transformación lineal y las transformaciones afines, estas transformaciones son útiles para el movimiento y la forma que tendrán los fractales.

Definición 2.11. Sean dos espacios vectoriales V y W sobre \mathbb{K} . Decimos que la aplicación $T: V \rightarrow W$, es una transformación lineal si se cumplen:

$$i) \forall v_1, v_2 \in V: T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$ii) \forall c \in \mathbb{K}, \forall v \in V: T(cv) = c T(v) \text{ (Adame, 2005).}$$

Las transformaciones lineales ejercen un protagonismo notable en las matemáticas aplicadas y geometría computacional, siendo utilizadas en la elaboración de imágenes, animación digital, efectos visuales obtenidas por medio del computador, también son empleadas en diversas áreas de la ciencia como son la medicina, la física, etc. (Adame, 2005).

Ejemplo: Verificar que la transformación $T: R^n \rightarrow R^m$ definida por $T(v) = A \cdot v$ con $A \in \mathbb{R}^m$ una matriz fija y $v \in \mathbb{R}^n$ vector columna, es lineal.

$$i) T(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = T(v_1) + T(v_2).$$

$$ii) T(c \cdot v) = A \cdot (c \cdot v) = c \cdot (A \cdot v) = c \cdot T(v), \quad c \in \mathbb{K}.$$

En consecuencia, T es lineal.

Definición 2.12. La transformación matricial $T: R^n \rightarrow R^m$, asociada a una matriz A que será post-multiplicada por un vector $x \in R^n$, en que el resultado del producto es un vector $Tx \in R^m$, es la aplicación definida por $T(x) = A(x) / x \in R^n$ (Adame, 2005).

Ejemplo: Si $T: R^3 \rightarrow R^4$, está definida por:

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 2x - y + 7z \\ 3x + 9z \\ 4x + 5y + 2z \\ x + 6y \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \text{ Hallar: } T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \right)$$

Aplicando el vector (3,6,9) en T obtenemos:

$$T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2(3) - 6 + 7(9) \\ 3(3) + 9(9) \\ 4(3) + 5(6) + 2(9) \\ (3) + 6(6) \end{bmatrix}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 63 \\ 90 \\ 60 \\ 39 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$$

Teorema 2.13. Toda transformación matricial $T: R^n \rightarrow R^m$, cumple dos condiciones:

$$T(u) = A(u), \quad \forall u \in R^n$$

$$i) T(u + v) = T(u) + T(v), \quad \forall u, v \in R^n$$

$$ii) T(cu) = cT(u), \quad \forall u \in R^n \text{ y } c \text{ un escalar arbitrario (Adame, 2005).}$$

Definición 2.14. Los efectos geométricos de transformaciones matriciales definidas en el plano, son aplicaciones que transforman una figura en otra, variando la forma, tamaño o una determinada acción geométrica con respecto a la figura inicial.

Dichas aplicaciones son las siguientes:

a) Reflexiones. En este caso mencionaremos cuatro situaciones distintas.

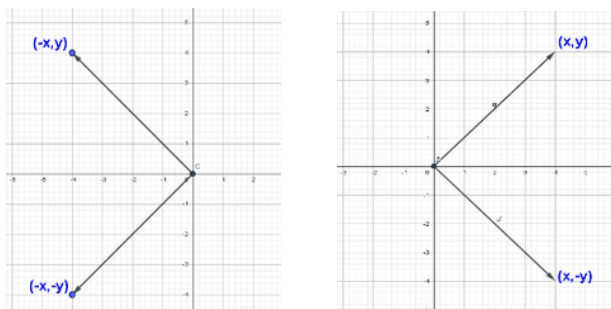
$$i) \text{ Reflexion respecto al eje X. Sea } R_x: R^2 \rightarrow R^2, \text{ definida por: } R_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\text{Evaluando los elementos de la base canónica en } R^2: R_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{La representación matricial es: } A_{R_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ (Speziale 2010).}$$

Figura 1.

Representación gráfica reflexiva del eje x con respecto al origen.



Ejemplo: Hallar los puntos de R_x del rombo $ABD'D'$, si $A = (0,8)$; $D = (2.19,4.8)$;

$B = (0,1.6)$; $D' = (-2.19,4.8)$

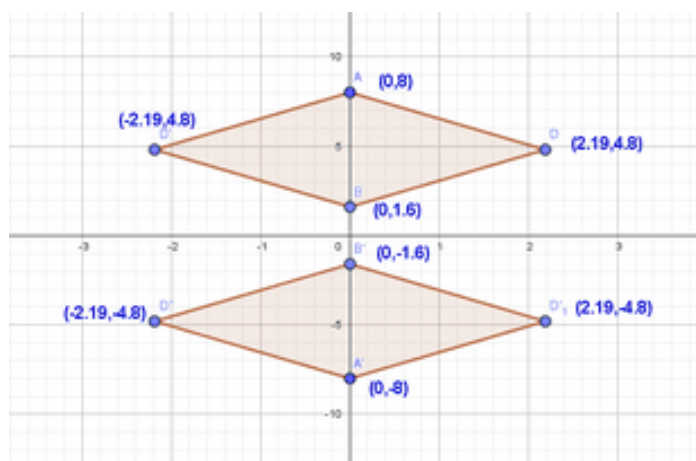
Solución.

$$R_{x_A} \rightarrow R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \end{pmatrix} = A'; \quad R_{x_D} \rightarrow R_x \begin{pmatrix} 2.19 \\ 4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.19 \\ -4.8 \end{pmatrix} = D'_1$$

$$R_{x_B} \rightarrow R_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.6 \end{pmatrix} = B'; \quad R_{x_{D'}} \rightarrow R_x \begin{pmatrix} -2.19 \\ 4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.19 \\ -4.8 \end{pmatrix} = D''.$$

Figura 2.

El rombo $ABD'D'$ transformado por la reflexión del eje x origina el rombo $A'D'1B'D''$



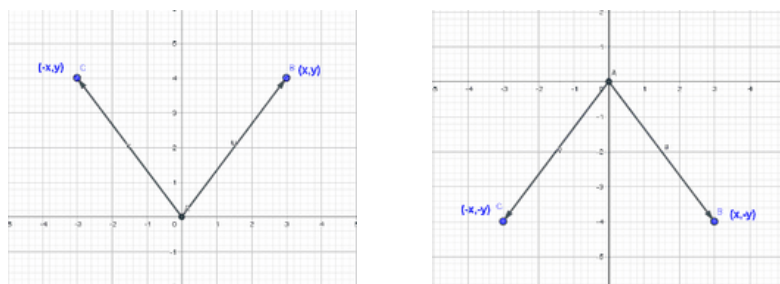
ii) **Reflexión respecto al eje Y.** Sea $R_y: R^2 \rightarrow R^2$, definida por: $R_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

Según los elementos de la base canónica en R^2 : $R_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $R_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces la representación matricial es: $A_{R_y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Speziale, 2010).

Figura 3.

La reflexión del eje Y con respecto al origen.



Ejemplo: Calculando la transformación de cada vértice del $\diamond A_1 D_1 D'_2 B_1$: $A_1 = (-4.38, 3.2)$;
 $D_1 = (-2.19, 0)$; $D'_2 = (-6.56, 0)$; $B_1 = (-4.38, -3.2)$

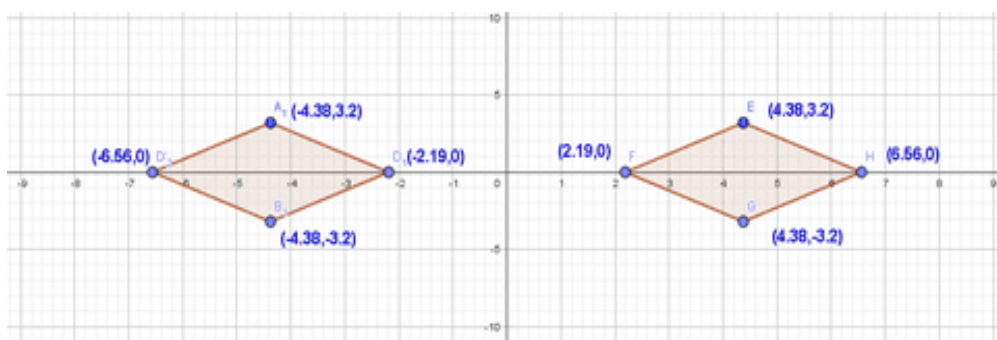
Solución.

$$R_{y_{A_1}} \rightarrow R_y \begin{pmatrix} -4.38 \\ 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.38 \\ 3.2 \end{pmatrix} = E; R_{y_{D_1}} \rightarrow R_y \begin{pmatrix} -2.19 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.19 \\ 0 \end{pmatrix} = F$$

$$R_{y_{B_1}} \rightarrow R_y \begin{pmatrix} -4.38 \\ -3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.38 \\ -3.2 \end{pmatrix} = G; R_{y_{D'_2}} \rightarrow R_y \begin{pmatrix} -6.56 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.56 \\ 0 \end{pmatrix} = H$$

Figura 4.

La transformación del rombo $A_1 D_1 D'_2 B_1$ con respecto al eje Y es el rombo $A' D' I B' D''$



iii) Reflexión respecto al origen. Sea $R_x \circ R_y = R_O: R^2 \rightarrow R^2$, definida por: $R_O \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

cuya representación matricial: $R_x \circ R_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = R_O$

(Speziale, 2010).

Ejemplo: La transformación de cada vértice de la figura $\square ABCDEF$: $A = (-8.98, -1.98)$;

$B = (-6.38, -1.98)$; $C = (-6.38, -5.48)$; $D = (-1.88, -5.48)$; $E = (-1.88, -7.48)$;

$F = (-8.98, -7.47)$.

Solución.

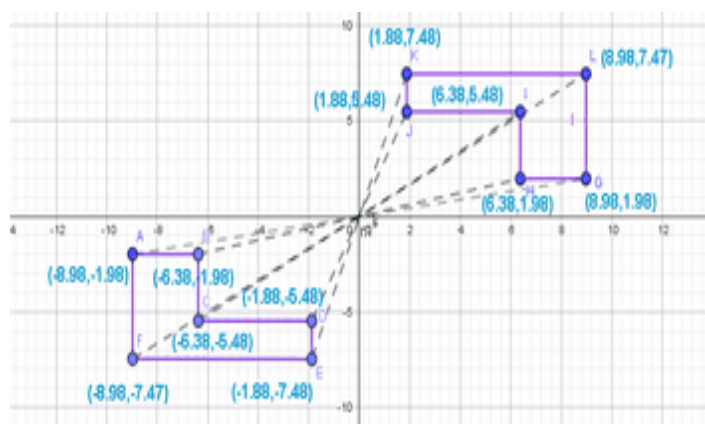
$$R_{0A} \rightarrow R_0 \begin{pmatrix} -8.98 \\ -1.98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.98 \\ 1.98 \end{pmatrix} = G; R_{0B} \rightarrow R_0 \begin{pmatrix} -6.38 \\ -1.98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.38 \\ 1.98 \end{pmatrix} = H$$

$$R_{0C} \rightarrow R_0 \begin{pmatrix} -6.38 \\ -5.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.38 \\ 5.48 \end{pmatrix} = I; R_{0D} \rightarrow R_0 \begin{pmatrix} -1.88 \\ -5.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.88 \\ 5.48 \end{pmatrix} = J$$

$$R_{0E} \rightarrow R_0 \begin{pmatrix} -1.88 \\ -7.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.88 \\ 7.48 \end{pmatrix} = K; R_{0F} \rightarrow R_0 \begin{pmatrix} -8.98 \\ -7.47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.98 \\ 7.47 \end{pmatrix} = L$$

Figura 5.

Transformación de reflexión con respecto al origen de la figura ABCDEF a GHIJKL



iv) Reflexión respecto a la recta $y=x$. Sea $R_{y=x}: R^2 \rightarrow R^2$, definida por: $R_{y=x} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Según los elementos de la base canónica en R^2 : $R_{y=x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $R_{y=x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Representación matricial: $A_{R_{y=x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Pérez, 2007).

Ejemplo: Evaluando la $R_{y=x}$ del polígono ABCDE: $A = (-5.49, 19.95)$; $B = (-19.96, 19.95)$

$C = (-19.96, 5.48)$; $D = (-16.96, 5.48)$; $E = (-5.49, 16.96)$

Solución.

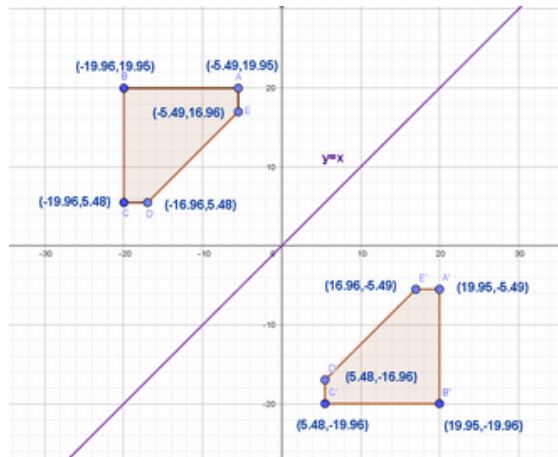
$$R_{y=x_A} \rightarrow R_{y=x} \begin{pmatrix} -5.49 \\ 19.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19.95 \\ -5.49 \end{pmatrix} = A'; R_{y=x_B} \rightarrow R_{y=x} \begin{pmatrix} -19.96 \\ 19.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19.95 \\ -19.96 \end{pmatrix} = B'$$

$$R_{y=x_C} \rightarrow R_{y=x} \begin{pmatrix} -19.96 \\ 5.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.48 \\ -19.96 \end{pmatrix} = C'; R_{y=x_D} \rightarrow R_{y=x} \begin{pmatrix} -16.96 \\ 5.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.48 \\ -16.96 \end{pmatrix} = D'$$

$$R_{y=x_E} \rightarrow R_{y=x} \begin{pmatrix} -5.49 \\ 16.96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.96 \\ -5.49 \end{pmatrix} = E'$$

Figura 6.

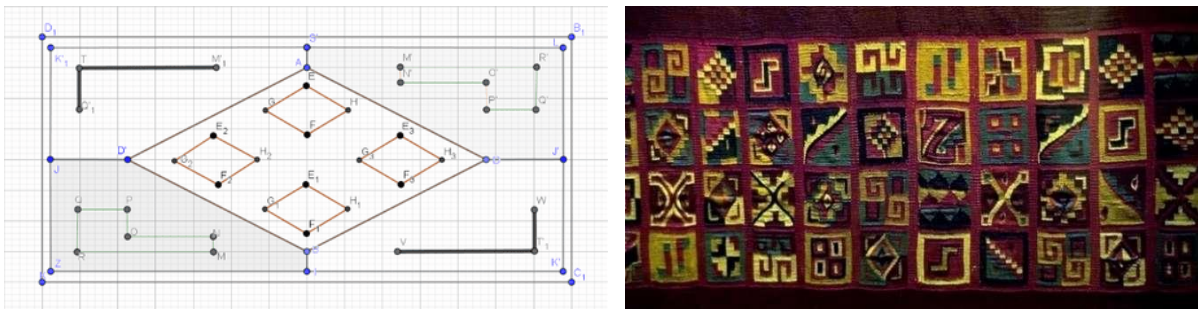
El polígono $ABCDE$ transformado por la reflexión $y=x$ obtenemos el polígono $A'B'C'D'E'$



En el Imperio Incaico, en su arte textil se elaboraron los *Tocapus*, los cuales consisten en conjuntos de cuadrados cuyo interior tienen una variedad de diseños o formas geométricas y fueron una guía para la construcción de figuras representadas anteriormente, y empleando las transformaciones matriciales de reflexión.

Figura 7.

Tocapu Incaico un conjunto de transformaciones matriciales



Nota. La unión de los ejemplos realizados y la distribución de ellos forman la figura presentada a continuación, el cual lo ubicamos en el tejido inca conocido como Tocapus. Fuente: Wikipedia (2024).

b) Compresión. La transformación es aplicada en el eje X y en el eje Y.

i) Compresión o contracción en el eje X.

Sea $C_x: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $C_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}, 0 < k < 1$

Evaluando los elementos de la base canónica en R^2 :

$$C_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}; C_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{C_x} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es su representación matricial}$$

(Adame, 2005).

Ejemplo: Hallar la C_x , si $k=1/2$ de cada vértice de la estrella: $B = (4,0)$; $B' = (1.24,3.8)$;

$$B'' = (-3.24,2.35); B''' = (-3.24, -2.35); C = (1.24, -3.8).$$

Solución.

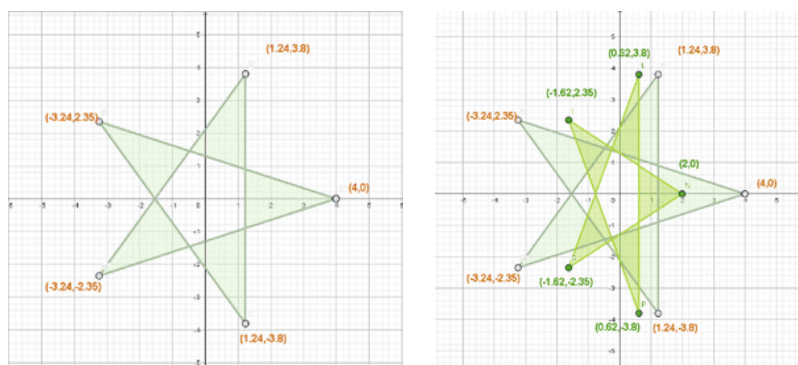
$$C_{x_B} \rightarrow C_x \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = N; C_{x_{B'}} \rightarrow C_x \begin{pmatrix} 1.24 \\ 3.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.62 \\ 3.8 \end{pmatrix} = L$$

$$C_{x_{B''}} \rightarrow C_x \begin{pmatrix} -3.24 \\ 2.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.62 \\ 2.35 \end{pmatrix} = I; C_{x_{B'''}} \rightarrow C_x \begin{pmatrix} -3.24 \\ -2.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.62 \\ -2.35 \end{pmatrix} = R$$

$$C_{x_C} \rightarrow C_x \begin{pmatrix} 1.24 \\ -3.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.62 \\ -3.8 \end{pmatrix} = P$$

Figura 8.

En la estrella $BB'B''B'''C$ se aplica la contracción en el eje X con $k=1/2$ transformando la estrella en $NLIRP$



ii) Compresión referente al eje Y.

Sea $C_y: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $C_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$, $0 < k < 1$ “Ver Anexo A” (Adame 2005).

c) **Expansión.** En la transformación de expansión se toma por referencia a los ejes X e Y.

i) **Expansión en el eje X.** Sea $E_x: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $E_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ y \end{pmatrix}$, $k > 1$

(Adame 2005).

Ejemplo: Determinar la E_x , con $k=2$ en cada vértice de la estrella: $B = (4,0)$; $B' = (1.24,3.8)$; $B''' = (-3.24, -2.35)$; $C = (1.24, -3.8)$; $B'' = (-3.24,2.35)$. Resolviendo tenemos:

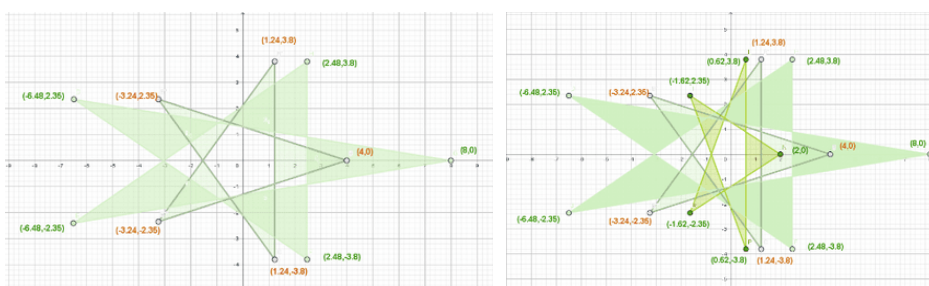
$$E_{x_B} \rightarrow E_x \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = G; E_{x_{B'}} \rightarrow E_x \begin{pmatrix} 1.24 \\ 3.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.48 \\ 3.8 \end{pmatrix} = H$$

$$E_{x_{B'''}} \rightarrow E_x \begin{pmatrix} -3.24 \\ -2.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.48 \\ -2.35 \end{pmatrix} = J; E_{x_C} \rightarrow E_x \begin{pmatrix} 1.24 \\ -3.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.48 \\ -3.8 \end{pmatrix} = F$$

$$E_{x_{B''}} \rightarrow E_x \begin{pmatrix} -3.24 \\ 2.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.48 \\ 2.35 \end{pmatrix} = E$$

Figura 9.

Expansión de la estrella en el eje X, con $k=2$ y la comparación con su compresión si $k=1/2$



ii) Expansión referente al eje Y. Sea $E_y: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $E_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ky \end{pmatrix}$, $k > 1$

Evaluando los elementos de la base canónica en R^2 :

$$E_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; E_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \rightarrow A_{E_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \text{ Es su representación matricial}$$

(Adame, 2005).

Ejemplo: Hallar la E_y , si $k=1,5$ en cada vértice de la estrella: $B' = (4.33,2.5)$; $B''' = (0,5)$;

$C' = (-4.33,2.5)$; $C''' = (-4.33, -2.5)$; $D' = (0, -5)$; $D''' = (4.33, -2.5)$; $N = (1.25,0)$;

$M = (0.63,1.08)$; $L = (-0.63,1.08)$; $K = (-1.25,0)$; $P = (-0.63, -1.08)$.

Solución.

$$E_{y_{B'}}: E_y(4.33,2.5) = (4.33,3.75) = Q; E_{y_{B'''}}: E_y(0,5) = (0,7.5) = S$$

$$E_{y_{C'}}: E_y(-4.33,2.5) = (-4.33,3.75) = T; E_{y_{C'''}}: E_y(-4.33, -2.5) = (-4.33, -3.75) = U$$

$$E_{y_{D'}}: E_y(0, -5) = (0, -7.5) = V; E_{y_{D'''}}: E_y(4.33, -2.5) = (4.33, -3.75) = R$$

$$E_{y_N}: E_y(1.25,0) = (1.25,0); E_{y_M}: E_y(0.63,1.08) = (0.63,1.62) = Z$$

$$E_{y_L}: E_y(-0.63, 1.08) = (-0.63, 1.62) = W; E_{y_K}: E_y(-1.25, 0) = (-1.25, 0)$$

$$E_{y_P}: E_y(-0.63, -1.08) = (-0.63, -1.62) = A_1$$

$$E_{y_O}: E_y(0.63, -1.08) = (0.63, -1.62) = B_1$$

Figura 10.

Expansión de la estrella de 6 puntas en el eje Y.

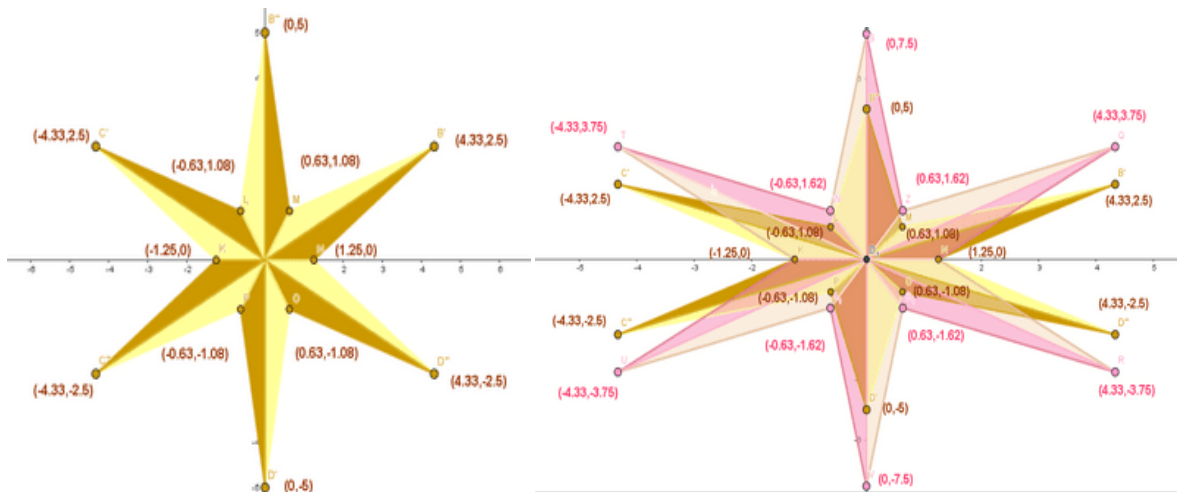
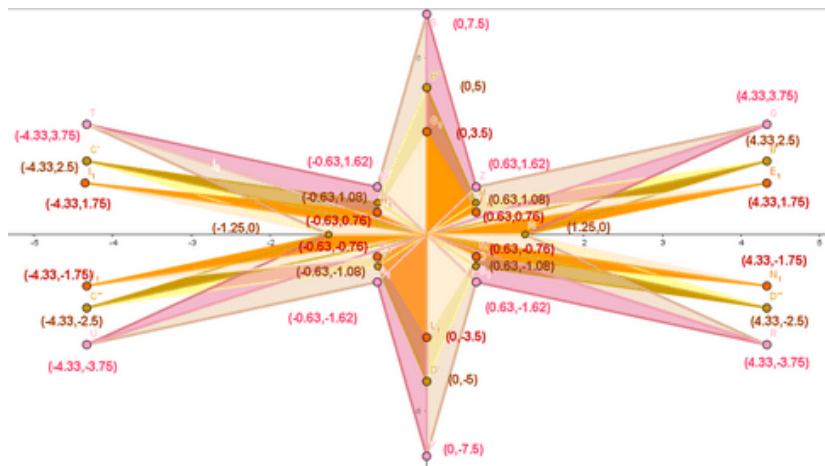


Figura 11.

Expansión y compresión de la estrella de 6 puntas en el eje Y.



d) Homotecias. Son transformaciones donde se conserva el ángulo de la figura aun cuando la imagen se acorta o aumenta de tamaño, para lograr este cambio semejante se emplea la razón de homotecia que se obtiene desde el centro de homotecia (O) hasta el vértice de la figura entre la imagen inicial y la imagen homotética.

Sea $H: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; k : razón de homotecia

Evaluando los elementos de la base canónica en R^2

$H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$; $H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \rightarrow A_H = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ Es su representación matricial (Pérez, 2007).

Tipos de Homotecia

i) Homotecia Directa: $k > 0$

Si $0 < k < 1$, la imagen se contrae con respecto a la inicial. Si $k = 1$, la imagen derivada es idéntica al original. Si $k > 1$, la imagen se expande con respecto al original. (Pérez, 2007).

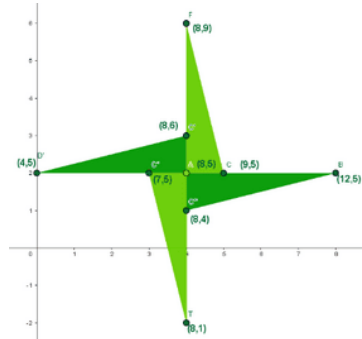
Ejemplo: Determinar la homotecia en cada vértice de la figura con $k = 0,5$, si $B = (12,5)$;

$C = (9,5)$; $F = (8,9)$; $C' = (8,6)$; $D' = (4,5)$; $C'' = (7,5)$; $A = (8,5)$; $C''' = (8,4)$;

$T = (8,1)$.

Figura 12.

En la siguiente imagen se aplicará homotecia.



Solución.

$$H_B \rightarrow H(12,5) = (6,2.5) = B'_3 ; H_C \rightarrow H(9,5) = (4.5,2.5) = C'_2 ;$$

$$H_F \rightarrow H(8,9) = (4,4.5) = F'_2 ; H_{C'} \rightarrow H(8,6) = (4,3) = C''_2 ;$$

$$H_{D'} \rightarrow H(4,5) = (2,2.5) = D''_3 ; H_{C''} \rightarrow H(7,5) = (3.5,2.5) = C'''_2$$

$$H_A \rightarrow H(8,5) = (4,2.5) = A'_6 ; H_{C'''} \rightarrow H(8,4) = (4,2) = F_1;$$

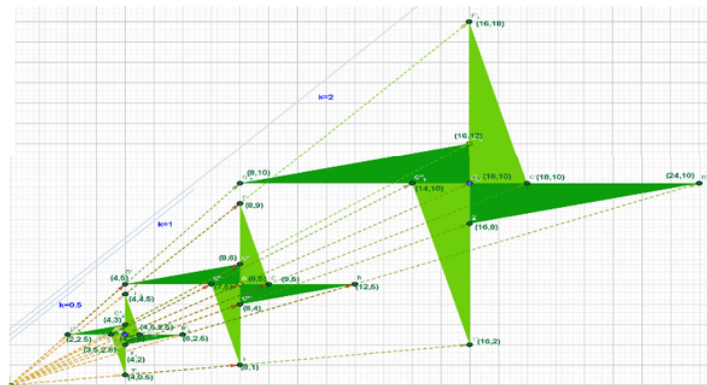
$$H_T \rightarrow H(8,1) = (4,0.5) = T'_1$$

Evaluando la homotecia si la razón es $k = 2$.

$$\begin{aligned}
 H_B \rightarrow H(12,5) = (24,10) = B'_2 ; H_C \rightarrow H(9,5) = (18,10) = C'_1 ; \\
 H_F \rightarrow H(8,9) = (16,18) = F'_1 ; H_{C'} \rightarrow H(8,6) = (16,12) = C''_1 ; \\
 H_{D'} \rightarrow H(4,5) = (8,10) = D''_2 ; H_{C''} \rightarrow H(7,5) = (14,10) = C'''_1 \\
 H_A \rightarrow H(8,5) = (16,10) = A'_5 ; H_{C'''} \rightarrow H(8,4) = (16,8) = Z ; \\
 H_T \rightarrow H(8,1) = (16,2) = T'
 \end{aligned}$$

Figura 13.

Aplicación de homotecia en la imagen de valores son $k=0,5$ y $k=2$



ii) Homotecia Inversa: $k < 0$

Si $-1 < k < 0$, la imagen se achica con respecto al original. Si $k = -1$, la imagen derivada es congruente al inicial. Si $k < -1$, la figura aumenta su tamaño con respecto al original.

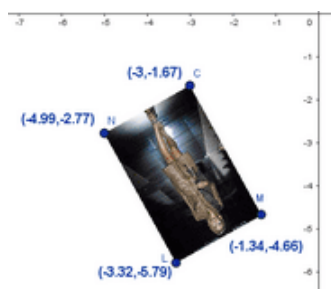
(Pérez, 2007).

Ejemplo: Calculando la homotecia en cada vértice de la imagen dado por

$C = (-3, -1.67)$; $N = (-4.99, -2.77)$; $L = (-3.32, -5.79)$; $M = (-1.34, -4.66)$, siendo $k = -0,5$.

Figura 14.

En la imagen se aplicará homotecia inversa.



Solución.

$$H_C: H(-3, -1.67) = (1.5, 0.84) = Q ; H_N: H(-4.99, -2.77) = (2.5, 1.39) = R ;$$

$$H_L: H(-3.32, -5.79) = (1.66, 2.9) = P ; H_M: H(-1.34, -4.66) = (0.67, 2.33) = H$$

En el caso $k = -1$

$$H_C: H(-3, -1.67) = (3, 1.67) = S ; H_N: H(-4.99, -2.77) = (4.99, 2.77) = T$$

$$H_L: H(-3.32, -5.79) = (3.32, 5.7) = Z ; H_M: H(-1.34, -4.66) = (1.34, 4.66) = W$$

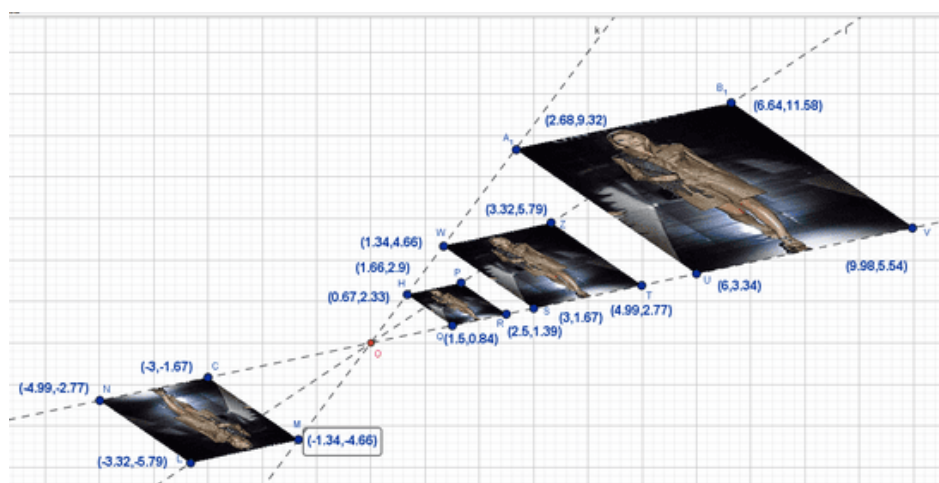
Si $k = -2$

$$H_C: H(-3, -1.67) = (6, 3.34) = U ; H_N: H(-4.99, -2.77) = (9.98, 5.54) = V$$

$$H_L: H(-3.32, -5.79) = (6.64, 11.58) = B_1 ; H_M: H(-1.34, -4.66) = (2.68, 9.32) = A_1$$

Figura 15.

Homotecia inversa aplicada en la figura si $k = -0.5$, $k = -1$ y $k = -2$



e) Desplazamientos. Se presentan dos tipos de transformaciones en el eje X e Y.

i) Desplazamiento en el eje X.

Sea $D_x: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $D_x \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ y \end{pmatrix}, k \neq 0$.

Evaluando los elementos de la base canónica en R^2

$D_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $D_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{D_x} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Consiste en su representación matricial

“Ver Anexo B” (Adame, 2005).

ii) Desplazamiento en el eje Y. Sea $D_y: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $D_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + kx \end{pmatrix}, k \neq 0$

Evaluando en los elementos de la base canónica en R^2 :

$$D_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}; D_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A_{D_y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \text{ es la representación matricial}$$

“Ver Anexo C” (Adame, 2005).

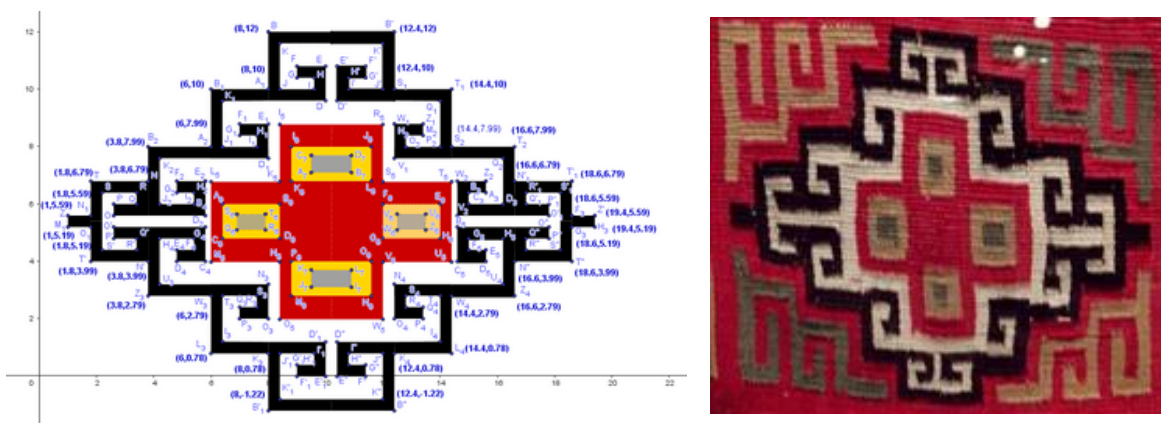
f) Traslación. Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $T(x, y) = (x, y) + b, b \neq 0$ y $b = (h, k)$

$$T_{(h,k)}(x, y) = (x + h, y + k) \text{ (Pérez, 2007).}$$

Ejemplo: En los vértices del contorno de la figura geométrica textil inca se aplicará la transformación de traslación, empleando el vector de traslación (20,6).

Figura 16.

Motivo inca



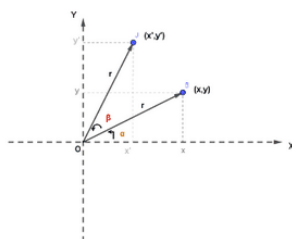
Nota. Fuente: World History Encyclopedia (2015)

Ver coordenadas de transformación en (Anexo D)

g) Rotación. La transformación de rotación en el plano se realiza respecto a un punto llamado centro de rotación, en particular el origen del sistema de coordenadas. Además, se considera un ángulo de rotación. Las figuras no varían en su forma y tamaño (Pérez, 2007).

Figura 17.

Transformación de rotación



Hallando la matriz de rotación con respecto al origen.

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos(\alpha); \text{sen}(\alpha) = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \text{sen}(\alpha)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{x'}{r} \rightarrow x' = r \cos(\alpha + \beta); \text{sen}(\alpha + \beta) = \frac{y'}{r} \rightarrow y' = r \text{sen}(\alpha + \beta)$$

Sea $T_\beta: R^2 \rightarrow R^2$, definida por $T_\beta(x, y) = (x', y') = (r \cos(\alpha + \beta), r \text{sen}(\alpha + \beta))$

$$T_\beta(x, y) = (r(\cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)), r(\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta)))$$

$$T_\beta(x, y) = (r \cos(\alpha) \cos(\beta) - r \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta), r \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + r \cos(\alpha) \text{sen}(\beta))$$

$$T_\beta(x, y) = (x', y') = (x \cos(\beta) - y \text{sen}(\beta), y \cos(\beta) + x \text{sen}(\beta)).$$

$$\text{En consecuencia, } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\beta) - y \text{sen}(\beta) \\ x \text{sen}(\beta) + y \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) - \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) + \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Así, } T_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) - \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) + \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo.

En el polígono irregular ABCDEFG se aplica la transformación de rotación con $\beta = 30^\circ$.

$$T_{30}(A) = T_{30} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) - \text{sen}(30) \\ \text{sen}(30) + \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 5.83 \end{pmatrix} = A'$$

$$T_{30}(B) = T_{30} \begin{pmatrix} 0.86 \\ 2.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) - \text{sen}(30) \\ \text{sen}(30) + \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.86 \\ 2.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.28 \\ 2.21 \end{pmatrix} = B'$$

$$T_{30}(C) = T_{30} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) - \text{sen}(30) \\ \text{sen}(30) + \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.28 \\ 2.21 \end{pmatrix} = C'$$

$$T_{30}(D) = T_{30} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) - \text{sen}(30) \\ \text{sen}(30) + \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.96 \\ 4.6 \end{pmatrix} = D'$$

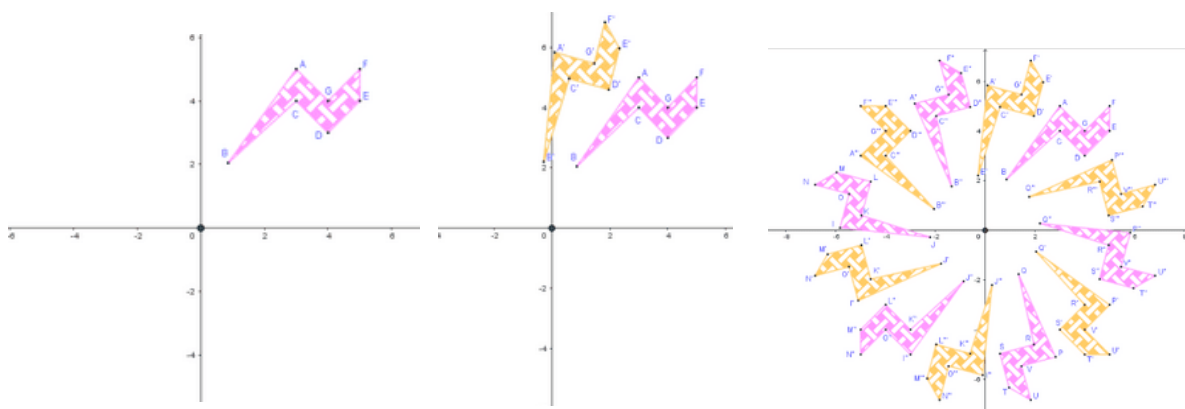
$$T_{30}(E) = T_{30} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) - \text{sen}(30) \\ \text{sen}(30) + \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.33 \\ 5.96 \end{pmatrix} = E'$$

$$T_{30}(F) = T_{30} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) - \text{sen}(30) \\ \text{sen}(30) + \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.83 \\ 6.83 \end{pmatrix} = F'$$

$$T_{30}(G) = T_{30} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30) - \text{sen}(30) \\ \text{sen}(30) + \cos(30) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.46 \\ 5.46 \end{pmatrix} = G'$$

Figura 18.

El polígono rota con un ángulo de 30°



(Ver Anexo E).

Definición 2.15. Sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base del espacio vectorial $(V, +, K, \cdot)$, denominamos coordenadas de un vector $v \in V$ respecto a B como la combinación lineal de los vectores de la base, representada $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ del siguiente modo: (Espinoza, 2006)

$$v_{[B]} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} / v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Ejemplo:

Evaluar el vector de coordenadas v respecto a la base B para $(R^{2 \times 2}, +, R, \cdot)$.

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, [B] = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución.

Combinación lineal de $[B]$:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego: } \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_2 - \alpha_4 = -2 \\ -\alpha_3 = 2 \end{cases} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -2 \\ \alpha_4 = 4 \end{cases} \quad \text{por eso: } v_{[B]} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Definición 2.16. (Matriz de una transformación lineal)

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita con $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$,

$[B_1] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $[B_2] = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ bases de V y W respectivamente.

Consideremos la transformación lineal $T: V \rightarrow W$. Si $v \in V, w = Tv \in W$, y las coordenadas de dichos vectores en sus correspondientes bases:

$$v_{[B_1]} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ y } w_{[B_2]} = \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_m \end{bmatrix} \rightarrow T(v) = \alpha'_1 w_1 + \alpha'_2 w_2 + \dots + \alpha'_m w_m = w$$

$$\text{con } T(v_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji} w_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \rightarrow \begin{cases} T(v_1) = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{21} w_2 + \dots + \alpha_{m1} w_m \\ T(v_2) = \alpha_{12} w_1 + \alpha_{22} w_2 + \dots + \alpha_{m2} w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = \alpha_{1n} w_1 + \alpha_{2n} w_2 + \dots + \alpha_{mn} w_m \end{cases}$$

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Se define como la matriz asociada a la transformación lineal T respecto a las bases B_1 y B_2 (Espinoza, 2006).

En consecuencia, tenemos $A \cdot v_{[B_1]} = T(v)_{[B_2]}$, $v \in V$

Definición 2.17. Una transformación afín $T: R^n \rightarrow R^m$, se define como una representación de la forma:

$$T(v) = A(v) + b \quad \begin{cases} A: \text{matriz de orden } m \times n \\ b \neq 0 \in R^m \end{cases}$$

Donde $A(v)$ es lineal y b es un vector desplazamiento o traslación.

Observación. Si $m = n$ y $A = I$ (matriz identidad)

Entonces $T(v) = I v + b = v + b$: Transformación de traslación.

Forma matricial: (Adame, 2005)

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} y \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \dots + \alpha_{1n}v_n + b_1 \\ \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \dots + \alpha_{2n}v_n + b_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}v_1 + \alpha_{m2}v_2 + \dots + \alpha_{mn}v_n + b_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Rotación + Traslación del rayo ABCDEFGHIJKLM cuyos vértices son los

siguientes: A = (8.28, 8.32); B = (7.82, 7.58); C = (8.54, 7.84); D = (7, 7); E = (7.66, 7.37)

F = (7.71, 6.99); G = (6.95, 5.92); H = (8.92, 6.51); I = (5.7, 4.98); J = (7.39, 5.67);

K = (6.1, 3.57); L = (6.87, 4.06); M = (5.28, 0.54), el ángulo de rotación es $\theta = 60^\circ$ y el vector de traslación es N = (4, 2).

Solución.

$$\text{Sea } R = \begin{bmatrix} \cos(60^\circ) & -\text{sen}(60^\circ) \\ \text{sen}(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego } T(A) = T \begin{bmatrix} 8.28 \\ 8.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.28 \\ 8.32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 13.37 \end{bmatrix} = A'$$

$$T(B) = T \begin{bmatrix} 7.82 \\ 7.58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.82 \\ 7.58 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.31 \\ 12.6 \end{bmatrix} = B'$$

$$T(C) = T \begin{bmatrix} 8.54 \\ 7.84 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.54 \\ 7.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.45 \\ 13.35 \end{bmatrix} = C'$$

$$T(D) = T \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.41 \\ 11.59 \end{bmatrix} = D'$$

$$T(E) = T \begin{bmatrix} 7.66 \\ 7.37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.66 \\ 7.37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.41 \\ 12.35 \end{bmatrix} = E'$$

$$T(F) = T \begin{bmatrix} 7.71 \\ 6.99 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.71 \\ 6.99 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.77 \\ 12.2 \end{bmatrix} = F'$$

$$T(G) = T \begin{bmatrix} 6.95 \\ 5.92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.95 \\ 5.92 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.32 \\ 11 \end{bmatrix} = G'$$

$$T(H) = T \begin{bmatrix} 8.92 \\ 6.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.92 \\ 6.51 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.32 \\ 11 \end{bmatrix} = H'$$

$$T(I) = T \begin{bmatrix} 5.7 \\ 4.98 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.7 \\ 4.98 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.52 \\ 9.44 \end{bmatrix} = I'$$

$$T(J) = T \begin{bmatrix} 7.39 \\ 5.67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.39 \\ 5.67 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.77 \\ 11.26 \end{bmatrix} = J'$$

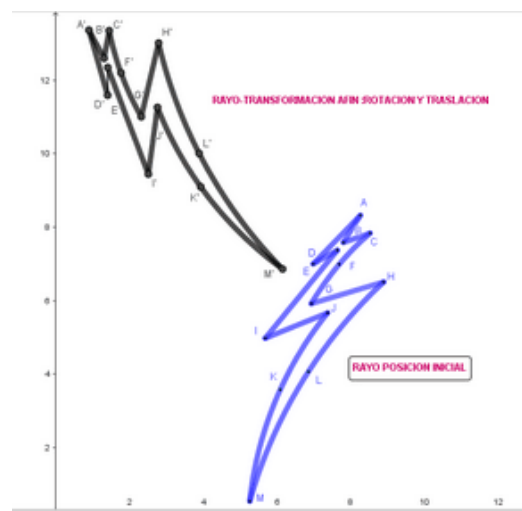
$$T(K) = T \begin{bmatrix} 6.1 \\ 3.57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.1 \\ 3.57 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.94 \\ 9.1 \end{bmatrix} = K'$$

$$T(L) = T \begin{bmatrix} 6.87 \\ 4.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.87 \\ 4.06 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9 \\ 10.01 \end{bmatrix} = L'$$

$$T(M) = T \begin{bmatrix} 5.28 \\ 0.54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.87 \\ 0.87 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.28 \\ 0.54 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.17 \\ 6.86 \end{bmatrix} = M'$$

Figura 19.

El rayo es rotado y trasladado



Ejemplo: Encontrar la transformación afín que convirtió a los vértices del cometa en los nuevos

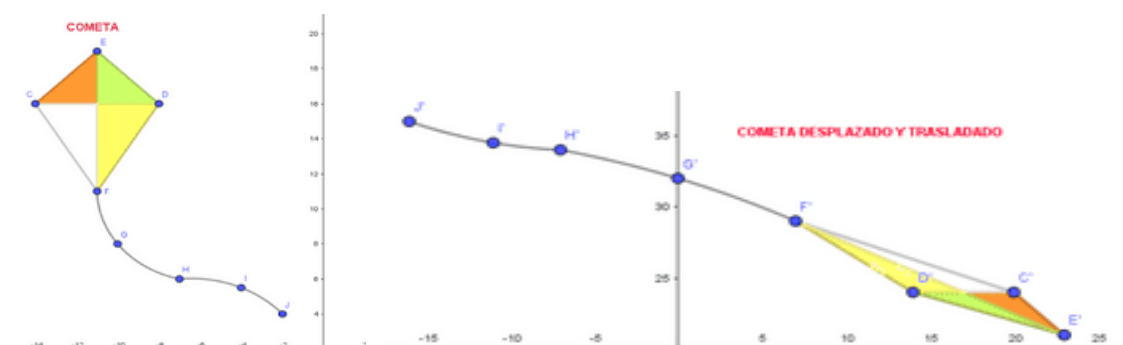
vértices: C = (-14, 16) en C' = (20, 24); D = (-8, 16) en D' = (14, 24);

E = (-11, 19) en E' = (23, 21); F = (-11, 11) en F' = (7, 29); G = (-10, 8) en G' = (0, 32);

H = (-7, 6) en H' = (-7, 34); I = (-4, 5.5) en I' = (-11, 34.5); J = (-2, 4) en J' = (-16, 36).

Figura 20.

Transformación del cometa.



Solución: Sea $T(v) = A(v) + b \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$$T(C) = T \begin{bmatrix} -14 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14a_1 + 16a_2 + b_1 \\ -14a_3 + 16a_4 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 24 \end{bmatrix} = C'$$

$$T(D) = T \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8a_1 + 16a_2 + b_1 \\ -8a_3 + 16a_4 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 24 \end{bmatrix} = D'$$

$$T(E) = T \begin{bmatrix} -11 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11a_1 + 19a_2 + b_1 \\ -11a_3 + 19a_4 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 21 \end{bmatrix} = E'$$

Se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{cases} -14a_1 + 16a_2 + b_1 = 20 \\ -14a_3 + 16a_4 + b_2 = 24 \\ -8a_1 + 16a_2 + b_1 = 14 \\ -8a_3 + 16a_4 + b_2 = 24 \\ -11a_1 + 19a_2 + b_1 = 23 \\ -11a_3 + 19a_4 + b_2 = 21 \end{cases}$$

Entonces lo separamos en dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} -14a_1 + 16a_2 + b_1 = 20 \\ -8a_1 + 16a_2 + b_1 = 14 \\ -11a_1 + 19a_2 + b_1 = 23 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -14a_3 + 16a_4 + b_2 = 24 \\ -8a_3 + 16a_4 + b_2 = 24 \\ -11a_3 + 19a_4 + b_2 = 21 \end{cases}$$

El valor de las variables es: $a_1 = -1$; $a_2 = 2$; $b_1 = -26$; $a_3 = 0$; $a_4 = -1$; $b_2 = 40$

De tal manera la matriz es $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} -26 \\ 40 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, la transformación afín es: $T(v) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} (v) + \begin{bmatrix} -26 \\ 40 \end{bmatrix}$

Observamos que la cometa se desplaza 2 cm. hacia el eje x y luego se traslada (-26,40).

2.3. Espacios Topológicos

En la presente sección, presentamos las definiciones de topología o espacio topológico y sus propiedades. Además, se desarrollan los conceptos de topología fina, entornos, vecindades, bases topológicas y espacios conexos, los cuales ayudaran a la comprensión de las nociones métricas empleadas en los fractales.

Definición 2.18. Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{T} una familia de subconjuntos de X . Decimos que \mathcal{T} es una topología en X si se cumplen las siguientes propiedades:

i) X y $\emptyset \in \mathcal{T}$.

ii) Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ es una colección de elementos de \mathcal{T} , entonces $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \mathcal{T}$.

iii) Para cada colección finita: $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n \in \mathcal{T} \rightarrow \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i \in \mathcal{T}$.

Si \mathcal{T} es una topología sobre el conjunto X , se afirma que el par (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico y si $A \in \mathcal{T}$ entonces diremos que A es abierto en \mathcal{T} (Munkres, 2002).

Ejemplo: Sea $X \neq \emptyset$ $\mathcal{T}_D = \{\mathcal{F}/\mathcal{F} \subseteq X\}$

\mathcal{T}_D es una topología sobre X . En efecto,

i) $X \subseteq X \rightarrow X \in \mathcal{T}_D$ y $\emptyset \subseteq X \rightarrow \emptyset \in \mathcal{T}_D$

ii) $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_D \rightarrow \mathcal{F}_i \subseteq X$; $\forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \subseteq X \quad \therefore \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i \in \mathcal{T}_D$

iii) $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \in \mathcal{T}_D \rightarrow \mathcal{F}_1 \subseteq X; \mathcal{F}_2 \subseteq X; \dots; \mathcal{F}_n \subseteq X$

Luego $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subseteq X \cap X = X \rightarrow \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathcal{T}_D$; $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_3 \subseteq X \cap X = X \rightarrow \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_3 \in \mathcal{T}_D$;

$\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3 \subseteq X \cap X = X \rightarrow \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3 \in \mathcal{T}_D$; $\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_4 \subseteq X \cap X = X \rightarrow \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_4 \in \mathcal{T}_D$; ...

$\therefore \bigcap_{i=1}^n \mathcal{F}_i \in \mathcal{T}_D$. En consecuencia, \mathcal{T}_D es una topología, denominada discreta sobre X . Por lo tanto, (X, \mathcal{T}_D) es un espacio topológico.

Definición 2.19. Supongamos que $X \neq \emptyset$ y dos topologías \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 sobre X . Diremos que \mathcal{T}_2 es más fina que \mathcal{T}_1 , si dado $A \in \mathcal{T}_1 \rightarrow A \in \mathcal{T}_2$, es decir $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, en tal situación se dice que las topologías son comparables y se denota por $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ (Gordillo & Navarro, 2020).

Observación. Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, la topología discreta \mathcal{T}_D es la más fina de todas las topologías posibles sobre X y la topología indiscreta \mathcal{T}_I la menos fina. Si \mathcal{T} es cualquier otra topología en X se cumple $\mathcal{T}_I \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_D$.

Definición 2.20. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y \mathfrak{B} una familia de subconjuntos abiertos de X , tal que $\mathfrak{B} \subset \mathcal{T}$. Diremos que \mathfrak{B} es base de la topología \mathcal{T} si se verifica que los conjuntos abiertos de \mathcal{T} se obtiene como la unión de los elementos de \mathfrak{B} es decir si $A \in \mathcal{T}$, $\exists \{G_i\}_{i \in J} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $A = \bigcup_{i \in J} G_i$ (Macho, 2014).

Teorema 2.21. Sea \mathfrak{B} una base del espacio topológico (X, \mathcal{T}) , entonces se cumplen:

i) $X = \bigcup \mathfrak{B}$.

ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2, \exists B_x / x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$ (Ivorra, s.f.).

Ejemplo: Probar que para una topología sobre \mathbb{R} , tenemos la base:

$$\mathfrak{B} = \{B =]a, b]; a, b \in \mathbb{R} \ a < b\}$$

Solución: i) Sea $X = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} = \cup\{B: B \in \mathfrak{B}\}$, considerando a $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n + 1]$

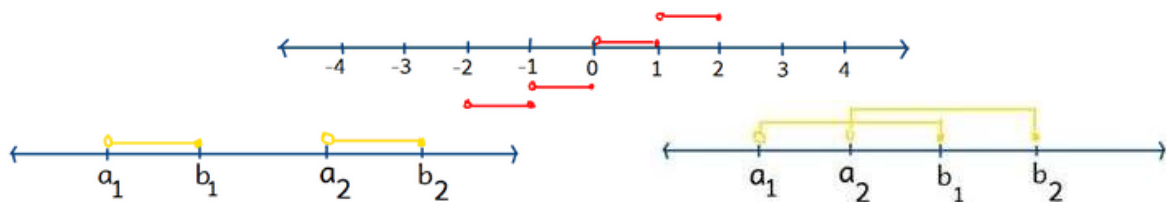
ii) Si $B_1 =]a_1, b_1], B_2 =]a_2, b_2]$, analizando $B_1 \cap B_2$ se presenta dos casos:

1. $b_1 < a_2 \rightarrow]a_1, b_1] \cap]a_2, b_2] = \emptyset \subset \mathfrak{B} = \{B: B \in \emptyset \rightarrow B \subset \mathfrak{B}\}$
2. $a_1 < a_2 < b_1 < b_2 \rightarrow]a_1, b_1] \cap]a_2, b_2] =]a_2, b_1] = B_3 \subset \mathfrak{B}$

Por lo tanto, \mathfrak{B} es una base para la topología: $\mathcal{T} = \{G \subset \mathbb{R}: G = \cup\{B: B \in \mathfrak{B}\}\}$

Figura 21.

Interpretación grafica de los intervalos indicados en (i) y en (ii) Caso 1 y 2.



Ejemplo: El espacio topológico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_u)$, donde \mathfrak{B} es una base de

$$\mathcal{T}_u = \{G_i \subset \mathbb{R}^2: G_i = \cup_{j \in I} B_j^i \wedge B_i \in \mathfrak{B} / B_i: (x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2\}$$

Definición 2.22. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $V \subset X$ y $x \in X$. El subconjunto V es denominado entorno de x , si existe un abierto $G \in \mathcal{T}$ tal que $x \in G$ y $G \subseteq V$.

La familia de todos los entornos de x es denotado por \mathcal{N}_x , destacando las siguientes propiedades:

- a) Si $V \subseteq X$, es abierto entonces V es entorno de todos sus puntos, además $V = \cup_{x \in V} G_x$.
- b) Para cada $V \in \mathcal{N}_x$ entonces $x \in V$.
- c) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$ entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_x$.
- d) Si $V \in \mathcal{N}_x$ y $V \subset W$ entonces $W \in \mathcal{N}_x$.
- e) Dado $V \in \mathcal{N}_x$, existe $W \in \mathcal{N}_x$ tal que $V \in \mathcal{N}_y, \forall y \in W$ (Macho, 2014).

Ejemplo: El espacio topológico (X, \mathcal{T}_D) , $\mathcal{T}_D = \{F / F \subseteq X\}$. Todo subconjunto de X es entorno

de todos sus puntos por ser abierto.

Definición 2.23. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, $x \in X$ y \mathcal{N}_x el sistema de entornos de x .

Decimos que \mathfrak{B}_x es una base de entornos de x si:

i) $\mathfrak{B}_x \subset \mathcal{N}_x$.

ii) Dado $N \in \mathcal{N}_x, \exists B \in \mathfrak{B}_x$ tal que $B \subseteq N$ (Gordillo & Navarro, 2020).

Observación. Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , entonces \mathfrak{B}_x es base de entornos abiertos para los puntos $x \in X$ si cumple las siguientes propiedades:

i) $x \in B$ para cada $B \in \mathfrak{B}_x$.

ii) Si $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_x$, entonces existe $B_3 \in \mathfrak{B}_x / B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

iii) Para cada $B \in \mathfrak{B}_x$, existe $B_0 \in \mathfrak{B}_x$, tal que para cada $y \in B_0, \exists B_y \in \mathfrak{B}_y$ tal que $B_y \subset B$.

iv) $V \in \mathcal{T}$ si y solo si para cada $x \in V, \exists B \in \mathfrak{B}_x$ tal que $B \subseteq V$ (Macho, 2002).

Definición 2.24. Dado (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, si $x \in X$ decimos que G es vecindad de x sí y solo si $G \in \mathcal{T}$ y $x \in G$.

Se denotará por G_x a la vecindad de un punto x .

Nota. El conjunto de todas las vecindades de x se representa por $\mathcal{V}_x = \{G \in \mathcal{T} / x \in G\}$.

(Jiménez, 2018).

Definición 2.25. Dado un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , decimos que es un:

a) Espacio T_0 sí y solo si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $G_x \in \mathcal{N}_x$ tal que $x \in G \wedge y \notin G$.

b) Espacio T_1 si y solo si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ tal que $x \in G_1 \wedge y \notin G_1$ además $y \in G_2 \wedge x \notin G_2$ (Fernández, 2020).

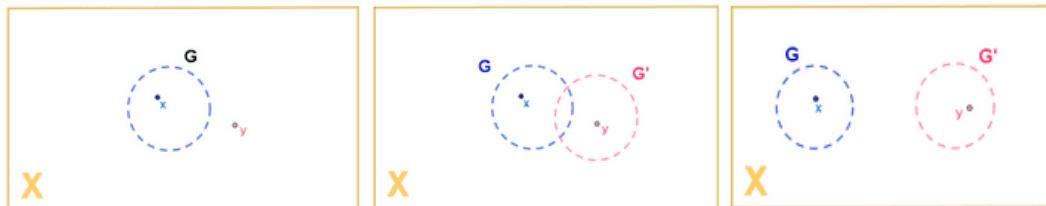
c) Espacio T_2 o de Hausdorff si y solo si para cada $x, y \in X$ tal que $x \neq y$ existen $G, G' \in \mathcal{T}$ abiertos disjuntos tales que $x \in G \wedge G \in \mathcal{V}_x$,

$y \in G' \wedge G' \in \mathcal{V}_y$ (Jiménez, 2018).

Además, se satisface que $T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T_0$.

Figura 22.

Los espacios T_0, T_1, T_2



Definición 2.26. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es conexo si no existen dos subconjuntos abiertos no vacíos $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ tal que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ y $G_1 \cup G_2 = X$.

Entonces: $G_1^c = X \setminus G_1 = G_2 \in \mathcal{T} \rightarrow G_1$ es cerrado en \mathcal{T} .

De otro lado: $G_2^c = X \setminus G_2 = G_1 \in \mathcal{T} \rightarrow G_2$ es cerrado en \mathcal{T} .

Observación. (X, \mathcal{T}) es conexo, si y solo si, $\nexists G \subset X$, en el que $G \neq \emptyset$ y G es abierto y cerrado en \mathcal{T} . En consecuencia, un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es conexo, si y solo si, los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son X y \emptyset (Ivorra, s.f.).

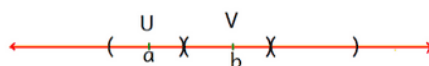
Teorema 2.27. Si (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de subconjuntos conexos de X tal que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es conexo (Ivorra, s.f.).

Proposición 2.28. Sea $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ aplicación continua. Si X es conexo, entonces $(f(X), \mathcal{T}_{f(X)})$ es conexo en Y (Gordillo & Navarro, 2020).

Ejemplo: Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ es conexo. Supongamos que \mathbb{R} no es conexo, entonces existen abiertos disjuntos no vacíos U y V tales que $\mathbb{R} = U \cup V$. Sea $a \in U, b \in V$ tal que $a < b$

Figura 23.

Representación de U y V en intervalos disjuntos



Consideremos $A = \{x \in U / x < b\}$ si $a_0 = \sup A$. Analizando dos casos:

i) Si $a_0 \in A \rightarrow A \subset U$. Como U es abierto, $\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(a_0) \subset U \rightarrow a_0 + \frac{\varepsilon}{2} \in U$

$a_0 + \frac{\varepsilon}{2} < b$. Entonces a_0 no es $\sup A$ ($\rightarrow \leftarrow$)

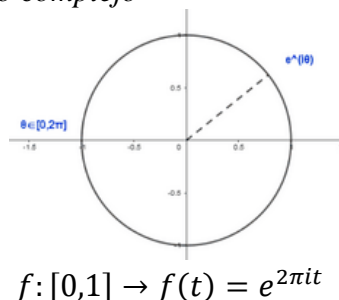
ii) Si $a_0 \notin A \rightarrow a_0 \in V$. Como V es abierto, $\exists \varepsilon > 0 / B_\varepsilon(a_0) \subset V \rightarrow a_0 - \frac{\varepsilon}{2} \in V$,

$a_0 - \frac{\varepsilon}{2} < a < a_0$ Para algún $a \in A$ ($\rightarrow \leftarrow$). Por lo tanto, \mathbb{R} es conexo.

Ejemplo: La circunferencia unitaria en el plano complejo.

Figura 24.

Circunferencia unitaria del plano complejo



Por la proposición 2.28, \mathbb{C} es conexo.

2.4. Espacios métricos

En esta sección, se define el concepto de espacio métrico, sus principales propiedades y teoremas a considerar posteriormente.

Definición 2.29. Consideremos X un conjunto no vacío y $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una aplicación.

Diremos que d es una métrica si se cumplen:

a) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.

$$d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X.$$

b) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$.

El par (X, d) se denomina espacio métrico (Atencia, 2014).

Ejemplo: Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, se define la métrica discreta d en X mediante:

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ / d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

En efecto, a) Como $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \rightarrow d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$

Además $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$.

$$b) \text{ Si } d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \rightarrow d(y, x) = \begin{cases} 1 & y \neq x \\ 0 & y = x \end{cases} \therefore d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

c) Para la desigualdad triangular se plantea:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}; \quad d(y, z) = \begin{cases} 1 & y \neq z \\ 0 & y = z \end{cases}; \quad d(x, z) = \begin{cases} 1 & x \neq z \\ 0 & x = z \end{cases}$$

Se presentan los casos:

- Caso 1: $x \neq y \neq z \rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z): 1 \leq 1 + 1 \rightarrow 1 \leq 2.$
- Caso 2: $x = y = z \rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \rightarrow 0 \leq 0.$
- Caso 3: $x \neq z \wedge x = y \wedge y \neq z \rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z): 1 \leq 0 + 1 \rightarrow 1 \leq 1.$
- Caso 4: $x = z \wedge x \neq y \wedge y \neq z \rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z): 0 \leq 1 + 1 \rightarrow 0 \leq 2.$

Por lo tanto, se verifica la desigualdad triangular.

Ejemplo: El espacio métrico (\mathbb{C}^n, d)

Sea $X = \mathbb{C}^n$, el conjunto de n-uplas en los números complejos.

Se define la aplicación $d: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^+$; $d(\bar{z}, \bar{w}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2}$

La métrica usual en los números complejos es:

$$d_u(z, w) = |z - w|, \text{ donde } z = a + ib \text{ y } w = c + id$$

$$\text{Así: } |z - w| = |(a + ib) - (c + id)| = |(a - c) + i(b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

$$\text{Donde: } \bar{z} = (a_1, a_2, \dots, a_n) + i(b_1, b_2, \dots, b_n) \wedge \bar{w} = (c_1, c_2, \dots, c_n) + i(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

$$a) \text{ Si } |z_j - w_j| \geq 0 \rightarrow |z_j - w_j|^2 \geq 0 \quad \forall z_j, w_j \in \mathbb{C} : j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Luego: } \sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2 \geq \sum_{j=1}^n 0 = 0 \rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2} \geq 0. \text{ Entonces } d(\bar{z}, \bar{w}) \geq 0$$

$$\text{De otro lado } d(\bar{z}, \bar{w}) = 0 \leftrightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2} = 0 \quad \forall z_j, w_j \in \mathbb{C} : j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Si y solo si } \sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2 = 0 \leftrightarrow |z_j - w_j|^2 = 0 \leftrightarrow |z_j - w_j| = 0 \leftrightarrow z_j - w_j = 0$$

$$\text{Si y solo si } z_j = w_j \quad \forall z_j, w_j \in \mathbb{C}.$$

$$b) d(\bar{z}, \bar{w}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |w_j - z_j|^2} = d(\bar{w}, \bar{z}) \quad \forall z_j, w_j \in \mathbb{C}.$$

c) Para demostrar la desigualdad triangular utilizaremos la desigualdad de Minkowsky, el cual

$$\text{consiste en: } \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |w_j|^2} \quad \forall z_j, w_j \in \mathbb{C} : j = 1, 2, \dots, n.$$

Según la métrica usual: $d_u(z, w) \leq d_u(z, v) + d_u(v, w) \quad \forall z, v, w \in \mathbb{C}$.

$$\text{Luego } |z_j - w_j| \leq |z_j - v_j| + |v_j - w_j| \rightarrow \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$|z_j - w_j|^2 \leq (|z_j - v_j| + |v_j - w_j|)^2 \rightarrow \sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n (|z_j - v_j| + |v_j - w_j|)^2$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n (|z_j - v_j| + |v_j - w_j|)^2} \quad \forall z_j, v_j, w_j \in \mathbb{C} : j = 1, 2, \dots, n.$$

Por la desigualdad de Minkowsky se cumple:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (|z_j - v_j| + |v_j - w_j|)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - v_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |v_j - w_j|^2}$$

$$\text{Entonces, } \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - v_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |v_j - w_j|^2}$$

Como $d(\bar{z}, \bar{w}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - w_j|^2}$, se verifica $d(\bar{z}, \bar{w}) \leq d(\bar{z}, \bar{v}) + d(\bar{v}, \bar{w}) \quad \forall \bar{z}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{C}^n$.

Definición 2.30. Sea (X, d) un espacio métrico, si $A \subset X$ se define la métrica d_A dada por:

$$d_A: A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+ / d_A(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in A.$$

El espacio métrico (A, d_A) es denominado subespacio métrico de (X, d) (Atencia, 2014).

2.5. Topología en Espacios métricos

A continuación, se presenta en esta sección las propiedades y resultados topológicos en un espacio métrico.

Definición 2.31. Sea (X, d) un espacio métrico en X ; $a \in X$ y $r > 0$, se definen

a) Bola abierta: $B_d(a, r) = \{x \in X / d(a, x) < r\}$.

b) Bola cerrada: $\bar{B}_d(a, r) = \{x \in X / d(a, x) \leq r\}$.

c) La esfera: $S(a, r) = \{x \in X / d(a, x) = r\}$ (Romero, 2016; Iribarren, 2008).

Observación. La bola abierta también es llamada vecindad de a , la cual es considerada como un subconjunto de X . Si V y V' son subconjuntos de X y $V \subset V'$ tal que V es una vecindad de a , entonces V' es vecindad de a .

Ejemplo.

Dado el espacio métrico (X, d) con $X = \mathbb{R}^2$ y $d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$

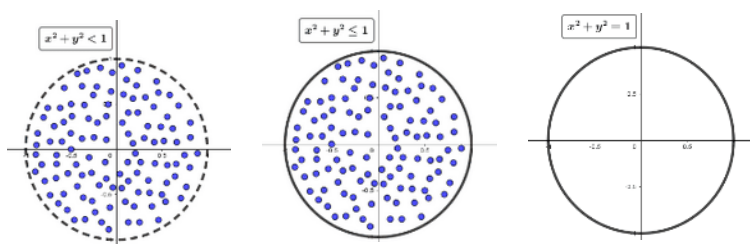
Entonces $d((x, y), (0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$B((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$; $\overline{B}((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$;

$S((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

Figura 25.

La métrica usual en \mathbb{R}^2 : $x^2 + y^2 < 1$; $x^2 + y^2 \leq 1$; $x^2 + y^2 = 1$



Definición 2.32 (Propiedad de Hausdorff). Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que (X, d) cumple la propiedad de Hausdorff si dados $x, y \in X$ tal que $x \neq y$, existen $r_x, r_y > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \emptyset$ (Herrero, 2010).

Definición 2.33. Sea (X, d) un espacio métrico y A subconjunto de X . Decimos que $x \in A$ es punto interior de A , si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. El interior de A , es el conjunto definido por $\dot{A} = \{x \in A / x \text{ es punto interior de } A\}$.

Observación. Por definición, se tiene que $\dot{A} \subset A$.

Definición 2.34. Diremos que $A \subset X$ es conjunto abierto, si todos sus puntos de A son interiores, es decir $\dot{A} = A$ (Iribarren, 2008).

Teorema 2.35. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces:

a) $B(x_0, r)$ es abierto para cada $x_0 \in X$ y $r > 0$

b) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una colección de abiertos en el espacio métrico (X, d) , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto de X .

c) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una colección finita de conjuntos abiertos del espacio métrico (X, d) , entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un conjunto abierto de X (Atencia, 2014).

Nota. Sean los conjuntos $A \subset B$, entonces, cualquier punto interior de A también es interior de B , esto es $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ (Iribarren, 2008).

Definición 2.36. Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Dado $x \in X$, decimos que x es punto de acumulación del conjunto A , si todo entorno de x contiene puntos de A distintos de x . Es decir, $\forall r > 0$ se cumple $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A es llamado el conjunto derivado de A y es denotado por A' .

Observación.

a) Los puntos que no son puntos de acumulación de A se denomina puntos aislados de A .

b) Si $A \subset B$, entonces todo punto de acumulación de A también es punto de acumulación de B , es decir $A' \subset B'$ (Iribarren, 2008).

Teorema 2.37. Sea (X, d) un espacio métrico, A subconjunto de X y $x \in X$, entonces x es punto de acumulación de A sí y solo si existe una sucesión $\{x_n\}$ en A con términos distintos dos a dos, tal que $x_n \rightarrow x$ (Grijalva, 2013).

Definición 2.38. Considérese el espacio métrico (X, d) y A subconjunto de X . Se dice que $x \in X$ es punto adherente de A , si para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. (Macho, 2014)

Observación.

a) Todos los puntos adherentes de A es llamado el conjunto clausura de A el cual es denotado por \bar{A} , de esta manera se cumple que $\bar{A} = A \cup A'$.

- b) Un punto que no es adherente de A se denomina punto exterior de A y son puntos interiores de X/A .
- c) Si $A \subset B$, entonces todos los puntos adherentes de A también son puntos adherentes de B , es decir $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Definición 2.39. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es cerrado si $A' \subseteq A$.

Observación. $\bar{A} = \{x \in X / \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\} \rightarrow A \subset \bar{A}$. Así, $A' \subset \bar{A}$ (Macho, 2014).

Teorema 2.40. Dado un espacio métrico (X, d) , $A \subseteq X$ no vacío. Entonces, $x \in \tilde{A}$ si y solo si existe $\{x_n\}$ una sucesión en A tal que $x_n \rightarrow x$ (Grijalva, 2013).

Teorema 2.41. Si (X, d) es un espacio métrico, A, B subconjuntos de X y $A \subset B \subset \tilde{A}$ tal que A es conexo, entonces B es conexo. Además, \tilde{A} es conexo (Grijalva, 2013).

Teorema 2.42. Si X_1, X_2, \dots, X_n son espacios métricos conexos, entonces el conjunto $\prod_{i=1}^n X_i$ es conexo (Grijalva, 2013).

Definición 2.43. Dado un espacio métrico (X, d) y A subconjunto de X , decimos que A es denso en X , si $\tilde{A} = X$ (Maximenko, s.f.).

Teorema 2.44. Si (X, d) es un espacio métrico y A subconjunto de X es cerrado, se verifica:

i) X/A es abierto.

ii) $\bar{A} = A$ (Grijalva, 2013).

Proposición 2.45. Sean (X, d) un espacio métrico y $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ subconjunto finito de X , entonces A es cerrado en X (Grijalva, 2013).

Teorema 2.46. Dados (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de X , entonces:

a) $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.

b) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es colección finita, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado (Atencia, 2014).

Definición 2.47. Dado un espacio métrico (X, d) y $A \subseteq X$ no vacío, decimos que A es acotado si existe $B(x, r) \subseteq X$ tal que $A \subseteq B(x, r)$.

Observación.

a) Se satisface que $\forall a \in A \rightarrow d(a, x) < r$.

b) Todo subconjunto no vacío de un conjunto acotado es acotado. Si el conjunto es acotado implica que la aplicación métrica en él, es acotada superiormente (Salazar, 2018).

2.6. Continuidad de funciones en espacios métricos

La siguiente sección, presenta el estudio de los conceptos de convergencia, continuidad, aplicaciones Lipchitzianas, distancias y diámetros entre puntos y conjuntos, los conceptos de isometría y homeomorfismo, las cuales serán aplicadas en la teoría topológica de los fractales y las funciones contractivas que se estudiarán posteriormente.

Definición 2.48. Sean (X, d) el espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X , se dice que x_n converge a $x \in X$ si y solamente si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se cumple $d(x_n, x) < \varepsilon$. La convergencia se denota por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ o $x_n \rightarrow x$ (Atencia, 2014).

Teorema 2.49. Una sucesión convergente en el espacio métrico (X, d) converge a un único punto (Atencia, 2014).

Definición 2.50. Dados los espacios métricos (X, d_X) , (Y, d_Y) y una función $f: X \rightarrow Y$, se dice que f es continua en $x \in X$, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$, tal que si $y \in B_{d_X}(x, \rho)$ entonces $f(y) \in B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$, es decir $f(B_{d_X}(x, \rho)) \subset B_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ (Daniilidis, 2020).

Teorema 2.51. Dados los espacios métricos (X, d_X) , (Y, d_Y) y una función $f: X \rightarrow Y$, con $x \in X$, entonces son equivalentes:

i) f es continua en x .

ii) Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \rightarrow x$ si $n \rightarrow \infty$ entonces $f(x_n) \rightarrow f(x)$ (Daniilidis, 2020).

Demostración.

$i) \rightarrow ii)$ Como f es continua en x por definición se tiene:

$$\text{Para } \varepsilon > 0, \text{ existe } \rho > 0 \text{ tal que } f(B(x, \rho)) \subset B(f(x), \varepsilon) \quad (2.2)$$

Por otro lado, como $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, por definición tenemos:

$$\text{Para cualquier } \rho > 0, \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x, \rho)$$

Luego aplicando f tenemos: $f(x_n) \in f(B(x, \rho)), \forall n \geq n_0$

De (2.2) obtenemos $f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon), \forall n \geq n_0$. Por tanto $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

$ii) \rightarrow i)$ Supongamos lo contrario de que f no es continua en x (h.a).

Entonces existe $\varepsilon > 0$, para todo $\rho > 0$ tal que $f(B(x, \rho)) \not\subset B(f(x), \varepsilon)$

Así, existe $y \in B(x, \rho) / f(y) \notin B(f(x), \varepsilon)$

Eligiendo $\rho_n = \frac{1}{n}$, se determina una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \in B(x, \rho_n)$ y

$f(y_n) \notin B(f(x), \varepsilon)$. Luego $y_n \rightarrow x$ pero $f(y_n) \not\rightarrow f(x)$, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, f es continua en x .

Teorema 2.52. Consideremos los espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) . Entonces $f: X \rightarrow Y$ es continua en X si y solo si $f^{-1}(G)$ es abierto en X para cualquier abierto G en Y (Macho, 2008).

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $a \in f^{-1}(G) \Rightarrow f(a) \in f(f^{-1}(G)) \Rightarrow f(a) \in G$. Como G es abierto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(a), \varepsilon) \subset G$. (2.3)

Como f es continua en X , en particular f es continua en a , se tiene que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que $f(B(a, \rho)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

De (2.3) se obtiene $f(B(a, \rho)) \subset G \Rightarrow f^{-1}(f(B(a, \rho))) \subset f^{-1}(G) \Rightarrow B(a, \rho) \subset f^{-1}(G)$

En consecuencia, a es punto interior de $f^{-1}(G)$. Por lo cual $f^{-1}(G)$ es abierto en X .

(\Leftarrow) Sea $a \in X$, dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $B(f(a), \varepsilon)$ es abierto en Y . Así por hipótesis

$f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ es abierto en X . Como $a \in f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ existe $\rho > 0$ tal que

$B(a, \rho) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, aplicando f obtenemos

$$f(B(a, \rho)) \subset f(f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))) \Rightarrow f(B(a, \rho)) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

Por lo tanto, siendo $a \in X$ arbitrario, se concluye que f es continua en X .

Teorema 2.53. Dados $(X, d_x), (Y, d_y)$ espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces si X es conexo se tiene que Y es conexo (Grijalva, 2013).

Definición 2.54. Dados los espacios métricos $(X, d_1), (Y, d_2)$ y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación.

Decimos que f es Lipschitz si existe $K > 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) \leq K d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X$ (Daniilidis, 2020).

Definición 2.55. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ no vacío. Dado $x \in X$, definimos la función distancia de x hacia A por $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ (Daniilidis, 2020).

Observación. La función $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es continua en (X, d) . En efecto,

Sean $x, y \in X$ y $\forall a \in A$, se cumple: $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

Se sigue que, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a) \rightarrow d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$

Luego, $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A) \rightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ (2.4)

Por otro lado, $d(y, A) \leq d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) \rightarrow d(y, A) - d(y, x) \leq d(x, a)$

Luego, $d(y, A) - d(y, x) \leq d(x, A) \rightarrow d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x)$

Así, $d(x, A) - d(y, A) \geq -d(x, y)$ (2.5)

De (2.4) y (2.5) tenemos $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Así la aplicación es Lipschitz y en consecuencia $d(x, A)$ es continua.

Definición 2.56. Dado el espacio métrico (X, d) y $A, B \subseteq X$ no vacíos. Definimos la distancia entre A y B como $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$.

Definición 2.57. Consideremos el espacio métrico (X, d) y $A \subset X$ subconjunto acotado, se define el diámetro del conjunto por $diam(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$ (Herrero, 2010).

Observación. Si el conjunto A no es acotado carece de diámetro.

Definición 2.58. Sean dos espacios métricos $(X, d_x), (Y, d_y)$ y $f: X \rightarrow Y$, una función biyectiva, decimos que X e Y son homeomorfos, si las funciones f y f^{-1} son continuas (Grijalva, 2013).

Observación.

a) Un homeomorfismo entre X e Y se representa por $X \cong Y$

b) Los homeomorfismos preservan propiedades topológicas, por ejemplo:

Un conjunto $A \subset X$ abierto si y solo si $f(A)$ es abierto. Además, $B \subset X$ es cerrado si y solo si $f(B)$ es cerrado.

Definición 2.59. Dados dos espacios métricos (X, d_x) e (Y, d_y) y $f: X \rightarrow Y$ una función, diremos que f es isometría si $d_x(x, y) = d_y(f(x), f(y))$ para todo $x, y \in X$.

(Grijalva, 2013).

Observación. Para una isometría la distancia entre los puntos se conserva en los dos espacios métricos diferentes. El tamaño y la forma de las figuras no cambian, solo su posición u orientación.

La isometría tiene dos tipos: isometría directa, conserva la orientación en el plano, entre los cuales destacan la rotación, traslación, mientras que una isometría indirecta, invierte la orientación en el plano como la reflexión.

Teorema 2.60. Consideremos los espacios métricos $(X, d_x), (Y, d_y)$. Si X es isométrico a Y bajo la función $f: X \rightarrow Y$, entonces f es un homeomorfismo (Grijalva, 2013).

2.7. Espacio métrico completo

La sección estudiara los conceptos vinculados a la completitud de un espacio métrico, los cuales son fundamentales en el análisis topológico de los fractales.

Definición 2.61. Sea (X, d) un espacio métrico y la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$.

Decimos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se satisface $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ (Sabogal & Arenas, 2011).

Nota. Los términos entre x_n y x_m se acercan entre si, de manera que no existe necesariamente un punto de convergencia.

Teorema 2.62. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Entonces se verifican: (Herrero, 2010)

i) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces es una sucesión de Cauchy.

ii) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy entonces es acotada.

Demostración.

i) Supongamos que $x_n \rightarrow x$. Para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Luego, si $n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Por lo tanto, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

ii) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, considerando $\varepsilon = 1$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}/n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < 1$. Como $m \geq n_0 \Rightarrow d(x_{n_0}, x_m) < 1$.

Por otra parte, tenemos $d_i = d(x_{n_0}, x_i)$, donde $x_i = x_1, \dots, x_{n_0-1}$

Si $r = \max\{d_i, 1\}$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(x_{n_0}, r) \forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Teorema 2.63. Considérese el espacio métrico (X, d) y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X , si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente en X , entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente hacia el mismo punto de convergencia de la subsucesión (Grijalva, 2013).

Definición 2.64. Decimos que un espacio métrico (X, d) es completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente en X (Macho, 2008).

Ejemplo: Sea el espacio métrico (X, d_u) donde $X = \mathbb{R}$. Si una sucesión de Cauchy

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/si n, m \geq n_0 \rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Así, $0 \leq |x_n - x_m| < \varepsilon$

Ejemplo: El espacio métrico discreto (X, d_{disc})

Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, se define la métrica discreta en X mediante:

$$d_{disc}: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ / d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

La caracterización de una sucesión de Cauchy es $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset X \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0$

$d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Si $x_n \neq x_m \rightarrow d(x_n, x_m) = 1 < \varepsilon$ (F); $x_n = x_m \rightarrow d(x_n, x_m) = 0 < \varepsilon$.

Por consiguiente $x_n = x_m \rightarrow \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} = x$ es una constante.

Por lo tanto, $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces todo espacio métrico discreto es completo.

Teorema 2.65. Si toda sucesión de Cauchy posee una subsucesión convergente, entonces (X, d) es un espacio métrico completo (Herrero, 2010).

Demostración.

Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$

tal que si $n, m \geq n_1 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$

Por hipótesis, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un punto x es decir

$x_{n_k} \rightarrow x$, entonces existe $n_2 \in \mathbb{N} / n_k \geq n_2 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\} > 0$, si $n \geq n_0 \Rightarrow n, n_k \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}$

$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$.

Por lo tanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x , en consecuencia, X es un espacio métrico completo.

Teorema 2.66. Dado un espacio métrico (X, d) , si $J \subset X$ y el subespacio (J, d_J) es completo, entonces J es cerrado en X (Herrero, 2010).

Demostración. Veamos que $J = \bar{J}$. En efecto, por definición $J \subset \bar{J}$

Por otro lado, si $x \in \bar{J} \rightarrow \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset J / x_n \rightarrow x$, como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (J, d_J) por ser completo, existe x' tal que $x_n \rightarrow x'$. Así, por la unicidad de límite se tiene que $x = x'$. Por lo tanto $x \in J \rightarrow \bar{J} \subset J$.

Proposición 2.67. Consideremos un espacio métrico completo (X, d) y $A \subset X$ subconjunto cerrado en X entonces A es completo (Grijalva, 2013).

2.8. Compacidad en Espacios Métricos

Describimos en la sección, las nociones de compacidad, precompacidad, compacidad secuencia y la acotación total, los cuales intervienen en las características y principales propiedades de los fractales.

Definición 2.68. Consideremos (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Una familia de subconjuntos no vacíos $\{A_i\}_{i \in I} \subset X$ es un cubrimiento de A , si $A \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ (Macho, 2008).

Observación. Si A_i es abierto $\forall i \in I$, decimos que $\{A_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto.

Ejemplo: Sea $A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{2,3,4\}, A_3 = \{4,5,6,7\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 5\}$.

De manera que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3,4,5,6,7\}, B = \{1,2,3,4,5\}$

Luego $B \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup_{i=1}^3 A_i \therefore B \subset \bigcup_{i=1}^3 A_i$: cubrimiento de B .

Ejemplo: Sea $X =]0,1[$ y la familia de conjuntos $A_i = \left] \frac{1}{n}, 1[: n \geq 2, n \in \mathbb{N} \right\}$ es un cubrimiento por abiertos de X .

Definición 2.69. Consideremos (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de $A \subseteq X$, si J es finito entonces $\{A_i\}_{i \in J}$ es llamado cubrimiento finito. Cuando $A \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$ y $J \subseteq I$ decimos que $\{A_i\}_{i \in J}$ es un subcubrimiento finito (Macho, 2008).

Definición 2.70. Dado un espacio métrico (X, d) decimos que un subconjunto $A \subset X$ es compacto, si dado un cubrimiento abierto $\{A_i\}_{i \in I}$ de A existe un subcubrimiento finito $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ (Daniilidis, 2020).

Definición 2.71. Sea (X, d) un espacio métrico y A subconjunto de X . Se dice que A es precompacto, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$ (Grijalva, 2013).

Teorema 2.72. Consideremos (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ subconjunto compacto entonces A es precompacto y acotado (Grijalva, 2013).

Demostración. Como A es compacto, para la familia $\mathcal{F} = \{B(a, \varepsilon) : a \in A, \varepsilon > 0\}$ el cual es cubrimiento abierto de A , existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(a_k, \varepsilon)$

Por lo tanto, A es precompacto.

A es acotado. En efecto, sea $\varepsilon = 1$, se tiene que $A \subset \bigcup_{k=1}^n B(a_k, 1)$, así dados $x, y \in A$, existen $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in B(a_i, 1)$, $y \in B(a_j, 1)$. Luego, por la desigualdad triangular

$$\text{tenemos } d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, y) < 2 + g$$

donde $g = \max\{d(a_m, a_k) : m, k \in \{1, \dots, n\}\}$, Así, $d(x, y) < 2 + g$, para todo $x, y \in A$

Por tanto $2 + g$ es una cota superior del conjunto $\{d(x, y) : x, y \in A\}$ mostrando el resultado.

Teorema 2.73. Dado (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$.

i) Si X es compacto y K cerrado, entonces K es compacto.

ii) Si K es compacto entonces es cerrado y acotado (Herrero, 2010).

Demostración.

i) Sea $\{K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento abierto de K en X , es decir $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha$

Como K es cerrado, entonces X/K es abierto en X .

$$\text{Luego } X = K \cup (X/K) \subset \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha \cup (X/K)$$

Desde que X es compacto existe un subcubrimiento finito $\{K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, K_{\alpha_3}, \dots, K_{\alpha_n}\}$ tal que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i} \cup (X/K). \text{ Luego } X \cap K \subset (\bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i} \cup (X/K)) \cap K, \text{ entonces}$$

$$K \subset (\bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i} \cap K) \cup ((X/K) \cap K) \Rightarrow K \subset (\bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i} \cap K) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i}$$

Por lo tanto K es compacto.

ii) Por definición $K \subset \bar{K}$. Veamos que $\bar{K} \subset K$, sea $x \in \bar{K}$ y supongamos que $x \notin K$ (h.a).

Así, para cada punto $y \in K$ entonces $x \neq y$

Para $\varepsilon_y > 0$ existen vecindades abiertas de x e y tal que $B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, \varepsilon_y) = \emptyset$

Entonces la familia $\{B(y, \varepsilon_y)\}_{y \in K}$ es un cubrimiento abierto de K , como K es compacto, se puede extraer un subcubrimiento finito $\{B(y_1, \varepsilon_{y_1}), B(y_2, \varepsilon_{y_2}), \dots, B(y_n, \varepsilon_{y_n})\}$ para cada $y_1, y_2, \dots, y_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon_{y_i})$

Por otro lado, sea $\{B(x_1, \varepsilon_{y_1}), B(x_2, \varepsilon_{y_2}), \dots, B(x_n, \varepsilon_{y_n})\}$ una familia de vecindades abiertas de X . Luego $B(x, r) = \bigcap_{i=1}^n B(x, \varepsilon_{y_i})$, donde $r = \min\{\varepsilon_{y_i}/i = 1, 2, \dots, n\}$

Entonces $B(x, r)$ es un abierto en X . Luego $B(x, r) \cap K \subset \bigcap_{i=1}^n B(x, \varepsilon_{y_i}) \cap \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon_{y_i})$

Pues $B(x_i, \varepsilon_{y_i}) \cap B(y_i, \varepsilon_{y_i}) = \emptyset, \forall i = 1, 2, \dots, n$, entonces $B(x, r) \cap K = \emptyset \implies x \notin \overline{K} (\rightarrow \leftarrow)$

De esta forma, K es cerrado.

Veamos que K es acotado. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, para el cubrimiento abierto $\{B(x, \varepsilon)\}_{x \in K}$ existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$.

Afirmación 1: $B = B(x_i, \varepsilon)$ es acotada para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

Sean $x, y \in B$ entonces $d(x, x_i) < \varepsilon$ y $d(y, x_i) < \varepsilon$. Así $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) < 2\varepsilon$

Tomando supremo tenemos $\sup\{d(x, y)/x, y \in B\} \leq 2\varepsilon$.

En consecuencia, $\text{diam}(B) \leq 2\varepsilon, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Por tanto $B = B(x_i, \varepsilon)$ es acotada.

Afirmación 2: $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ es acotada. En efecto, sean $x, y \in \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$, existen

$x_{i_1}, x_{i_2} \in X$ tal que $x \in B(x_{i_1}, \varepsilon)$ e $y \in B(x_{i_2}, \varepsilon)$. Como x_{i_1}, x_{i_2} son elementos arbitrarios de X , por la desigualdad triangular se tiene $d(x_{i_1}, x_{i_2}) \leq d(x_{i_1}, x_1) + \dots + d(x_n, x_{i_2})$

Considerando $w = \max\{d(x_i, x_j) / 1 \leq i, j \leq n\}$.

Se tiene $d(x_{i_1}, x_{i_2}) < \varepsilon + nw + \varepsilon = 2\varepsilon + nw$.

Luego $d(x, y) \leq d(x, x_{i_1}) + d(x_{i_1}, x_{i_2}) + d(x_{i_2}, y) \leq 4\varepsilon + nw = N$.

Aplicando supremo tenemos, $\sup\{d(x, y)/x, y \in \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_i)\} \leq N$, entonces

$\text{diam}(\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_i)) \leq N$, con lo cual $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_i)$ es acotada.

Luego $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_i)$, se concluye que K es acotado.

Por lo tanto K es cerrado y acotado.

Teorema 2.74. (Compacidad del espacio producto) Supongamos que X_1, X_2, \dots, X_n son espacios métricos compactos, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es compacto (Grijalva, 2013).

Teorema 2.75. Sean (X, d_x) e (Y, d_y) dos espacios métricos y $f: X \rightarrow Y$ una función continua, si X es compacto entonces $f(X)$ es compacto (Grijalva, 2013).

Definición 2.76. Dado un espacio métrico (X, d) y $K \subset X$, decimos que K es secuencialmente compacto, si toda sucesión en K , admite una subsucesión convergente en K . (Herrero, 2010).

Teorema 2.77. Dado el espacio métrico (X, d) . Entonces $K \subset X$ es secuencialmente compacto si y solo si K es compacto.

Teorema 2.78. Sea (X, d) , un espacio métrico y $K \subset X$ es secuencialmente compacto entonces K es precompacto.

Teorema 2.79. Un espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si X es precompacto y completo (Grijalva, 2013).

Demostración. Sea X compacto, por el teorema 2.77, se sigue que X es secuencialmente compacto y por el teorema 2.78, X es precompacto. Veamos que X es completo.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Como X es secuencialmente compacto, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente a algún punto $x \in X$. Por el teorema 2.63, el punto límite de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es x ; así, por el teorema 2.65, X es completo.

Por demostrar que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión finita, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente.

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión infinita y X es precompacto, entonces existe una sucesión finita de bolas abiertas de radio 1 que cubre X . Sea B_1 alguna de estas bolas que tiene un número infinito de términos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se sigue que B_1 es precompacto, entonces existe una bola B_2 de radio $\frac{1}{2}$ que contiene un número infinito de términos de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenidos en B_1 .

Así, se construye la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}} \in B_i, i = 1, 2, \dots, k$.

Veamos que $\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $K > \frac{2}{\varepsilon}$, para todo $k \geq K$,

$x_{n_k} \in N_K$, donde N_K es una bola de centro y y con radio $\frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces si $k, l \geq K$,

$x_{n_k}, x_{n_l} \in N_K$ y $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, y) + d(y, x_{n_l}) < \frac{1}{K} + \frac{1}{K} = \frac{2}{K} < \varepsilon$. De esta forma,

$\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, como X es completo la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es

convergente. Por lo tanto, X es secuencialmente compacto y por el teorema 2.77, se concluye que X es compacto.

Definición 2.80. Consideremos (X, d) un espacio métrico y $T \subset X$. Decimos que T es totalmente acotado, si para todo $r > 0$ existe un conjunto finito de puntos $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$ tal que $T \subset B(x_1, r) \cup B(x_2, r) \cup \dots \cup B(x_n, r)$ (Herrero, 2010).

Teorema 2.81. Sea (X, d) el espacio métrico y $T \subset X$. Si T es compacto entonces T es totalmente acotado (Herrero, 2010).

Proposición 2.82. Consideremos el espacio métrico (X, d) y $K \subset X$. Si K es secuencialmente compacto entonces K es totalmente acotado y completo (Maximenko, s.f.).

Demostración. Supongamos que K no es totalmente acotado (h.a).

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$, existe $r > 0$ tal que $K \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, r)$,

Si $x_1 \in K$, entonces existe $x_2 \in K$ tal que $d(x_1, x_2) \geq r$, luego existe $x_3 \in K$ tal que

$d(x_1, x_3) \geq r$ y $d(x_2, x_3) \geq r$, de manera que tenemos una sucesión $\{x_k\} \in K$ tal que

Si $n \neq m$ entonces $d(x_n, x_m) \geq r$. Por otro lado, como K es secuencialmente compacto,

existe una subsucesión $\{x_{k_j}\}$ de $\{x_k\}$ convergente en K es decir dado $\frac{r}{2} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal

que si $j \geq N$, entonces $d(x_{k_j}, a) < \frac{r}{2}$, donde $a \in K$

Sean $i, j \geq N$ tal que $i \neq j$, entonces $d(x_{k_j}, x_{k_i}) \leq d(x_{k_j}, a) + d(a, x_{k_i}) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

Esto contradice la sucesión $\{x_k\}$ de la forma que fue construida.

Por tanto K es totalmente acotado, es decir cada sucesión en K tiene una subsucesión convergente y por tanto es de Cauchy de manera que K es completo.

2.9. Funciones de variable compleja

Introducimos en esta sección, las definiciones de función de variables compleja, límite de una función de variable compleja y continuidad, puesto que los fractales se pueden desarrollar mediante funciones complejas.

Definición 2.83. Sean $D, W \subset \mathbb{C}$. Una función de variable compleja es una aplicación $f: D \rightarrow W$. Además, se definen:

$$a) \text{Dom}(f) = \{z \in \mathbb{C} / f(z) = w\} \text{ Donde } z = x + iy \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$b) \text{Im}(f) = \{w \in \mathbb{C} / \exists z \in D, f(z) = w\} \text{ Donde } w = u + iv \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Observación.

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ siendo } \text{Re}(f(z)) = u(x, y) \text{ e } \text{Im}(f(z)) = v(x, y).$$

Se definen el módulo de z por $\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y de $f(z)$ por

$$\|f(z)\| = \sqrt{\text{Re}(f(z))^2 + \text{Im}(f(z))^2} \text{ (Pérez, 2004).}$$

Ejemplo: Si $f(z) = z^2 - zi$, hallar $\text{Re}(f(z))$ y $\text{Im}(f(z))$.

$$\text{Sea } z = x + iy \rightarrow f(x + iy) = (x + iy)^2 - (x + iy)i = x^2 + 2xyi - y^2 - xi + y$$

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy - x) \Rightarrow \text{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 + y,$$

$$\text{Im}(f(z)) = 2xy - x.$$

Definición 2.84. Sea $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$, una función de variable compleja, $z \in \text{Dom}(f)$

y $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D . Se dice que $L \in \mathbb{C}$ es el límite de $f(z)$ cuando z se aproxima a z_0 si se cumple,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{si } 0 < \|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \|f(z) - L\| < \varepsilon$$

(Espinoza, 2008).

Observación. En términos topológicos el límite de la función es:

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B(z_0, \delta)$ entonces $f(z) \in B(L, \varepsilon)$

Teorema 2.85. Consideremos la función $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$ de la forma

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i, \text{ Donde } z = x + yi, z_0 = x_0 + y_0i, w_0 = u_0(x_0, y_0) + v_0(x_0, y_0)i,$$

$$\text{entonces } \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ y}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0 \text{ (Espinoza, 2008).}$$

Nota. Si el $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, si y solo si, $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y)$ y $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y)$

$$\text{Ejemplo: Sea } f(z) = \frac{z^2+1}{z+i}, \text{ mediante la definición de límite, probar: } \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2+1}{z+i} = -2i$$

$$\text{Solución. El } \operatorname{Dom}(f) = \mathbb{C} - \{-i\}, \text{ evaluando el } \lim_{z \rightarrow -i} f(z) = f(-i) = \frac{(-i)^2+1}{-i+i} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital tenemos: $f(z) = 2z \rightarrow f(-i) = -2i$.

Ahora, por la definición de límite, se tiene

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2+1}{z+i} = -2i \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \text{si } 0 < \|z + i\| < \delta \rightarrow \|f(z) + 2i\| < \varepsilon.$$

Además,

$$\|f(z) + 2i\| = \left\| \frac{z^2+1}{z+i} + 2i \right\| = \left\| \frac{z^2+1+2zi-2}{z+i} \right\| = \left\| \frac{z^2+2zi-1}{z+i} \right\| = \left\| \frac{(z+i)^2}{z+i} \right\| = \|z + i\| < \delta$$

En consecuencia, $\|f(z) + 2i\| < \delta = \varepsilon$

Definición 2.86. Una función de variable compleja $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$ es continua en $z_0 \in D$

si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|z - z_0\| < \delta \Rightarrow \|f(z) - f(z_0)\| < \varepsilon$ (Pérez, 2004).

Observación. Por la definición de continuidad se deben cumplir las siguientes condiciones:

i) Existe $f(z_0) \in \mathbb{C}$, es decir $f(z_0) \neq \infty$

ii) Existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

iii) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ (Churchill y Ward, 2004).

Definición 2.87. Una función $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se denomina uniformemente continua en D si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $z_1, z_2 \in D \Rightarrow \|f(z_1) - f(z_2)\| < \varepsilon$ siempre que

$\|z_1 - z_2\| < \delta$ (Spiegel et al., 2011).

Teorema 2.88. Dada una función continua $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Si D es compacto entonces f es uniformemente continua en D (Suarez, 2021).

2.10. Derivación de funciones de variable compleja

En la sección, presentamos los conceptos de derivabilidad de una función compleja en un punto, las ecuaciones de Cauchy Riemann y de funciones holomorfas, los cuales permitirán comprender la generación de fractales en el plano complejo.

Definición 2.89. Sea $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja y $z_0 \in \text{Dom}(f)$. Se dice que f es derivable en el punto z_0 si el limite $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe (Cruz, 2017).

Observación.

a) Si $h = z - z_0 \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$.

b) Otra notación para la derivada es $\frac{df(z_0)}{dz}$.

c) Si $f(z)$ es derivable en z_0 entonces f es continua en z_0 . Además, si $f(z)$ es continua en z_0 , no se garantiza que $f(z)$ sea derivable en dicho punto (Cruz, 2017).

Ejemplo: Analizar si $f(z) = \frac{\text{Re}(z)}{2 + \|z\|}$ es derivable en $z = 0$

Solución: Por demostrar que f es continua en $z = 0$.

$$\text{Sea } z = x + iy \Rightarrow \text{Re}(z) = x, \text{Im}(z) = y \wedge \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Luego } f(z) = \frac{x}{2 + \sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$\text{Por otro lado: } \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2 + \sqrt{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + x}$$

$$\text{Entonces } \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0 \quad \therefore f \text{ es continua en } z = 0.$$

$$\text{Veamos si } f \text{ es derivable en } z_0 = 0 \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

$$\text{Luego } f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{Re}(z)}{z(2 + \|z\|)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{Re}(z)}{z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \|z\|}.$$

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z} \cdot \frac{1}{2}, \text{ luego } \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+iy} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x-iy)}{x^2+y^2}.$$

$$\text{Entonces } \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x-iy)}{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \frac{1}{2} \text{ y } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-iy)}{x^2+y^2} \right) = 0.$$

Por tanto f no es derivable en $z = 0$.

Definición 2.90. Sea la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Si f es derivable en $z_0 \in \operatorname{Dom}(f)$ entonces las ecuaciones de Cauchy Riemann en $z_0 = (x_0, y_0)$ son las

$$\text{definidas por: } \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0); \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(Churchill & Ward, 2004).

Nota. El valor de la derivada en z_0 , se define por:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

Ejemplo: Sea $f(z) = \bar{z} + iz$, probar si f es derivable en algún punto de su dominio.

Solución. Se observa que el $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{C}$, $z = x + iy \rightarrow f(z) = x - iy + i(x + iy)$

Luego, $f(z) = x - y + i(x - y) \rightarrow u(x, y) = x - y, v(x, y) = x - y$

Las derivadas parciales, son: $u_x = 1, u_y = -1; v_x = 1, v_y = -1$

Ahora veamos si cumple las ecuaciones de Cauchy Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x, y); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Entonces $f(z)$ no satisface las ecuaciones de Cauchy Riemann en ningún punto $z \in \mathbb{C}$.

En consecuencia $f(z)$ no es derivable.

Definición 2.91. Dada la función $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow W$ y $z_0 \in \operatorname{Dom}(f)$. Decimos que f es holomorfa en z_0 si existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subset D$ y f es derivable para todo $z \in B(z_0, r)$ (Cruz, 2017).

Teorema 2.92. Si $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja y $f = u + iv$ entonces son equivalentes:

a) f es holomorfa en D .

b) Las funciones u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann en D y sus derivadas

parciales son continuas, es decir $u, v \in \mathbb{C}^1(D)$ (Espinoza, 2008).

Ejemplo: Sea $f(z) = \|z\|^2 \bar{z}$, analizar si f es holomorfa en su dominio.

Solución: Si $z = x + iy \rightarrow \|z\|^2 = x^2 + y^2, \bar{z} = x - iy$

Luego, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 + y^2)(x - iy) = x^3 + xy^2 + i(-x^2y - y^3)$

Así, $u(x, y) = x^3 + xy^2$ y $v(x, y) = -x^2y - y^3$

Como $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2, \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2xy; \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2xy, \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -x^2 - 3y^2$

En consecuencia, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \neq \frac{\partial v}{\partial y}(x, y); \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$

Por lo tanto, $f(z)$ no es holomorfa en D .

2.11. Sucesiones de funciones de variable compleja

En la presente sección, se desarrollarán los conceptos de sucesión de funciones complejas, la convergencia puntual y uniforme, la acotación de tipo puntual y uniforme y las condiciones de equicontinuidad y de ser normal, los cuales se relacionan con la teoría fractal como, por ejemplo, el conjunto de Julia.

Definición 2.93. Una sucesión de funciones complejas se define como $f_n: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donde el n -ésimo término de la sucesión es dado por $f(n) = f_n(z) = u_n(z) + iv_n(z)$ donde $u_n(z)$ y $v_n(z)$ son funciones de variable compleja definidas en D .

Definición 2.94. Una sucesión de funciones complejas $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dirá acotada si existe $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $\|f_n\| = \sup_{x \in D} \|f_n(x)\|$ (Espinoza, 2008).

Definición 2.95. Dada una familia de funciones complejas \mathcal{F} definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, se dice que \mathcal{F} es puntualmente acotada si para cada $z \in D$ se cumple

$\sup\{\|f(z)\|: f \in \mathcal{F}\} < \infty$, es decir, dado $z \in D$ existe una constante $M_z > 0$ tal que

$$\|f(z)\| \leq M_z \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Definición 2.96. Decimos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es puntualmente acotada en un conjunto abierto D si y solo si existe una función positiva $\varphi: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\|f_n(z)\| \leq \varphi(z), \forall z \in D, \forall n \in \mathbb{N}$

(Quintana, 2022).

Definición 2.97. Sea $\mathcal{F} = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de funciones complejas definida en un conjunto $K \subset \mathbb{C}$, donde $\varphi_\alpha: K \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Decimos que:

a) \mathcal{F} es uniformemente acotada en K compacto, si existe un número $M > 0$ tal que

$$\|\varphi_\alpha(z)\| < M, \quad \forall z \in K, y \forall \alpha \in J.$$

b) \mathcal{F} es equicontinua en K si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que para todo

$$z_1, z_2 \in K \text{ tal que } \|z_1 - z_2\| < \rho \Rightarrow \|\varphi_\alpha(z_1) - \varphi_\alpha(z_2)\| < \varepsilon, \quad \forall \varphi_\alpha \in \mathcal{F}.$$

Definición 2.98. Consideremos $f_n: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones complejas, diremos que $\{f_n\}$ es puntualmente convergente a una función f en D si para cada $z \in D$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(z) - f(z)\| < \varepsilon$.

Definición 2.99. Dada una sucesión de funciones complejas $f_n: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f_n converge uniformemente a una función f en D si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n(z) - f(z)\| < \varepsilon, \quad \forall z \in D$.

Definición 2.100. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y \mathcal{F} una familia de funciones holomorfas en A . Decimos que \mathcal{F} es una familia normal en A , si para cada $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ que converge uniformemente a una función f en cada subconjunto compacto de A (Quintana, 2022).

2.12. Singularidades

En la sección, mencionamos a los puntos singulares y sus principales propiedades.

Definición 2.101. Sean $f: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in D$. Decimos que z_0 es un punto singular de f si f no es holomorfa en z_0 (Cruz, 2017).

Definición 2.102. Una función $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow W \subset \mathbb{C}$, presenta una singularidad aislada en $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ si existe $r > 0$ tal que f es holomorfa en $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Existen tres tipos de singularidades:

- a) Singularidad Removible: Un punto singular z_0 es removible si existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$
- b) Polos: El punto singular z_0 es un polo de f si existe $n \in \mathbb{Z}^+ / \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = a$, con $a \neq 0$. En tal caso, se dice que z_0 es un polo de orden n . Si $n = 1$, es llamado polo simple.
- c) Singularidad esencial: Un punto singular z_0 , que no es removible ni polo es llamado singularidad esencial (Cruz, 2017).

Ejemplo: $f(z) = \frac{z+3}{(z-2)^3(z-5)^2(z-3)}$: es polo de orden 3 en $z = 2$, de orden 2 si $z = 5$ y polo simple si $z = 3$.

2.13. Teorema del punto fijo de Banach

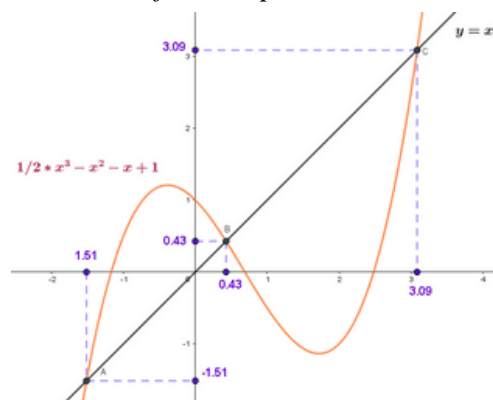
En esta sección, abordaremos una breve introducción a la teoría del punto fijo en espacios métricos, mostrando algunas características y consecuencias del comportamiento de las iteraciones de punto fijo. Este análisis permitirá comprender el concepto de aplicaciones contractivas utilizadas en la teoría de los fractales.

Definición 2.103. Consideremos un espacio métrico (X, d) con $X \neq \emptyset$ y $f: X \rightarrow X$ una aplicación. Dado $x \in X$, diremos que x punto fijo de f si $f(x) = x$ (Atencia, 2014).

El conjunto de puntos fijos está definido como $Fix(f) = \{x \in X: f(x) = x\}$ (Loayza, 2006).

Figura 26.

La recta identidad interceptada con la función polinómica cubica, obtenemos tres puntos fijos



Ejemplo: La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$ presenta tres puntos fijos $x = 1$, $x = 0$ y $x = -1$.

Teorema 2.104. Sea $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Si existe un número k con $0 < k < 1$ tal que $|f'(x)| \leq k, \forall x \in]a, b[$, entonces f posee un único punto fijo en $[a, b]$ (Muto, 2011).

Demostración. Como $f(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, tenemos $a \leq f(a) \leq b$, $a \leq f(b) \leq b$. Definamos $h(x) = f(x) - x \rightarrow h(a) = f(a) - a \geq 0, h(b) = f(b) - b \leq 0$. Si $h(a) = 0, h(b) = 0 \rightarrow a, b$ son puntos fijos. Por otro lado, si, $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$ Entonces $h(a) = f(a) - a > 0 \wedge h(b) = f(b) - b < 0$, por tanto $h(a)h(b) < 0$. Como h es continua, por el teorema de Bolzano, $\exists c \in]a, b[$ tal que $h(c) = 0$. Así tenemos $f(c) - c = 0 \rightarrow f(c) = c$. Por lo tanto c es punto fijo de f .

Veamos la unicidad. Supongamos que existen dos puntos fijos $p \neq q$ en $[a, b]$ con $f(p) = p$ y $f(q) = q$, entonces $|p - q| = |f(p) - f(q)|$. Por el teorema del valor medio existe $c \in]a, b[$ tal que $f(p) - f(q) = f'(c)(p - q) \rightarrow |f(p) - f(q)| = |f'(c)||p - q| \leq k|p - q|$, $0 < k < 1$. Luego $|p - q| < k|p - q|$ y por transitividad se obtiene $|p - q| < |p - q|$ ($\Rightarrow \Leftarrow$). En consecuencia, $p = q$.

Definición 2.105. Dados los espacios métricos $(X, d_x), (Y, d_y)$, decimos que la función $f: X \rightarrow Y$ es una contracción si existe una constante $\alpha \in (0, 1)$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple $d_y(f(x), f(y)) \leq \alpha d_x(x, y)$. La constante α se denomina factor de contracción de f (Atencia, 2014).

Nota. Obsérvese que, por la definición, la razón $\frac{d_y(f(y), f(x))}{d_x(x, y)}$ es menor a 1 (Loayza, 2006).

Ejemplo: Si $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^2}{4} \rightarrow |f(x) - f(y)| = \left| \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} \right| = \left| \frac{1}{4}(x^2 - y^2) \right|$

Luego $|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{4}(x + y)(x - y) \right|$. Como $x, y \in]0, 1[\rightarrow 0 < x + y < 2$,

Así, $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}|x - y|$, con lo cual f es una contracción con factor de contracción $\frac{1}{2}$.

Proposición 2.106. Si (X, d) es un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ es una contracción, entonces f es continua (Sabogal y Arenas, 2011).

Demostración. Como f es una contracción, existe α con $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in X. \text{ Sea } \varepsilon > 0, \text{ considerando } \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha} > 0 \text{ y}$$

$$d(x, y) < \delta \rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha \delta = \varepsilon. \text{ Por lo tanto } f \text{ es continua.}$$

Definición 2.107. Consideremos un espacio métrico (X, d) y una sucesión $\{x_n\} \subset X$.

Decimos que $\{x_n\}$ es una sucesión contractiva, si existe $\alpha \in]0, 1[$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}), \forall n \geq 2$$

(Manayay & Tesén, 2015)

Proposición 2.108. (Propiedad de contracción)

Sean (X, d) un espacio métrico y $\{x_n\}$ una contracción. Entonces:

$$i) d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) \forall n \geq 2.$$

$$ii) \text{ Si } m > n \text{ entonces } d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) \forall m > n \text{ (Manayay \& Tesén, 2015).}$$

Demostración. Procediendo por inducción sobre n .

$$i) \text{ Para } n = 2 \rightarrow d(x_3, x_2) \leq \alpha d(x_2, x_1).$$

Supongamos que para n es válida la desigualdad.

$$\text{Para } n + 1, \text{ se tiene } d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_2, x_1) \quad (2.6)$$

Por hipótesis tenemos $d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n+1}, x_n)$. Luego por hipótesis inductiva se consigue $\alpha d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) = \alpha^n d(x_2, x_1)$

En consecuencia, $d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_2, x_1)$, verificando la desigualdad (2.6).

$$\text{Así, } d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) \forall n \geq 2$$

ii) Supongamos que $m > n$, entonces por desigualdad triangular tenemos:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n)$$

Luego, por el inciso i) tenemos,

$$d(x_m, x_{m-1}) \leq \alpha^{m-2} d(x_2, x_1); \dots; d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1)$$

$$\text{Así, } d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{m-2} d(x_2, x_1) + \dots + \alpha^{n-1} d(x_2, x_1)$$

Por transitividad obtenemos $d(x_m, x_n) \leq \alpha^{m-2}d(x_2, x_1) + \dots + \alpha^{n-1}d(x_2, x_1)$

Luego, $d(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-2} + \dots + \alpha^{n-1})d(x_2, x_1)$

$$\leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1})d(x_2, x_1)$$

Como $(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}) = \frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}$ entonces

$d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1} \left(\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \right) d(x_2, x_1)$ y siendo $0 < \alpha < 1 \rightarrow \alpha^n, \alpha^m > 0, \alpha^n - \alpha^m < \alpha^n$

Luego, $\frac{\alpha^n - \alpha^m}{\alpha^n} < 1 \rightarrow 1 - \frac{\alpha^m}{\alpha^n} < 1 \rightarrow 1 - \alpha^{m-n} < 1 \quad \therefore d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) \quad \forall m > n$

Proposición 2.109. Toda sucesión contractiva $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy

(Manayay & Tesén, 2015).

Demostración. Por hipótesis se tiene $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$ $0 < \alpha < 1, \forall n \geq 2$. Por la

Proposición 2.108 (ii) tenemos $d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) \quad \forall m > n$.

Si $n \rightarrow \infty$ entonces $\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) \rightarrow 0$, puesto que $\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \rightarrow 0$.

Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y $\varepsilon > 0$ se cumple $\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) < \varepsilon$.

Luego, si $m > n$ y $m, n \geq N \rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Por lo tanto $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Proposición 2.110. (Desigualdad fundamental de Paláis para funciones contractivas)

Sean (X, d) un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ una aplicación contractiva, entonces

$$d(x, y) \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(d(x, f(x)) + d(y, f(y)) \right) \quad \forall x, y \in X \quad (\text{Maximenko, s.f.}).$$

Demostración. Por la desigualdad triangular sabemos:

$$d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \quad (2.7)$$

Como f es una contracción entonces: $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$, $\alpha \in]0, 1[$

Luego en (2.7) se obtiene $d(x, y) \leq d(x, f(x)) + \alpha d(x, y) + d(f(y), y)$

Así, $d(x, y) - \alpha d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(y, f(y))$.

Luego, $(1 - \alpha)d(x, y) \leq d(x, f(x)) + d(y, f(y))$ y como $\alpha < 1 \rightarrow 1 - \alpha > 0$

En consecuencia, $d(x, y) \leq \frac{1}{1-\alpha} (d(x, f(x)) + d(y, f(y)))$.

Proposición 2.111. (Unicidad del punto fijo de funciones contractivas)

Dada una función contractiva $f: X \rightarrow X$ en el espacio métrico (X, d) , si existe $x, y \in X$ tales que $f(x) = x$, $f(y) = y$ entonces $x = y$ (Maximenko, s.f.).

Demostración. Por la Proposición 2.110 tenemos $d(x, y) \leq \frac{1}{1-\alpha} (d(x, f(x)) + d(y, f(y)))$

Si $f(x) = x \wedge f(y) = y \rightarrow d(x, y) \leq \frac{1}{1-\alpha} (d(x, x) + d(y, y)) \rightarrow d(x, y) \leq 0$.

En consecuencia $x = y$.

Definición 2.112. Dada una aplicación $f: X \rightarrow X$, decimos que $\{x_n\} \subseteq X$ es una iteración si $f(x_n) = x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ con termino inicial $x_0 \in X$ (Loayza, 2006).

Observación.

$$f^0(x) = id_X; f^2(x) = f(x) \circ f(x) = f(f(x)); f^{n+1}(x) = f^n(x) \circ f(x) = f^n(f(x))$$

De otra manera definimos la sucesión de iteraciones como: $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$

Teorema 2.113. (Teorema del Punto Fijo de Banach)

Una función $f: X \rightarrow X$ contractiva en un espacio métrico completo (X, d) posee un único punto fijo $x \in X$ de f (Atencia, 2014).

Demostración. Sea la sucesión $x_{n+1} = f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$ con $x_0 \in X$.

i) Afirmación: $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión, donde: $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots$

Como $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \rightarrow x_2 = f^2(x_0) \quad \therefore x_n = f^n(x_0), n = 1, 2, \dots$

Tenemos, si $m \geq 1$: $d(x_{m+1}, x_m) = d(f(x_m), f(x_{m-1})) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}), 0 < \alpha < 1$ (2.8)

$$\alpha d(x_m, x_{m-1}) = \alpha d(f(x_{m-1}), f(x_{m-2})) \leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) = \alpha^2 d(f(x_{m-2}), f(x_{m-3}))$$

Luego $\alpha^2 d(f(x_{m-2}), f(x_{m-3})) \leq \alpha^3 d(x_{m-2}, x_{m-3})$

$$\alpha^3 d(f(x_{m-3}), f(x_{m-4})) \leq \alpha^4 d(x_{m-3}, x_{m-4})$$

⋮

Por inducción de (2.8) tenemos $d(x_{m+1}, x_m) \leq \alpha^m d(x_1, x_0)$, $m \in \mathbb{N}$ (2.9)

Si $m > n$, aplicando desigualdad triangular se tiene:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m)$$

De (2.9) obtenemos: $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$; $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha^{n+1} d(x_1, x_0)$

También: $d(x_{m-1}, x_m) \leq \alpha^{m-1} d(x_1, x_0)$, en consecuencia:

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) + \alpha^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{m-1} d(x_1, x_0) \quad (2.10)$$

$$d(x_n, x_m) \leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{m-1}) d(x_1, x_0) = \alpha^n (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1}) d(x_1, x_0)$$

Aplicando la serie geométrica dado por $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ en $(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{m-n-1})$

De modo que $d(x_n, x_m) \leq \alpha^n \left(\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \right) d(x_1, x_0)$, por la Proposición 2.108. Ítem (ii) se tiene:

Si $0 < \alpha < 1 \rightarrow 1 - \alpha^{m-n} < 1 \rightarrow d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$, por otra parte $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$

Entonces $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$, por tanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Como (X, d) es un espacio métrico completo y $x \in X$, entonces $x_n \rightarrow x$.

ii) Afirmando que x es un punto fijo de f . Entonces:

$$d(f(x), x) \leq d(f(x), x_n) + d(x_n, x), \text{ se sabe } x_n = f(x_{n-1}) \quad (2.11)$$

$$\text{Entonces } d(f(x), x_n) = d(f(x), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x, x_{n-1}), f \text{ es una contracción} \quad (2.12)$$

Por transitividad reemplazar (2.11) en (2.12): $d(f(x), x) \leq \alpha d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x)$

Observamos que $d(x_n, x) \rightarrow 0$ y $d(x, x_{n-1}) \rightarrow 0$, entonces $d(f(x), x) = 0 \rightarrow f(x) = x$

iii) Afirmando que el punto fijo es único.

Supongamos que existan $x, y \in X$ puntos fijos de f tal que $x \neq y$

Entonces $f(x) = x, f(y) = y$, luego

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \rightarrow d(x, y) \leq \alpha d(x, y) \rightarrow \frac{d(x, y)}{d(x, y)} \leq \alpha \rightarrow 1 \leq \alpha \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$$

Puesto que f es una contracción, por lo tanto $x = y$.

Interpretación geométrica del Teorema del Punto Fijo de Banach

Sea $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función diferenciable en el cual $|f'(x)| \leq k < 1$, $x \in [a, b]$ así que $\exists! x \in [a, b]$ punto fijo y $\forall x_0 \in [a, b]$ la sucesión iterada $x_n = f(x_{n-1})$ converge a x , $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f(x) = x \rightarrow y = x$ (función identidad) $\wedge y' = f(x) \rightarrow y \cap y' = x$, punto fijo de f .

2.14. Continuos

En la presente sección se expone el concepto de continuo y sus propiedades.

Definición 2.114. Un continuo es un espacio métrico conexo, compacto y no vacío. Un subcontinuo es un subespacio métrico que es continuo (Sampayo, 2015).

Ejemplo.

- El intervalo cerrado $[0,1]$, como subespacio de \mathbb{R} con la métrica usual, es conexo, compacto. Por lo tanto, $[0,1]$ es un continuo.
- La circunferencia unitaria $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$ es conexa por caminos. La aplicación continua $\varphi: [0,1] \rightarrow S^1$ definida por $\varphi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, lleva $[0,1]$ en S^1 , mostrando su compacidad. Por lo tanto, S^1 es un continuo.

Teorema 2.115. Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección de continuos, entonces $\prod_{i=1}^n X_i$ es continuo (Grijalva, 2013).

Teorema 2.116. Sea X un continuo y $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ una sucesión de subcontinuos tal que $A_{n+1} \subset A_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces el conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subcontinuo de X (Grijalva, 2013).

Demostración. Dado que A es intersección de cerrados, por el teorema 2.46, se sigue que A es cerrado. Como X es compacto y A es cerrado, entonces por el teorema 2.73 tenemos que A es compacto.

Veamos que $A \neq \emptyset$. En efecto, supongamos que A fuese vacío (h.a), entonces $X = X \setminus A$ es abierto. Luego $X = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, por las leyes de De Morgan se tiene $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X \setminus A_n$

Como $X \setminus A_n$ es abierto y X es compacto, entonces existe un subcubrimiento finito de X , es decir $X = \bigcup_{i=1}^m (X \setminus A_{n_i}) = (X \setminus A_{n_1}) \cup (X \setminus A_{n_2}) \cup \dots \cup (X \setminus A_{n_m})$, $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$

Luego $X = X \setminus (A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_m}) = X \setminus A_{n_m}$, así pues $A_{n_m} = \emptyset$, esto es una contradicción ya que A_{n_m} es un subcontinuo. Por lo tanto $A \neq \emptyset$.

Afirmamos que A es conexo. Supongamos que A no es conexo (h.a) es decir $A = R \cup L$, donde R y L son cerrados, disjuntos no vacíos de X . Como X es compacto, por el teorema 2.73, se tiene que R y L son compactos, entonces existen abiertos M y N tal que $M \cap N = \emptyset$, con $R \subseteq M$ y $L \subseteq N$.

Por otra parte, se tiene:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) \cup \dots = X \setminus A = X \setminus (R \cup L) \supseteq X \setminus (M \cup N)$$

Entonces $\{X \setminus A_1, X \setminus A_2, \dots\}$ es una cubierta abierta del conjunto cerrado $X \setminus (M \cup N)$.

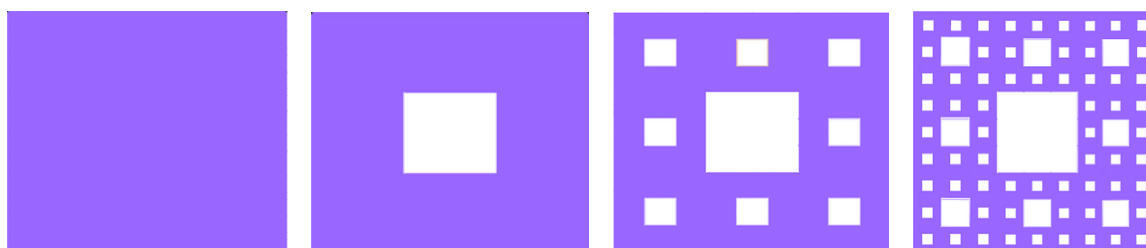
Desde que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, entonces existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subseteq M \cup N$.

Como A_i es conexo, entonces $A_i \subseteq M$ o $A_i \subseteq N$, supongamos que $A_i \subseteq M$. Luego, tenemos $A = R \cup L \Rightarrow R \cup L \subseteq A_i \Rightarrow L \subseteq M$ pero $L \subseteq N$, entonces $L \subseteq M \cap N$, contradiciendo el hecho que $M \cap N = \emptyset$. De esta forma, A es conexo. Así, A es subcontinuo de X .

Ejemplo. Sea el cuadrado $A_1 = [0,1] \times [0,1]$ el cual es dividido interiormente en 9 cuadrados iguales sustrayendo el cuadrado central, implicando que $A_2 \subset A_1$, análogamente se define $A_3 \subset A_2$, por inducción tenemos $A_{n+1} \subset A_n$, entonces definimos $\mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un continuo y por el teorema 2.113, tenemos que \mathcal{A} es un continuo (Escobedo et al., 2007).

Figura 27.

Carpeta de Sierpinski.



2.15. Métrica de Hausdorff

En esta sección, se analizará la métrica de Hausdorff y sus propiedades, siendo un concepto utilizado para medir la distancia entre subconjuntos, y especialmente en los fractales.

Definición 2.117. Considérese un espacio métrico (X, d) y $A, B \subset X$ no vacíos y acotados; definimos los valores reales (Grijalva, 2013):

$$\omega(A, B) = \sup_{a \in A} \left\{ \inf_{b \in B} d(a, b) \right\} \text{ y } \omega(B, A) = \sup_{b \in B} \left\{ \inf_{a \in A} d(b, a) \right\}$$

Observación. No siempre se cumple que $\omega(A, B) = \omega(B, A)$

Ejemplo. Sean $A = [0, 4]$ y $B = [8, 16]$ en el espacio métrico (\mathbb{R}, d_E) , donde $d_E = |x - y|$ es la métrica euclidiana, calcularemos $\omega(A, B) = \sup\{\inf\{d_E(a, b): b \in B\}: a \in A\}$.

El punto que minimiza la distancia de A hacia B es $b = 8$, por lo tanto

$$d(A, B) = \inf\{d_E(a, b): b \in B\} = d_E(a, 8)$$

Por otro lado, el punto $a \in A$ que maximiza esta distancia es $a = 0$, es decir

$$\omega(A, B) = \sup\{d(A, B): a \in A\} = \sup\{d_E(a, 8): a \in A\} = d_E(0, 8) = |8 - 0| = 8$$

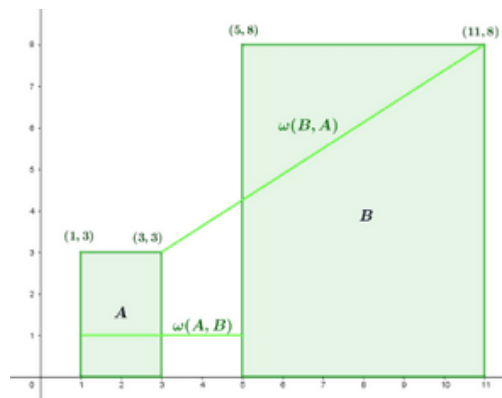
De manera similar, el punto $a \in A$ que minimiza la distancia es $a = 4$, mientras que el punto $b \in B$ que maximiza la distancia es $b = 16$, con ello

$$\omega(B, A) = \sup\{d(B, A): b \in B\} = \sup\{d_E(b, 4): b \in B\} = d_E(16, 4) = |4 - 16| = 12$$

Figura 28.

Comparación entre $\omega(A, B)$ y $\omega(B, A)$ en $A = \{(x, y): 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ y

$B = \{(x, y): 5 \leq x \leq 11, 0 \leq y \leq 8\}$



Ejemplo. Sean $A = \{(x, y): 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$ y $B = \{(x, y): 5 \leq x \leq 11, 0 \leq y \leq 8\}$

en el espacio métrico (\mathbb{R}^2, d) , donde $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

El punto que minimiza la distancia de A hacia B es $b = (5, b_2)$ por lo tanto

$$d(A, B) = \inf\{d((a_1, a_2), (b_1, b_2)): (b_1, b_2) \in B\} = d((a_1, a_2), (5, b_2))$$

Luego, el punto $(a_1, a_2) \in A$ que maximiza esta distancia es $a = (1, a_2)$, entonces $a_2 = b_2$

$$\omega(A, B) = \sup\{d(A, B): (a_1, a_2) \in A\} = \sup\{d((a_1, a_2), (5, a_2)): (a_1, a_2) \in A\}$$

$$\omega(A, B) = d((1, a_2), (5, a_2)) = 4$$

Por otro lado, el punto $(a_1, a_2) \in A$ que minimiza la distancia es $a = (3, a_2)$ y el punto

$(b_1, b_2) \in B$ que maximiza la distancia es $b = (11, b_2)$, donde $0 \leq a_2 \leq 3$, el cual varía

según la elección de $b = (11, b_2)$, vemos que $b = (11, 8)$ maximiza $d((b_1, b_2), (3, 3))$ dado

$$\text{por } \omega(B, A) = \sup\{d(B, A): (b_1, b_2) \in B\} = \sup\{d((b_1, b_2), (3, 3)): (b_1, b_2) \in B\}$$

$$\omega(B, A) = d((11, 8), (3, 3)) = 9.95 \quad \therefore \omega(A, B) \neq \omega(B, A).$$

Proposición 2.118. Dado (X, d) un espacio métrico y $A, B, C \subset X$ no vacíos y acotados,

entonces $\omega(A \cup B, C) = \max\{\omega(A, C), \omega(B, C)\}$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Por definición de $\omega(A, B)$ se tiene

$$\omega(A \cup B, C) = \sup\{\inf\{d(x, c): c \in C\}: x \in A \cup B\}$$

Como $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$, entonces

$$\omega(A \cup B, C) = \max\{\sup\{\inf\{d(x, c): c \in C\}: x \in A\}, \sup\{\inf\{d(x, c): c \in C\}: x \in B\}\}$$

$$\omega(A \cup B, C) = \max\{\omega(A, C), \omega(B, C)\}$$

Proposición 2.119. Si (X, d) es un espacio métrico y $A, B \subset X$ no vacíos y acotados,

entonces: (Grijalva, 2013)

a) $\omega(A, B) = 0$ si y solo si $A \subset \bar{B}$.

b) $\omega(B, A) = 0$ si y solo si $B \subset \tilde{A}$

Proposición 2.120. Dado un espacio métrico (X, d) . Si $A, B, C \subset X$ son no vacíos y acotados, entonces $\omega(A, B) \leq \omega(A, C) + \omega(C, B)$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Sean $a \in A, b \in B$ y $c \in C$, por la desigualdad triangular se tiene:

$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$. Con ello, $d(a, b)$ es cota inferior de $\{d(a, c) + d(c, b)\}$

Tomando ínfimo sobre $b \in B$ se consigue $\inf_{b \in B} d(a, b) \leq \inf_{b \in B} \{d(a, c) + d(c, b)\}$

Como $d(a, c)$ no depende de b , $\inf_{b \in B} \{d(a, c) + d(c, b)\} = d(a, c) + \inf_{b \in B} d(c, b)$

Así tenemos $\inf_{b \in B} d(a, b) \leq d(a, c) + \inf_{b \in B} d(c, b)$, luego tomando ínfimo sobre $c \in C$

$\inf_{b \in B} d(a, b) \leq \inf_{c \in C} \left\{ d(a, c) + \inf_{b \in B} d(c, b) \right\} \leq \inf_{c \in C} d(a, c) + \sup_{c \in C} \inf_{b \in B} d(c, b)$,

Finalmente, tomando supremo sobre $a \in A$ $\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \leq \sup_{a \in A} \left\{ \inf_{c \in C} d(a, c) + \omega(C, B) \right\}$

Así, $\omega(A, B) \leq \sup_{a \in A} \inf_{c \in C} d(a, c) + \omega(C, B)$. Por lo tanto $\omega(A, B) \leq \omega(A, C) + \omega(C, B)$.

Observación.

- Se tiene que ω no es una métrica sobre los conjuntos no vacíos, acotados y cerrados, pero si es una cuasi semimétrica en los conjuntos acotados y cerrados no vacíos.

En el espacio métrico (X, d) definimos la familia de conjuntos:

$$\mathcal{CB}(X) = \{A \subseteq X / A \text{ es no vacío, acotado y cerrado en } X\}$$

Teorema 2.121. Sea (X, d) un espacio métrico y $d_H: \mathcal{CB}(X) \times \mathcal{CB}(X) \rightarrow [0, \infty >$ una aplicación definida por $d_H(A, B) = \max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\}$ para cada $A, B \in \mathcal{CB}(X)$, entonces d_H es una métrica en $\mathcal{CB}(X)$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Veamos que d_H satisface las cuatro propiedades de la definición 2.29.

En efecto,

i) Sean $A, B, C \in \mathcal{CB}(X)$. Como $\omega(A, B) \geq 0 \wedge \omega(B, A) \geq 0$ se sigue que $d_H(A, B) \geq 0$.

ii) Veamos que $d_H(A, B) = 0$ si y solo si $A = B$

Si $d_H(A, B) = 0$ entonces $\omega(A, B) = 0$ y $\omega(B, A) = 0$. Por la proposición 2.119 tenemos

$A \subset \bar{B}$ y $B \subset \bar{A}$, como A y B son cerrados, entonces $A \subset B$ y $B \subset A$, con lo cual $A = B$.

Recíprocamente, si $A = B$ entonces $A \subset B$ y $B \subset A$. Como $B \subset \bar{B}$, entonces $A \subset \bar{B}$ y

$B \subset \bar{A}$ y nuevamente por la Proposición 2.119 se tiene que $\omega(A, B) = 0$ y $\omega(B, A) = 0$.

Por lo tanto $d_H(A, B) = \max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\} = 0$

iii) La simetría $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ se cumple puesto que el máximo es simétrico.

iv) Veamos si d_H satisface la desigualdad triangular. Por la proposición 2.120 tenemos,

$$\omega(A, B) \leq \omega(A, C) + \omega(C, B) \text{ y } \omega(B, A) \leq \omega(B, C) + \omega(C, A)$$

Por otra parte, $d_H(A, B) = \max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\}$, con ello

$$\max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\} \leq \max\{\omega(A, C) + \omega(C, B), \omega(B, C) + \omega(C, A)\}$$

Además, como $\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$, $a, b, c, d > 0$ entonces

$$d_H(A, B) \leq \max\{\omega(A, C), \omega(C, A)\} + \max\{\omega(C, B), \omega(B, C)\} = d_H(A, C) + d_H(C, B)$$

Por lo tanto $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$.

Observación.

La aplicación $d_H(A, B) = \max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\}$ se denomina la *métrica de Hausdorff*.

Propiedades de la métrica de Hausdorff

Definición 2.122. Consideremos (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ no vacío y acotado.

Dado $\varepsilon > 0$, se define la nube alrededor de A por $\mathcal{N}(\varepsilon, A) = \{x \in X: d(x, A) < \varepsilon\}$

(Grijalva, 2013).

Proposición 2.123. Sean (X, d) un espacio métrico, A y B subconjuntos acotados y no vacíos de X . Dado $\varepsilon > 0$, se cumplen:

a) Si $a \in X$ entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, \{a\}) = B(a, \varepsilon)$.

b) $\mathcal{N}(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$.

c) $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ si y solo si $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

d) Si $\delta > 0$ y $\delta < \varepsilon$, entonces $Cl(\mathcal{N}(\delta, A)) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A)$.

e) Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, B)$.

f) $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap B \neq \emptyset$ si y solo si $\mathcal{N}(\varepsilon, B) \cap A \neq \emptyset$.

g) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos acotados no vacíos de X tal que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es acotado entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, \bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{N}(\varepsilon, A_i)$ (Barragán et al., s.f.).

Proposición 2.124. Dado un espacio métrico (X, d) y $A \in \mathcal{CB}(X)$. Si $\varepsilon > 0$ entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, A) = \bigcup_{a \in A} \mathcal{N}(\varepsilon, a)$ (Grijalva, 2013).

Observación: $d(x, A) < \infty$ pues A es acotado.

Demostración.

Sea $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, entonces $d(x, A) < \varepsilon$, es decir $\inf_{a \in A} d(x, a) < \varepsilon$, luego existe $a_0 \in A$ tal que

$d(x, a_0) < \varepsilon$, entonces $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, a_0)$, por tanto $x \in \bigcup\{\mathcal{N}(\varepsilon, a) : a \in A\}$.

Por otro lado, sea $x \in \bigcup\{\mathcal{N}(\varepsilon, a) : a \in A\}$, entonces existe $a_0 \in A$ tal que $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, a_0)$, es decir $d(x, a_0) < \varepsilon$. Luego $d(x, A) \leq d(x, a_0)$ así pues $d(x, A) < \varepsilon$.

En consecuencia $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$.

Proposición 2.125. Dado un espacio métrico (X, d) , para todo $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ y para cada $\varepsilon > 0$, se cumple $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cup \mathcal{N}(\varepsilon, B) = \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$ (Grijalva, 2013).

Demostración. En principio, veamos que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cup \mathcal{N}(\varepsilon, B) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$.

Si $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ entonces $d(x, A) < \varepsilon$, Luego, existe $a \in A \subset A \cup B$, tal que $d(x, a) < \varepsilon$

Con ello, $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$, por lo tanto $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$.

Del mismo modo, si $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ entonces $d(x, B) < \varepsilon$, existe $b \in B \subset A \cup B$, tal que

$d(x, b) < \varepsilon$. Luego $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$, entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, B) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$.

En consecuencia, $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cup \mathcal{N}(\varepsilon, B) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$.

Por otra parte, sea $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B)$ entonces $d(x, A \cup B) < \varepsilon$. Así, existe $a \in A \cup B$ tal que $d(x, a) < \varepsilon$. Se presentan dos casos:

i) Si $a \in A$, se tiene que $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)$.

ii) Si $a \in B$, se sigue que $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$.

Por lo tanto, $\mathcal{N}(\varepsilon, A \cup B) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A) \cup \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, mostrando el resultado.

Teorema 2.126. Si (X, d) es un espacio métrico compacto y $A, B \subset X$ son compactos no vacíos y disjuntos, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B) = \emptyset$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Supongamos que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B) \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$ (h.a)

Como A y B son compactos disjuntos tenemos $d(A, B) > 0$.

Para $\varepsilon = \frac{d(A, B)}{2} > 0$, se tiene que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B) \neq \emptyset$. Luego, si $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B)$

se obtiene que $d(x, a) < \varepsilon \forall a \in A$ y $d(x, b) < \varepsilon \forall b \in B$.

Luego, $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < 2\varepsilon = d(A, B)$, se sigue que $d(a, b) < d(A, B)$, lo cual

contradice el hecho que $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

Proposición 2.127. Considérese (X, d) un espacio métrico. Si $A, B \subset X$ son subconjuntos acotados no vacíos y A es compacto, entonces $\omega(A, B) < \varepsilon$ si y solo si $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ (Grijalva, 2013).

Demostración.

(\Rightarrow) Sea $a \in A$ y $d(a, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$, entonces $d(a, B) \leq \omega(A, B) < \varepsilon$

Luego $d(a, B) < \varepsilon$, es decir $a \in \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, mostrando que $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$.

(\Leftarrow) Afirmación: $\mathcal{N}(\varepsilon, B) = \cup\{\mathcal{N}(\delta, B): 0 < \delta < \varepsilon\}$

Si $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, entonces $d(x, B) < \varepsilon$.

Sea $\delta > 0$ tal que $d(x, B) < \delta < \varepsilon$ entonces $x \in \mathcal{N}(\delta, B)$, así $x \in \cup_{0 < \delta < \varepsilon} \mathcal{N}(\delta, B)$

Recíprocamente, sea $x \in \cup_{0 < \delta < \varepsilon} \mathcal{N}(\delta, B)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \varepsilon$ entonces

$x \in \mathcal{N}(\delta_1, B)$. De esta forma, $d(x, B) < \delta_1 < \varepsilon$ y en consecuencia $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, con lo cual se tiene la afirmación.

Como $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, entonces $A \subset \cup_{0 < \delta < \varepsilon} \mathcal{N}(\delta, B)$. Así, por la proposición 2.123, existen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^n \mathcal{N}(\delta_i, B)$. Sea $\delta = \max_{i=1,2,\dots,n} \{\delta_i\}$ y $a \in A$. Luego, existe algún

i tal que $a \in \mathcal{N}(\delta_i, B)$, así pues $d(a, B) < \delta_i \leq \delta$, con lo cual $d(a, B) \leq \delta$, para todo $a \in A$.

Tomando supremo sobre A obtenemos $\sup_{a \in A} \{d(a, B)\} \leq \delta$. Así, $\omega(A, B) \leq \delta$ consiguiendo la desigualdad $\omega(A, B) < \varepsilon$.

Proposición 2.128. Si $A, B \subset X$ son subconjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico (X, d) . Entonces $d_H(A, B) < \varepsilon$ si y solo si $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ (Grijalva, 2013).

Demostración.

(\Rightarrow) Como $d_H(A, B) < \varepsilon$, entonces $\omega(A, B) < \varepsilon$ y $\omega(B, A) < \varepsilon$

Por la proposición 2.127, tenemos $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)$.

(\Leftarrow) Si $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, entonces $d_H(A, B) < \varepsilon$.

Por la proposición 2.127, si $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ entonces $d_H(A, B) < \varepsilon$, de forma análoga

Si $B \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ entonces $\omega(B, A) < \varepsilon$, en consecuencia $d_H(A, B) < \varepsilon$.

Concluyendo $\max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\} < \varepsilon \rightarrow d_H(A, B) < \varepsilon$.

Proposición 2.129. Dado un espacio métrico (X, d) , si $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$ entonces $d_H(A, B) = d(a, b)$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Por hipótesis y la definición 2.117 tenemos

$$\omega(A, B) = \sup\{d(A, b) : a \in A\} = \sup\{d(a, b)\} = d(a, b).$$

Análogamente, $\omega(B, A) = \sup\{d(B, A) : b \in B\} = \sup\{d(b, a)\} = d(b, a)$.

Luego $d_H(A, B) = \max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\}$. En consecuencia, $d_H(A, B) = d(a, b)$.

Proposición 2.130. Sea (X, d) un espacio métrico y $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{CB}(X)$, entonces $d_H(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{d_H(A_1, B_1), d_H(A_2, B_2)\}$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Sean $A = A_1 \cup A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$ y consideremos $a \in A$. Si $a \in A_1$, entonces $d(a, B_1 \cup B_2) = \inf\{d(a, b) : b \in B_1 \cup B_2\}$, luego por propiedad del ínfimo

$$d(a, B_1 \cup B_2) = \min\{\inf\{d(a, b) : b \in B_1\}, \inf\{d(a, b) : b \in B_2\}\}$$

$$d(a, B_1 \cup B_2) = \min\{d(a, B_1), d(a, B_2)\}$$

$$\text{Así, } d(a, B) \leq d(a, B_1) \leq \sup\{d(a, B_1) : a \in A_1\} = \omega(A_1, B_1) \leq d_H(A_1, B_1)$$

$$\text{Entonces } d(a, B) \leq d_H(A_1, B_1), \text{ donde } a \in A_1 \tag{2.13}$$

Si $a \in A_2$, se sigue que $d(a, B) \leq d(a, B_2) \leq \sup\{d(a, B_2): a \in A_2\} = \omega(A_2, B_2)$

$$\text{Luego, } d(a, B) \leq d_H(A_2, B_2) \quad (2.14)$$

De (2.13) y (2.14), se obtiene $d(a, B) \leq \max\{d_H(A_1, B_1), d_H(A_2, B_2)\}$

$$\text{Luego } \omega(A, B) \leq \max\{d_H(A_1, B_1), d_H(A_2, B_2)\} \quad (2.15)$$

Si $b \in B_1$, $d(b, A_1 \cup A_2) = \inf\{d(b, a): a \in A_1 \cup A_2\}$

$$d(b, A_1 \cup A_2) = \min\{\inf\{d(b, a): a \in A_1\}, \inf\{d(b, a): a \in A_2\}\}$$

$$d(b, A_1 \cup A_2) = \min\{d(b, A_1), d(b, A_2)\}$$

Así, $d(b, A) \leq d(b, A_1) \leq \sup\{d(b, A_1): b \in B_1\} = \omega(B_1, A_1) \leq d_H(B_1, A_1)$

$$\text{Entonces } d(b, A) \leq d_H(B_1, A_1), \text{ donde } b \in B_1 \quad (2.16)$$

Si $b \in B_2$, se sigue que $d(b, A) \leq d(b, A_2) \leq \sup\{d(b, A_2): b \in B_2\} = \omega(B_2, A_2)$

$$\text{Con ello, } d(b, A) \leq d_H(B_2, A_2). \quad (2.17)$$

De (2.16) y (2.17), se tiene $d(b, A) \leq \max\{d_H(B_1, A_1), d_H(B_2, A_2)\}$

$$\text{Luego, } \omega(B, A) \leq \max\{d_H(B_1, A_1), d_H(B_2, A_2)\} \quad (2.18)$$

De (2.15) y (2.18), tenemos $d_H(A, B) \leq \max\{d_H(A_1, B_1), d_H(A_2, B_2)\}$

Por lo tanto, $d_H(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \max\{d_H(A_1, B_1), d_H(A_2, B_2)\}$.

2.16. Convergencia de la métrica de Hausdorff

En este acápite, se estudiará la convergencia de la métrica de Hausdorff, la cual define una forma de medir la distancia entre espacios métricos que son cerrados y acotados.

Teorema 2.131. Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\} \subset X$ una sucesión y $x \in X$. Entonces

$\{x_n\} \rightarrow \{x\}$ en $(\mathcal{CB}(X), d_H)$ si y solo si $x_n \rightarrow x$ en (X, d) (Grijalva, 2013).

Demostración.

(\Rightarrow) Supongamos que $\{x_n\} \rightarrow \{x\}$ en $(\mathcal{CB}(X), d_H)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$d_H(\{x_n\}, \{x\}) < \varepsilon$, para cada $n \geq n_0$. Luego $d_H(\{x_n\}, \{x\}) = d(x_n, x) < \varepsilon$, por la

proposición 2.129, mostrando que $x_n \rightarrow x$ en X .

(\Leftarrow) Por hipótesis, $x_n \rightarrow x$ en X . Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$, para cada $n \geq n_0$. Luego por la proposición 2.129, tenemos $d(x_n, x) = d_H(\{x_n\}, \{x\}) < \varepsilon$, para cada $n \geq n_0$. En consecuencia, $\{x_n\} \rightarrow \{x\}$ en $(\mathcal{CB}(X), d_H)$.

Observación. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{CB}(X)$, diremos que $A_n \rightarrow A \in \mathcal{CB}(X)$ si $d_H(A_n, A) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo.

1. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$ y $A = \{(0,0)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \rightarrow (0,0).$$

2. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = [0,1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ y $A = [0,1] \times \{0\}$. Afirmamos que $A_n \rightarrow A$. En

efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Consideremos $x \in A_n$ tal que $n \geq N$,

entonces $d(x, A) \leq \frac{1}{N}$. Así, tenemos $d(x, A) < \varepsilon$ y por lo tanto $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, con lo cual,

$$A_n \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A).$$

Ahora veamos que $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A_n)$

Sea $x \in A$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Luego, $d(x, A_n) \leq \frac{1}{N}$ para cada $n \geq N$,

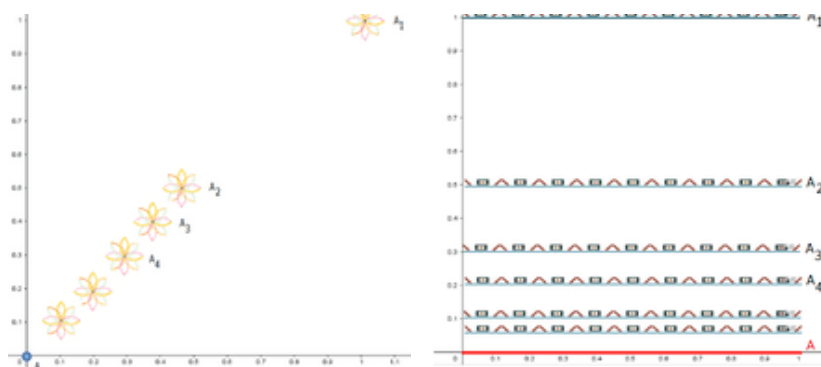
logrando la desigualdad $d(x, A_n) < \varepsilon$, lo que implica que $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A_n)$. Por la proposición

2.128, tenemos que $d_H(A_n, A) < \varepsilon$ y en consecuencia $A_n \rightarrow A$.

Figura 29.

En el lado izquierdo se muestra la sucesión $A_n \rightarrow A$ en $X=[0,1] \times [0,1]$

En el lado derecho tenemos $A_n = [0,1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ y $A = [0,1] \times \{0\}$ en $X=[0,1] \times [0,1]$



Teorema 2.132. Dado un espacio métrico (X, d) , $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de conjuntos en $\mathcal{CB}(X)$ y $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ tales que $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$ en $(\mathcal{CB}(X), d_H)$. Si $A_n \subset B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis tenemos que

$A_n \rightarrow A$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $n \geq N_1$

$B_n \rightarrow B$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $n \geq N_2$

Considerando $N = \max\{N_1, N_2\}$, por la Proposición 2.128, tenemos:

$d_H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ si y solo si $A_n \subset \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ y $A \subset \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$, para todo $n \geq N$

$d_H(B_n, B) < \frac{\varepsilon}{2}$ si y solo si $B_n \subset \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, B)$ y $B \subset \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, B_n)$, para todo $n \geq N$

Consideremos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq N$. Si $a \in A$ existe $x \in A_m$ tal que $d(a, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Como $A_m \subset B_m$, se sigue que $x \in B_m$, entonces existe $b \in B$ tal que $d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2}$

Por la desigualdad triangular tenemos, $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \varepsilon$ es decir $d(a, b) < \varepsilon$

Luego $b \in \mathcal{N}(\varepsilon, a) \cap B$, por lo cual $\mathcal{N}(\varepsilon, a) \cap B \neq \emptyset$ entonces $a \in \bar{B}$ y por la proposición

2.44 (ii) tenemos que $a \in B$. Por lo tanto $A \subset B$.

Ejemplo. Sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $A_n = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}$, $A = \{(0,0)\}$, $B_n = [0,1] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ y

$B = [0,1] \times \{0\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Obsérvese que (figura 29) $A_n \subset B_n$ y $A \subset B$.

Teorema 2.133. Sea (X, d) un espacio métrico y dos sucesiones de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{CB}(X)$ con $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ tales que $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$ en $(\mathcal{CB}(X), d_H)$.

Si $\{x_n\} \subseteq X$ es tal que $\{x_n\} \subseteq A_n \cap B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ entonces $x \in A \cap B$ (Grijalva, 2013).

Demostración.

Por la inclusión $A_n \cap B_n \subset A_n$, se tiene que $\{x_n\} \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $A_n \rightarrow A$ en

$(\mathcal{CB}(X), d_H)$ y $x_n \rightarrow x$ en X , por el teorema 2.132 se establece que $x \in A$. De manera

análoga, como $A_n \cap B_n \subset B_n$ se consigue $\{x_n\} \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $B_n \rightarrow B$ y

$x_n \rightarrow x$, nuevamente por el teorema 2.132 se tiene que $x \in B$. En consecuencia, $x \in A \cap B$.

Teorema 2.134. Si (X, d) es un espacio métrico compacto y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de conjuntos en $\mathcal{CB}(X)$, con $A, B \in \mathcal{CB}(X)$ tales que $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$ en $(\mathcal{CB}(X), d_H)$, y se cumple que $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Supongamos que $A \cap B = \emptyset$ (h.a). Por el teorema 2.126, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B) = \emptyset$. Como $A_n \rightarrow A$ y $B_n \rightarrow B$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(A_n, A) < \varepsilon$, para cada $n \geq N_1$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(B_n, B) < \varepsilon$, para cada $n \geq N_2$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces $d_H(A_n, A) < \varepsilon$ y $d_H(B_n, B) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$.

Por la proposición 2.128 tenemos que $d_H(A_n, A) < \varepsilon$, con ello $A_n \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ y $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A_n)$ y de forma análoga, $d_H(B_n, B) < \varepsilon$, entonces $B_n \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B)$ y $B \subset \mathcal{N}(\varepsilon, B_n)$.

Por otra parte, como $A_n \cap B_n \neq \emptyset$, existe $x \in A_n \cap B_n$, es decir $x \in A_n$ y $x \in B_n$

En consecuencia, $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A)$ y $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, con lo cual $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B)$, lo que contradice la hipótesis $\mathcal{N}(\varepsilon, A) \cap \mathcal{N}(\varepsilon, B) = \emptyset$. Así, $A \cap B \neq \emptyset$.

Observación. Para una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{CB}(X)$ definido en un espacio métrico (X, d) , el límite superior se define como el conjunto de todos los puntos $x \in X$ que pertenecen a infinitos términos de la sucesión, es decir

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X / x \in A_n \text{ para infinitos valores de } n\}.$$

Proposición 2.135. Consideremos un espacio métrico (X, d) y una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{CB}(X)$. Entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ es un conjunto cerrado en X (Grijalva, 2013).

Demostración. La inclusión $\limsup A_n \subset \overline{\limsup A_n}$ es evidente.

Veamos que $\overline{\limsup A_n} \subset \limsup A_n$.

En efecto, si $x \in \overline{\limsup A_n}$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\mathcal{N}(\varepsilon, x) \cap \limsup A_n \neq \emptyset$.

Sea $y \in \mathcal{N}(\varepsilon, x) \cap \limsup A_n$, como $y \in \limsup A_n$ por definición de límite superior, para cada $r > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N}(r, y) \cap A_n \neq \emptyset$. Tomando $r < \varepsilon$, tenemos

$\mathcal{N}(r, y) \subset \mathcal{N}(\varepsilon, x)$. De esta forma, $\mathcal{N}(\varepsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$, con lo cual $x \in \lim sup A_n$.

Por lo tanto $\lim sup A_n$ es cerrado en X .

Proposición 2.136. Dado un espacio métrico (X, d) y una sucesión $\{A_n\}$ en $\mathcal{CB}(X)$. Si $\varepsilon > 0$

y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se cumple que $A_n \subseteq \mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_N\right)$, entonces

$\lim sup A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_N)$ (Barragán et al., s.f.).

Demostración. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq \mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_N\right)$ para cada $n \geq N$.

Así, $\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n \subseteq \mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_N\right)$ logrando la inclusión $\overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n} \subseteq \overline{\mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_N\right)}$.

Por la proposición 2.123 (d) tenemos $\overline{\mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_N\right)} \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_N)$, se sigue que,

$\overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n} \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_N)$ y, en consecuencia, $\lim sup A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}$.

Supongamos que existe $x \in \lim sup A_n$ tal que $x \notin \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}$ (h.a)

Entonces, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap (\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n) = \emptyset$. Luego, $B(x, r) \cap A_n = \emptyset$ para todo $n \geq N$ lo cual implica que $x \notin \lim sup A_n$, que es absurdo.

Por lo tanto, $\lim sup A_n \subseteq \overline{\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n}$. En consecuencia, $\lim sup A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_N)$.

Proposición 2.137. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$, entonces $\lim sup A_n$ es un conjunto acotado (Barragán et al., s.f.).

Demostración. Como $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $d_H(A_N, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por la proposición 2.128 tenemos que $A_n \subset \mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_N\right)$, para cada $n \geq N$ y por la proposición 2.136, tenemos $\lim sup A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_N)$.

Como A_N es acotado, existe $a \in X$ y $r > 0$ tal que $A_N \subset B(a, r)$. Si $x \in \mathcal{N}(\varepsilon, A_N)$ entonces existe $y \in A_N$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Como $y \in B(a, r)$ entonces $d(y, a) < r$. Por la desigualdad triangular tenemos $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < \varepsilon + r$.

Luego $x \in B(a, \varepsilon + r)$ y por lo tanto $\mathcal{N}(\varepsilon, A_N) \subset B(a, \varepsilon + r)$. En consecuencia, $\mathcal{N}(\varepsilon, A_N)$ es acotado, mostrando que $\lim sup A_n$ es acotado.

Proposición 2.138. Dado un espacio métrico (X, d) y una sucesión de Cauchy $\{A_n\} \subset \mathcal{CB}(X)$.

Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

a) Para cada $n \geq N$, $d_H(A_N, A_n) < \frac{\varepsilon}{2^2}$.

b) Si $m \geq N$, existe una sucesión $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ con $m = n_1$, $n_k < n_{k+1}$ y $d_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

para todo $k \in \mathbb{N}$ (Barragán et al., s.f.).

Demostración.

a) Sea $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq N$, $d_H(A_n, A_m) < \frac{\varepsilon}{2^2}$. En particular, si $m = N$ se obtiene que para todo

$$n \geq N \Rightarrow d_H(A_N, A_n) < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

b) Sea $m \geq N$, dado por (a). Si $m = n_1$ entonces para todo $n \geq n_1 \Rightarrow d_H(A_{n_1}, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $n_2 > n_1$ entonces $n \geq n_2$ y $d_H(A_{n_2}, A_n) < \frac{\varepsilon}{2^2}$, además se cumple que

$$d_H(A_{n_1}, A_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ con } n_2 > n_1.$$

Tomemos $n_3 > n_2$ de modo que $n \geq n_3$, $d_H(A_{n_3}, A_n) < \frac{\varepsilon}{2^3}$ y $d_H(A_{n_2}, A_{n_3}) < \frac{\varepsilon}{2^2}$

Así, por construcción obtenemos una subsucesión $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $n_k < n_{k+1}$ y

$$d_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.139. Si (X, d) es un espacio métrico completo y $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$, entonces $\lim sup A_n \neq \emptyset$ (Barragán et al., s.f.).

Demostración. Por la proposición 2.138 (b), existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumplen $n_k < n_{k+1}$ y $d_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. luego por la proposición

2.128, se tiene $A_{n_k} \subset \mathcal{N}(\frac{1}{2^k}, A_{n_{k+1}})$ y $A_{n_{k+1}} \subset \mathcal{N}(\frac{1}{2^k}, A_{n_k})$.

Para $k = 1$ existen $x_{n_1} \in A_{n_1}$ y $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que $d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Si $k = 2$ existe $x_{n_3} \in A_{n_3}$ tal que $d(x_{n_2}, x_{n_3}) < \frac{\varepsilon}{2^2}$. Del mismo modo para $k = 3$ existe $x_{n_4} \in A_{n_4}$ tal que $d(x_{n_3}, x_{n_4}) < \frac{\varepsilon}{2^3}$. Así, se obtiene la sucesión $x_{n_k} \in A_{n_k}$ tal que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Si $t, s \in \mathbb{N}$, con $s < t$ entonces

$$d(x_{n_s}, x_{n_t}) \leq d(x_{n_s}, x_{n_{s+1}}) + d(x_{n_{s+1}}, x_{n_{s+2}}) + \cdots + d(x_{n_{t-1}}, x_{n_t})$$

Luego, $d(x_{n_s}, x_{n_t}) \leq \frac{\varepsilon}{2^s} + \frac{\varepsilon}{2^{s+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{t-1}} = \sum_{i=s}^{t-1} \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^i \rightarrow 0$ cuando $s, t \rightarrow \infty$.

Como la métrica es simétrica se cumple de forma análoga para $A_{n_{k+1}} \subset \mathcal{N}\left(\frac{1}{2^k}, A_{n_k}\right)$.

Así, $\{x_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en X . Luego, por hipótesis existe $x \in X$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ si $k \rightarrow \infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $x_{n_k} \in B(x, \varepsilon)$ para todo $k \geq N$.

Luego, $x_{n_k} \in B(x, \varepsilon) \cap A_{n_k}$ para todo $k \geq N$, y como los índices n_k son infinitos y crecientes de A_n y contienen infinitos puntos dentro de $B(x, \varepsilon)$, concluimos que $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ y por lo tanto $x \in \limsup A_n$. En consecuencia, $\limsup A_n \neq \emptyset$.

2.17. Propiedades topológicas en $\mathcal{CB}(X)$

En esta sección, estudiaremos como las nociones de acotación, completitud, compacidad y conexidad aplicadas en un espacio métrico o en un espacio métrico de Hausdorff, están relacionadas con los conjuntos $\mathcal{CB}(X)$, $F_n(X)$ y $\mathcal{K}(X)$, que pasaremos a definir.

Teorema 2.140. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces son equivalentes:

- X es totalmente acotado.
- $\mathcal{CB}(X)$ es totalmente acotado (Barragán et al., s.f.).

Demostración.

$a \rightarrow b$) Por hipótesis X es totalmente acotado.

Dado $\varepsilon > 0$, existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$. Consideremos la familia de conjuntos $\mathcal{D} = \{D \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\} / D \neq \emptyset\}$. Obsérvese que $\mathcal{D} \in \mathcal{CB}(X)$.

Sea $A \in \mathcal{CB}(X)$, como $A \subset X$, para $a \in A$ existe x_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $a \in B(x_i, \varepsilon/2)$.

Definimos $D_A = \{x_i/B(x_i, \varepsilon/2) \cap A \neq \emptyset\}$ y claramente $D_A \in \mathcal{D}$. Luego, para cada $a \in A$, existe $x \in D_A$ con $d(a, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo tanto $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon/2, D_A)$.

De forma análoga, para cada $x \in D_A$ existe $a \in A$ con $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que $D_A \subset \mathcal{N}(\varepsilon/2, A)$.

Por la proposición 2.128, tenemos $d_H(A, D_A) < \varepsilon$, con ello $A \in B_{d_H}(D_A, \varepsilon)$.

Como $A \in \mathcal{CB}(X)$ es arbitrario, entonces $\mathcal{CB}(X) \subset \bigcup_{D \in \mathcal{D}} B_{d_H}(D, \varepsilon)$.

Así, $\mathcal{CB}(X)$ es totalmente acotado.

$b \rightarrow a$) Por hipótesis, $\mathcal{CB}(X)$ es totalmente acotado

Dado $\varepsilon > 0$, existe $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{CB}(X)$ tal que $\mathcal{CB}(X) = \bigcup_{i=1}^n B(A_i, \varepsilon)$ y $a_i \in A_i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea $x \in X$, entonces $\{x\} \in \mathcal{CB}(X)$, se sigue que $\{x\} \in \bigcup_{i=1}^n B(A_i, \varepsilon)$ por lo que existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $x \in B(A_i, \varepsilon)$, entonces $d_H(\{x\}, A_i) < \varepsilon$. Luego, por la proposición 2.129 implica que $a_i \in A_i$, entonces $d(a_i, x) < \varepsilon$, es decir $x \in B(a_i, \varepsilon)$, entonces $x \in \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Así resulta que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Por lo tanto, X es totalmente acotado.

Observación. Definimos a $F_n(X) = \{A \subseteq X/A \neq \emptyset \text{ y } \text{card}(A) \leq n\}$ como la subcolección de $\mathcal{CB}(X)$ de conjuntos finitos no vacíos de cardinal acotado por n .

Afirmamos que $F_n(X) \subset \mathcal{CB}(X)$. En efecto, sea $A \in F_n(X)$, donde $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ para algún $m \leq n$, por la proposición 2.45, se sigue que A es cerrado en X , notemos que A es acotado no vacío, por lo tanto $F_n(X) \subset \mathcal{CB}(X)$ (Grijalva, 2013).

Proposición 2.141. Dado un espacio métrico (X, d) y sea la aplicación $f: X \rightarrow F_1(X)$ definida por $f(x) = \{x\}$. Entonces, f es una isometría entre X y $F_1(X)$ dotada con la métrica de Hausdorff (Grijalva, 2013).

Demostración. Por definición $f(x) = \{x\}$, para cada $x \in X$, luego por la proposición 2.129, $d(a, b) = d_H(\{a\}, \{b\}) = d_H(f(a), f(b))$ mostrando que f es una isometría entre $F_1(X) = \{\{x\}: x \in X\}$ y X . Por lo tanto, $F_1(X)$ es isométrico a X .

Proposición 2.142. Si (X, d) es un espacio métrico, entonces $F_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Evidentemente $F_1(X) \subset \overline{F_1(X)}$, resta probar que $\overline{F_1(X)} \subset F_1(X)$.

En efecto, sea $A \in \overline{F_1(X)}$, por el teorema 2.40 existe $\{A_n\} \subset F_1(X)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Si $A \notin F_1(X)$ entonces $A \neq \{x\}$. Considerando $x, y \in A$ con $x \neq y$ entonces $d(x, y) = r > 0$

Así, para $\frac{r}{2} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(A_n, A) < \frac{r}{2}$ para cada $n \geq N$. Por la proposición

2.128, se cumple que $A \subset \mathcal{N}(\frac{r}{2}, A_n)$.

Luego, si $A_n = \{z_n\}$ entonces $A \subset \mathcal{N}(\frac{r}{2}, \{z_n\})$ obteniendo $d(x, z_n) < \frac{r}{2}$ y $d(y, z_n) < \frac{r}{2}$.

Así, por la desigualdad triangular $d(x, y) \leq d(x, z_n) + d(z_n, y) < r$ y se sigue que

$d(x, y) < r$, que es una contradicción. Por lo tanto, $A \in F_1(X)$ demostrando que $F_1(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$.

Observación. Definimos $\mathcal{K}(X) = \{A \subseteq X / A \text{ es compacto no vacío}\}$.

Proposición 2.143. Dado un espacio métrico completo (X, d) , $\mathcal{K}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Solo resta ver que $\overline{\mathcal{K}(X)} \subset \mathcal{K}(X)$. En efecto, sea $A \in \overline{\mathcal{K}(X)}$, como

$\overline{\mathcal{K}(X)} \subseteq \mathcal{CB}(X)$, tenemos que A es cerrado en X . Como X es completo entonces A es completo y por el teorema 2.40, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{K}(X)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$.

Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(A_n, A) < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $n \geq N$. Luego, por la proposición 2.128,

tenemos $A \subset \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subset \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A)$. Si $a \in A$ entonces $a \in \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y con ello

$d(a, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, luego existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como A_n es compacto, existen

a_1, a_2, \dots, a_n tal que $A_n \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon/2)$. Luego, para cada $a_n \in A_n$ existe a_i tal que

$a_n \in B(\frac{\varepsilon}{2}, a_i)$ lo cual implica que $d(a_n, a_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Por la desigualdad triangular tenemos

$d(a, a_i) \leq d(a, a_n) + d(a_n, a_i) < \varepsilon$, resultando que $a \in B(a_i, \varepsilon)$, mostrando que

$A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon)$. Así, A es totalmente acotado y completo y por el teorema 2.79, A es compacto, es decir $A \in \mathcal{K}(X)$, mostrando que $\overline{\mathcal{K}(X)} \subset \mathcal{K}(X)$. En consecuencia, $\mathcal{K}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$.

Teorema 2.144. Un espacio métrico (X, d) es completo si y solo si $\mathcal{CB}(X)$ es completo

(Barragán et al., s.f.).

Demostración.

\Rightarrow) Consideremos $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$. Por los teoremas 2.135, 2.137 y 2.139 se sigue que $\lim sup A_n \in \mathcal{CB}(X)$.

Afirmación: $\lim A_n = \lim sup A_n$, es decir, para todo $r > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_H(A_n, \lim sup A_n) < r$ para todo $n \geq N$. Por la Proposición 2.138, para $\{A_n\} \subseteq \mathcal{CB}(X)$

Dado $r > 0$, con $\varepsilon = \frac{r}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $d_H(A_n, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

Consideremos $m \geq N$, entonces para cada $n \geq m$, $d_H(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, luego por la proposición

2.128, se tiene $A_n \subset \mathcal{N}(\frac{\varepsilon}{2}, A_m)$, para cada $n \geq m$, además, por la proposición 2.136, se tiene

$$\lim sup A_n \subseteq \mathcal{N}(\varepsilon, A_m), \text{ luego } \lim sup A_n \subseteq \mathcal{N}\left(\frac{r}{2}, A_m\right) \quad (2.19)$$

Por otro lado, según la proposición 2.138, existe una sucesión $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $m = n_1$ y para

cada $k \in \mathbb{N}$ $n_k < n_{k+1}$ y $d_H(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Nuevamente por la proposición 2.128,

tenemos $A_{n_k} \subset \mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon}{2^k}, A_{n_{k+1}}\right)$. Luego, si $x_{n_1} \in A_m = A_{n_1}$, existe $x_{n_2} \in A_{n_2}$ tal que

$$d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así, existe $x_{n_3} \in A_{n_3}$ tal que $d(x_{n_2}, x_{n_3}) < \frac{\varepsilon}{2^2}$, se sigue $x_{n_4} \in A_{n_4}$ tal que $d(x_{n_3}, x_{n_4}) < \frac{\varepsilon}{2^3}$

Luego, se genera una sucesión $\{x_{n_k}\}$ en X tal que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Si consideramos $s, t \in \mathbb{N}$ con $s < t$, tenemos

$$d(x_{n_s}, x_{n_t}) \leq d(x_{n_s}, x_{n_{s+1}}) + d(x_{n_{s+1}}, x_{n_{s+2}}) + \cdots + d(x_{n_{t-1}}, x_{n_t})$$

$d(x_{n_s}, x_{n_t}) \leq \frac{\varepsilon}{2^s} + \frac{\varepsilon}{2^{s+1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{t-1}} = \sum_{i=s}^{t-1} \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^i$, con $\sum_{i=s}^{t-1} \varepsilon \left(\frac{1}{2}\right)^i \rightarrow 0$ si $s, t \rightarrow \infty$. Luego, $\{x_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en X . Por la completitud de X , existe $x \in X$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x$ si $k \rightarrow \infty$. Obsérvese que $d(x_{n_1}, x_{n_i}) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $x_{n_k} \in A_{n_k}$ y $x_{n_k} \rightarrow x$ tenemos que $x \in \lim sup A_n$.

Por otro lado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $k \geq N$, entonces

$$d(x_{n_1}, x) \leq d(x_{n_1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \text{ Así } d(x_{n_1}, x) < \varepsilon, \text{ de donde}$$

$x_{n_1} \in \mathcal{N}(\varepsilon, \lim sup A_n)$, con lo cual $A_{n_1} = A_m \subset \mathcal{N}(\varepsilon, \lim sup A_n)$

$$\text{Luego, } A_m \subset \mathcal{N}\left(\frac{r}{2}, \lim sup A_n\right). \quad (2.20)$$

De (2.19) y (2.20), por la proposición 2.128, se concluye que $d_H(A_m, \lim sup A_n) < r$, es decir, $d_H(A_n, \lim sup A_n) < r$, para cada $n \geq N$, de manera que $\{A_n\}$ converge a $\lim sup A_n$ en $\mathcal{CB}(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{CB}(X)$ es completo.

\Leftarrow) Por hipótesis $\mathcal{CB}(X)$ es completo. Por la proposición 2.142, se tiene que $F_1(X)$ cerrado en $\mathcal{CB}(X)$, en consecuencia $F_1(X)$ es completo.

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de Cauchy en $F_1(X)$ entonces $\{A_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{CB}(X)$, por la completitud de $F_1(X)$ existe $A \in F_1(X)$ tal que $A_n \rightarrow A$ en $F_1(X)$, pero A es un singleton $\{x\}$ es decir $\{x_n\} \rightarrow \{x\}$ en d_H . Luego, por la proposición 2.129, se tiene que $x_n \rightarrow x$ en X . En consecuencia, X es completo.

Proposición 2.145. Dado un espacio métrico completo (X, d) , entonces $\mathcal{K}(X)$ es completo (Grijalva, 2013).

Demostración. Por hipótesis X es completo y por el teorema anterior $\mathcal{CB}(X)$ es completo.

Luego, por la proposición 2.143, $\mathcal{K}(X)$ es cerrado en $\mathcal{CB}(X)$ y por el teorema 2.67, $\mathcal{K}(X)$ es completo.

Proposición 2.146. Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\{A_n\} \subseteq \mathcal{CB}(X)$ una sucesión de Cauchy. Si $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim sup A_n$.

(Barragán et al., s.f.).

Demostración. Por la afirmación del teorema 2.144, se tiene que $\lim A_n = \lim sup A_n$ en $\mathcal{CB}(X)$. Veamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim sup A_n$. En efecto, sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, luego $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si B es un abierto en X con $x \in B$, entonces $B \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \lim sup A_n$.

Tomemos $x \in \lim sup A_n$. Supongamos que $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (h.a) entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_m$, es decir $x \in X \setminus A_m$. Considerando $B = X \setminus A_m$ entonces B es un conjunto abierto en X y $x \in B$, así existe $m_0 \in \mathbb{N}$, con $m_0 > m$ tal que $B \cap A_{m_0} \neq \emptyset$.

Tomando $z \in B \cap A_{m_0}$, se sigue que $z \in X \setminus A_m$ y $z \in A_{m_0}$ y siendo $m_0 > m$, entonces $A_{m_0} \subset A_m$. Así $z \in A_m$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

En consecuencia, $\lim sup A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ concluyendo que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim sup A_n = \lim A_n.$$

Proposición 2.147. Un espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si $\mathcal{CB}(X)$ es compacto (Barragán et al., s.f.).

Demostración.

\Rightarrow) Como X es compacto, por el teorema 2.77 se sigue que X es secuencialmente compacto, luego por la proposición 2.82, X es totalmente acotado y completo y por los teoremas 2.140 y 2.144, se sigue que $\mathcal{CB}(X)$ es totalmente acotado y completo.

En consecuencia $\mathcal{CB}(X)$ es compacto.

\Leftarrow) Por hipótesis $\mathcal{CB}(X)$ es compacto. Por el teorema 2.77, se sigue que $\mathcal{CB}(X)$ es secuencialmente compacto, así por la proposición 2.82, $\mathcal{CB}(X)$ es totalmente acotado y completo. Luego, por los teoremas 2.140 y 2.144, se sigue que X es totalmente acotado y completo, por lo tanto, compacto.

Observación. Sea (X, d) un espacio métrico y X^n el n-ésimo producto topológico de X .

Defínase d_π por:

$$d_\pi((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \dots, d(x_n, y_n)\}$$

para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$ (Grijalva, 2013).

Proposición 2.148. Si (X, d) un espacio métrico y X^n su producto topológico.

Sea $f_n: (X^n, d_\pi) \rightarrow (F_n(X), d_H)$ una función definida por:

$f_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, para todo $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$, entonces f_n es continua y sobreyectiva (Grijalva, 2013).

Demostración. Claramente f_n es sobreyectiva. Veamos que f_n es continua. En efecto,

sean $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ y $\varepsilon > 0$, considerando $\delta = \varepsilon$ tenemos que si $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$

$$d_\pi((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) < \delta \rightarrow \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2), \dots, d(x_n, y_n)\} < \varepsilon,$$

entonces $d(x_i, y_i) < \varepsilon$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Afirmación: $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{N}(\varepsilon, \{y_1, y_2, \dots, y_n\})$.

Sea $x_j \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, observe que

$$d(x_j, \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) = \inf\{d(x_j, y_i) : i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \leq d(x_j, y_j) < \varepsilon.$$

Así, $d(x_j, \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) < \varepsilon$, de manera que $x_j \in \mathcal{N}(\varepsilon, \{y_1, y_2, \dots, y_n\})$, obteniendo la

inclusión $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{N}(\varepsilon, \{y_1, y_2, \dots, y_n\})$.

De forma análoga, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathcal{N}(\varepsilon, \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$. Luego, por la proposición 2.128,

se consigue $d_H(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) < \varepsilon$.

En consecuencia, $d_H(f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)) < \varepsilon$, mostrando la continuidad de f_n en X^n .

Proposición 2.149. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{F}(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$

entonces $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{CB}(X)$ (Grijalva, 2013).

Demostración. Sea $A \in \mathcal{CB}(X)$ y $\varepsilon > 0$, como X es compacto y A es cerrado en X , por la proposición 2.73, se sigue que A es compacto. Luego, dado el cubrimiento abierto $\bigcup_{a \in A} \mathcal{N}(\varepsilon, a)$ A existe un subcubrimiento finito $\{\mathcal{N}(\varepsilon, a_1), \dots, \mathcal{N}(\varepsilon, a_n)\}$. Así, por la

proposición 2.124, se tiene que $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{N}(\varepsilon, a_i) = \mathcal{N}(\varepsilon, \{a_1, a_2, \dots, a_n\})$, obteniendo la inclusión $A \subset \mathcal{N}(\varepsilon, \{a_1, a_2, \dots, a_n\})$.

Por otro lado, si $a_i \in A$ entonces $d(a_i, A) < \varepsilon$, con lo cual se consigue

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathcal{N}(\varepsilon, A)$, Luego, por la proposición 2.128, se obtiene

$d_H(A, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}) < \varepsilon$, de donde $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset B(\varepsilon, A)$, y como

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in F_n(X) \subset \mathcal{F}(X)$, entonces se obtiene que $B(\varepsilon, A) \cap \mathcal{F}(X) \neq \emptyset$.

Por lo tanto $\overline{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{CB}(X)$.

Proposición 2.150. Si (X, d) es un espacio métrico conexo, entonces $F_n(X)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $f_n: (X^n, d_\pi) \rightarrow (F_n(X), d_H)$, definida en la observación precedente a la proposición 2.148. Como X es conexo, por el teorema 2.42, se tiene que X^n es conexo. Luego por la proposición 2.148, f_n es continua y sobreyectiva, y por el teorema 2.53, se concluye que $F_n(X)$ es conexo.

Teorema 2.151. En todo espacio métrico compacto (X, d) , el conjunto $F_n(X)$ es compacto (Grijalva, 2013).

Demostración. Como f_n es continua y X es compacto, por el teorema 2.74, se tiene que X^n es compacto, Finalmente, por la proposición 2.148 y el teorema 2.75, $F_n(X)$ es compacto.

Teorema 2.152. Sea (X, d) un espacio métrico conexo y compacto. Entonces $\mathcal{CB}(X)$ es conexo (Grijalva, 2013).

Demostración. Por hipótesis X es conexo, por la proposición 2.150, $F_n(X)$ es conexo para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $F_n(X) = \{A \subset X / A \text{ es finito, no vacío, } |A| \leq n\}$ entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(X) \neq \emptyset$ así $\mathcal{F}(X) = \bigcup \{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ es conexo y por el teorema 2.41, $\overline{\mathcal{F}(X)}$ es conexo. Finalmente, por la proposición 2.149, se sigue que $\overline{\mathcal{F}(X)} = \mathcal{CB}(X)$, mostrando que $\mathcal{CB}(X)$ es conexo.

2.18. Aplicaciones contractivas sobre $\mathcal{K}(X)$

Estudiaremos las aplicaciones contractivas en conjuntos compactos sobre una métrica

de Hausdorff mostrando algunos ejemplos, puesto que son necesarias para generar fractales.

Definición 2.153. Consideremos un espacio métrico (X, d) , $V \subset X$ no vacío y $f: V \rightarrow X$ una aplicación. Decimos que f es una *contracción débil*, si para todo $x, y \in V$ con $x \neq y$ se cumple $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Definición 2.154. Sea (X, d) un espacio métrico y $V \subset X$ no vacío. Una aplicación $f: V \rightarrow X$, es llamada *contractiva de modulo k* , si existe $k \in (0, 1)$ tal que para todo $x, y \in V$:

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad (\text{Llorente, s.f.})$$

Teorema 2.155. Sea (X, d) es un espacio métrico completo y $f: X \rightarrow X$ una aplicación contractiva de modulo k . Si x es el punto fijo de la contracción, entonces para todo $y \in X$ se verifican: (Adame, 2005)

$$a) x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y).$$

$$b) d(x, y) \leq \frac{1}{1-k} d(y, f(y)).$$

Demostración. a) Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ con $f^n(y) = y_n$.

Para $p \geq 1$, por la definición 2.107, tenemos $d(y_p, y_{p+1}) \leq kd(y_{p-1}, y_p)$, y además

$d(f(y_{p-1}), f(y_p)) \leq kd(y_{p-1}, y_p)$. Luego, se tiene la desigualdad:

$$d(y_p, y_{p+1}) = d(f(y_{p-1}), f(y_p)) \leq kd(y_{p-1}, y_p) \quad (2.21)$$

Por inducción, se sigue que $d(y_p, y_{p+1}) \leq k^p d(y_0, y_1)$.

Por la desigualdad triangular cuando $p < q$, se cumple:

$$\begin{aligned} d(y_p, y_q) &\leq d(y_p, y_{p+1}) + d(y_{p+1}, y_{p+2}) + \dots + d(y_{q-1}, y_q) \\ &\leq (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1})d(y_0, y_1) = \sum_{i=p}^{q-1} k^i d(y_0, y_1) = \frac{k^p - k^q}{1-k} d(y_0, y_1) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Si $p, q \rightarrow \infty$ entonces $d(y_p, y_q) \rightarrow 0$. Así, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X , luego, existe $x \in X$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$. Por la continuidad de f tenemos:

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n), \text{ y en consecuencia } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1}.$$

Finalmente, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(y)$, mostrando que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y)$.

b) Por la desigualdad (2.22), tenemos que $d(y_p, y_q) \leq \frac{k^p - k^q}{1-k} d(y_0, y_1)$, si $p < q$

$$\text{Tomando } p = 0, d(y_0, y_q) \leq \frac{1-k^q}{1-k} d(y_0, y_1)$$

Si $q \rightarrow \infty$, $\lim_{q \rightarrow \infty} d(y_0, y_q) = d\left(y_0, \lim_{q \rightarrow \infty} y_q\right) = d(y_0, x) \leq \frac{1}{1-k} d(y_0, y_1)$, de donde:

$$d(y_0, x) \leq \frac{1}{1-k} d(y_0, f(y_0)), y_0 \in X.$$

Teorema 2.156. Si $f: X \rightarrow X$ es una aplicación contractiva en el espacio métrico (X, d) con factor de contracción k , entonces la aplicación:

$$f: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X), \quad f(A) \in \mathcal{K}(X), \text{ para cada } A \in \mathcal{K}(X)$$

Es contractiva en $(\mathcal{K}(X), d_H)$ con factor de contracción k (Hernández, 2012).

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{K}(X)$, entonces:

$$\begin{aligned} \omega(f(A), f(B)) &= \sup\{\inf\{d(f(a), f(b)): b \in B/a \in A\}\} \\ &\leq \sup\{\inf\{kd(a, b): b \in B\}: a \in A\}, \text{ donde } 0 < k < 1 \end{aligned}$$

Como $k > 0$, tenemos que:

$$\omega(f(A), f(B)) \leq k\omega(A, B) \quad (2.23)$$

Por otro lado, intercambiando los roles de A y B entonces

$$\omega(f(B), f(A)) \leq k\omega(B, A) \quad (2.24)$$

Como $d_H(f(A), f(B)) = \max\{\omega(f(A), f(B)), \omega(f(B), f(A))\}$, de (2.23) y (2.24) tenemos:

$$d_H(f(A), f(B)) \leq \max\{k\omega(A, B), k\omega(B, A)\} = k\max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\} = kd_H(A, B)$$

De donde, $d_H(f(A), f(B)) \leq kd_H(A, B)$.

Por lo tanto, f es una contracción en $(\mathcal{K}(X), d_H)$ con factor de contracción k .

Teorema 2.157. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{f_n\}_{n=1}^m$ un conjunto de aplicaciones contractivas en $(\mathcal{K}(X), d_H)$ con factor de contracción k_n para cada $n = 1, 2, \dots, m$. Si la

aplicación $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, definida por $F(A) = \bigcup_{n=1}^m f_n(A)$, $\forall A \in \mathcal{K}(X)$, entonces

F es una aplicación contractiva con factor de contracción $k = \max_{1 \leq i \leq m} \{k_i\}$ (Ojeda, 2012).

Demostración. Consideremos $A, B \in \mathcal{K}(X)$. Procediendo por inducción, para $m = 2$

$$\begin{aligned} d_H(F(A), F(B)) &= d_H(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B)) \\ &\leq \max\{d_H(f_1(A), f_1(B)), d_H(f_2(A), f_2(B))\} \\ &\leq \max\{k_1 d_H(A, B), k_2 d_H(A, B)\} \leq k d_H(A, B) \end{aligned}$$

$d_H(F(A), F(B)) \leq k d_H(A, B)$, debido al teorema 2.130. Así, F es contractiva con factor de contracción $k = \max\{k_1, k_2\}$.

Supongamos que se cumple para $m = s$ con $k' = \max_{1 \leq i \leq s} \{k_i\}$ (h.i)

Para $m = s + 1$ tenemos $d_H(F(A), F(B)) = d_H(\bigcup_{n=1}^{s+1} f_n(A), \bigcup_{n=1}^{s+1} f_n(B))$

$$d_H(F(A), F(B)) = d_H((\bigcup_{n=1}^s f_n(A)) \cup f_{s+1}(A), (\bigcup_{n=1}^s f_n(B)) \cup f_{s+1}(B)),$$

Por el teorema 2.130 y la hipótesis inductiva, tenemos:

$$\begin{aligned} d_H(F(A), F(B)) &\leq \max\{d_H(\bigcup_{n=1}^s f_n(A), \bigcup_{n=1}^s f_n(B)), d_H(f_{s+1}(A), f_{s+1}(B))\} \\ &\leq \max\{k' d_H(A, B), k_{s+1} d_H(A, B)\} \leq k d_H(A, B) \end{aligned}$$

Luego, F es una aplicación contractiva para $m = s + 1$, con $k = \max_{1 \leq i \leq s+1} \{k_i\}$

En consecuencia, F es una aplicación contractiva para todo m , con $k = \max_{1 \leq i \leq m} \{k_i\}$

La aplicación contractiva contrae una figura, es decir acerca los puntos de la imagen, mediante transformaciones elementales o transformaciones afines.

Ejemplos. a) El triángulo de Sierpinski $T \subset \mathbb{R}^2$, originado a partir de un triángulo equilátero de lado 1.

Sea $f_i(T) = T_i$, $1 \leq i \leq 3$, donde $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 = f_1(T) \cup f_2(T) \cup f_3(T)$

Los vértices del triángulo son los puntos $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0.5, 0.87)$

Aplicando homotecia a $f_1(x, y) = (\frac{x}{3}, \frac{y}{3})$, tenemos que A permanece en el origen

$$f_1(1,0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \rightarrow D = \left(\frac{1}{3}, 0\right); f_1(0.5, 0.87) = \left(\frac{0.5}{3}, \frac{0.87}{3}\right) \rightarrow E = \left(\frac{0.5}{3}, \frac{0.87}{3}\right)$$

Por otro lado, f_2 es una homotecia seguida de una traslación $f_2(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

Se obtiene $G = \left(\frac{2}{3}, 0\right), B = (1,0), F = \left(\frac{2.5}{3}, \frac{0.87}{3}\right)$

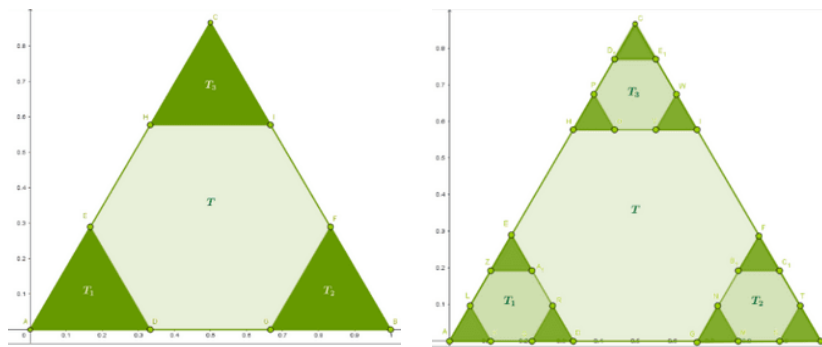
La aplicación f_3 es una homotecia seguida de una traslación vertical dada por

$$f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\cos 60^\circ, \frac{2}{3}\sen 60^\circ\right) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Entonces $H = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), I = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), C = (0.5, 0.87)$ (Adame, 2005).

Figura 30.

El triángulo de Sierpinski



b) La curva de Koch $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$

Sea $f_i(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_i, 1 \leq i \leq 4$, donde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 = f_1(\mathcal{C}) \cup f_2(\mathcal{C}) \cup f_3(\mathcal{C}) \cup f_4(\mathcal{C})$

Los vértices de la curva son $A = (0,0), B = (1,0)$

Aplicando homotecia a $f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$, entonces A permanece en el origen

$$f_1(1,0) = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \rightarrow C = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

Para f_2 se aplica homotecia de razón $1/3$: $H = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$;

Rotación de 60° $R = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sen 60^\circ \\ \sen 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ y traslación: $t = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$f_2(x, y) = RH \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sen 60^\circ \\ \sen 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{x\cos 60^\circ - y\sen 60^\circ + 1}{3}, \frac{x\sen 60^\circ + y\cos 60^\circ}{3}\right), \text{ si } (x, y) = (1,0) \rightarrow D = \left(\frac{3}{6}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

Para f_3 se aplica una traslación $t = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cos 30^\circ, \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} 30^\circ\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

Entonces $f_3(x, y) = \begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & -\operatorname{sen}(-60^\circ) \\ \operatorname{sen}(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix}$

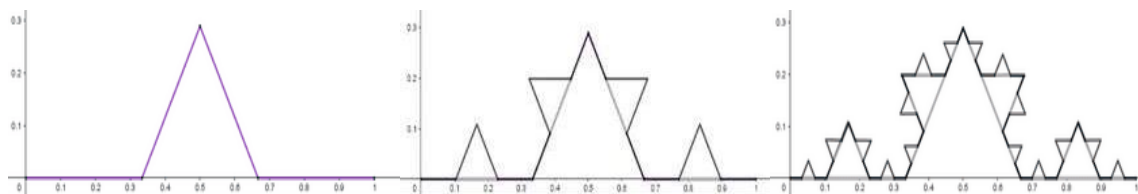
$f_3(x, y) = \left(\frac{x \cos 60^\circ + y \operatorname{sen} 60^\circ}{3} + \frac{1}{2}, \frac{-x \operatorname{sen} 60^\circ + y \cos 60^\circ}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, si $(x, y) = (1, 0) \rightarrow E = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

Luego $f_4(x, y) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{3}\right)$, si $(x, y) = (1, 0) \rightarrow B = (1, 0)$

(Adame, 2005).

Figura 31.

La curva de Koch es semejante a la curva de cada una de sus partes.



2.19. Sistema Iterado de Funciones

En esta sección, se define el concepto de sistema iterado de funciones, el cual constituye una herramienta matemática primordial y aplicada en la generación de fractales.

Definición 2.158. Se define por un *Sistema Iterado de Funciones* (SIF) a una colección $\{(X, d): f_1, f_2, \dots, f_n\}$, donde (X, d) es un espacio métrico completo y $f_i: (X, d) \rightarrow (X, d)$ es una función contractiva en (X, d) para cada $i = 1, 2, \dots, n$. La *razón de contractividad* del SIF se define por $k = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ donde $0 \leq k < 1$ (Salazar, 2018).

Ejemplos.

- Sea $f_i(T) = T_i, 1 \leq i \leq 3$, donde $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 = f_1(T) \cup f_2(T) \cup f_3(T)$, son aplicaciones contractivas que generan el triángulo de Sierpinski, definidos por

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right), f_2(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3}\right), f_3(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \frac{y}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Es un SIF con factor de contracción de $\frac{1}{3}$. Así, $T = \bigcup_{i=1}^3 f_i(T)$.

- Sea $f_i(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_i$, $1 \leq i \leq 4$, donde $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 = f_1(\mathcal{C}) \cup f_2(\mathcal{C}) \cup f_3(\mathcal{C}) \cup f_4(\mathcal{C})$, son aplicaciones contractivas que transforman la curva de Koch y están definidas como:

$$f_1(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right), f_2(x, y) = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/3 \\ y/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_3(x, y) = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x/3 \\ y/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix} \text{ y } f_4(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3}\right),$$

es un SIF con factor de contracción de $\frac{1}{3}$. Luego, $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^4 f_i(\mathcal{C})$.

Teorema 2.159. Sean $\{(X, d): f_1, f_2, \dots, f_n\}$ un SIF con factor de contracción k , donde

$0 < k < 1$, entonces:

- La aplicación $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, definido por $F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$, para cada $A \in \mathcal{K}(X)$ es contractiva en el espacio métrico completo $(\mathcal{K}(X), d_H)$ con factor de contracción k , es decir $d_H(F(B), F(C)) \leq k d_H(B, C)$, para todo $B, C \in \mathcal{K}(X)$.

- Existe un único conjunto $A \in \mathcal{K}(X)$ tal que $F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A) = A$. Además,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B), \text{ para cada } B \in \mathcal{K}(X) \text{ (Adame, 2005).}$$

Demostración.

- Por hipótesis, (X, d) es un espacio métrico completo y $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ son contracciones en X . Así existe $0 < k < 1$ tal que $d(f_i(x), f_i(y)) \leq k d(x, y)$ para todo $x, y \in X$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Como $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ donde $F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$, $A \in \mathcal{K}(X)$, consideremos $A, B \in \mathcal{K}(X)$,

luego para todo $x \in F(A)$, existe un índice i y algún $a \in A$ tal que $x = f_i(a)$.

$$\text{Luego, } d(x, F(B)) = \inf_{y \in F(B)} d(x, y) = \inf_{y \in \bigcup_{i=1}^n f_i(B)} d(f_i(a), y).$$

$$\text{Como } f_i(B) \subseteq F(B) \rightarrow \inf_{y \in F(B)} d(f_i(a), y) \leq \inf_{y \in f_i(B)} d(f_i(a), y) = \inf_{b \in B} d(f_i(a), f_i(b))$$

$$\text{y siendo } f_i \text{ una contracción con factor } k \text{ tenemos } \inf_{b \in B} d(f_i(a), f_i(b)) \leq k \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Así, $d(x, F(B)) \leq k \inf_{b \in B} d(a, b)$, tomando supremo sobre $x \in F(A)$ obtenemos:

$\sup_{x \in F(A)} \{d(x, F(B))\} \leq k \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \rightarrow \omega(F(A), F(B)) \leq k\omega(A, B)$, con ello

$$d_H(F(A), F(B)) = \max\{\omega(F(A), F(B)), \omega(F(B), F(A))\} \leq k \max\{\omega(A, B), \omega(B, A)\}$$

Así, $d_H(F(A), F(B)) \leq k d_H(A, B)$. Por tanto F es una contracción en $(\mathcal{K}(X), d_H)$.

b) Como $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ es contractiva, para cada $A, B \in \mathcal{K}(X)$ tenemos

$$d_H(F(A), F(B)) \leq k d_H(A, B) \text{ con } 0 < k < 1. \text{ Así, existe un único conjunto fijo}$$

$A \in \mathcal{K}(X)$ tal que $F(A) = A$. Afirmamos que $d_H(F^n(B), A) \leq k^n d_H(B, A)$, para todo $n \geq 0$

En efecto, procediendo por inducción. Si $n = 0$, $d_H(F^0(B), A) = d_H(B, A) = k^0 d_H(B, A)$.

Supongamos que es válida para $n - 1$, es decir $d_H(F^{n-1}(B), A) \leq k^{n-1} d_H(B, A)$

$$\text{Para } n \text{ tenemos, } d_H(F^n(B), A) = d_H(F(F^{n-1}(B)), F(A)) \leq k d_H(F^{n-1}(B), A)$$

$$\leq k k^{n-1} d_H(B, A) = k^n d_H(B, A).$$

Luego, $d_H(F^n(B), A) \leq k^n d_H(B, A)$, tomando $n \rightarrow \infty$ resulta que $d_H(F^n(B), A) \rightarrow 0$. Por lo

tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = A$, para cada $B \in \mathcal{K}(X)$.

Observación. El conjunto fijo $A \in \mathcal{K}(X)$, esta conforme al teorema 2.155.

Definición 2.160. Dado un espacio métrico completo (X, d) , un conjunto $A \in \mathcal{K}(X)$ es llamado *atractor*, si existe un SIF $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ tal que $F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A) = A$ (Adame, 2005).

Observación. Se denomina atractor al conjunto A puesto que atrae todas las iteraciones $F^n(B)$, para cada $B \in \mathcal{K}(X)$.

Definición 2.161. Sea $\{X, \{f_1, f_2, \dots, f_n\}\}$ un sistema iterado de funciones y A su conjunto atractor. Decimos que A es *autosimilar* si existen aplicaciones contractivas $f_i: X \rightarrow X$ tales que $A = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$, y cada f_i es una similaridad, es decir se satisface la condición $d(f_i(x), f_i(y)) = k_i d(x, y)$, donde $0 < k_i < 1$ (Villegas, 2014).

Observación. Cada aplicación f_i genera una copia reducida del conjunto total A y al unir todas estas copias se obtiene el conjunto A .

Se denomina fractal a un objeto geométrico que presenta autosimilitud, también es llamado atractor.

Según Benoît Mandelbrot, un objeto es autosimilar o autosemejante si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo, se presentan a diferentes escalas y pueden estar ligeramente deformadas.

Ejemplo. El conjunto de Cantor.

Sea $\{\mathbb{R}: f_1, f_2\}$ un SIF y $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, donde $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A)$, para cada

$A \in \mathcal{K}(X)$, con $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ y $C_0 = [0,1] \in \mathcal{K}(X)$.

Definamos $C_1 = F(C_0) = f_1([0,1]) \cup f_2([0,1]) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y

$C_2 = F(C_1) = f_1(C_1) \cup f_2(C_1) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ y así sucesivamente. Se

obtiene la sucesión $C_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, denominado polvo de Cantor.

Cada conjunto C_n se divide en 2^n intervalos disjuntos y cerrados, cada intervalo posee una longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, se representan por C_{n+1} , y se cumple que $C_{n+1} \subset C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, la longitud total de C_n es la suma de las longitudes de los intervalos dados por $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. De esta forma, el límite de la longitud de C_n es $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Observación. El conjunto de Cantor es de medida nula, es decir para cada $\varepsilon > 0$, existe un recubrimiento de C formado por un número finito de intervalos cerrados tal que la suma de longitudes de los intervalos es menor que ε , el cual implica que el conjunto de Cantor no contiene ningún intervalo de longitud positiva.

Figura 32.

Construcción del conjunto de Cantor.



Se observa que $C_{n+1} \subset C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $C_{n+1} \subset \overline{C_n}$, por la Proposición 2.119, se tiene que $\omega(C_{n+1}, C_n) = 0$. Luego $d_H(C_n, C_{n+1}) = \max\{\omega(C_{n+1}, C_n), \omega(C_n, C_{n+1})\}$
 $d_H(C_n, C_{n+1}) = \max\{0, \omega(C_n, C_{n+1})\} = \omega(C_n, C_{n+1})$.

Así, $d_H(C_0, C_1) = \omega(C_0, C_1) = \sup_{y \in C_0} \left\{ \inf_{x \in C_1} d(y, x) \right\}$. Notemos que $x = 1/3$ e $y \in \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$

Entonces y es máximo en el centro del tercio eliminado, resultando $y = \frac{1}{6}$

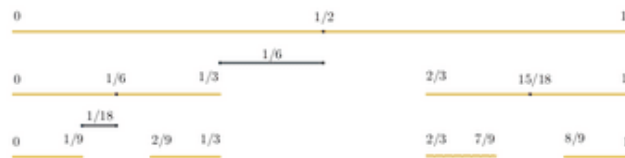
Luego, $\sup_{y \in C_0} \left\{ \inf_{x \in C_1} d(y, x) \right\} = \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}$, por lo tanto $d_H(C_0, C_1) = \frac{1}{6}$, con el mismo análisis

se obtiene que $d_H(C_1, C_2) = \omega(C_1, C_2) = \frac{1}{6 \cdot 3}$, $d_H(C_2, C_3) = \omega(C_2, C_3) = \frac{1}{6 \cdot 3^2}$,

De forma general, se tiene que $d_H(C_n, C_{n+1}) = \omega(C_n, C_{n+1}) = \frac{1}{6 \cdot 3^n}$.

Figura 33.

Distancia entre C_n y C_{n+1} del conjunto de Cantor.



Afirmación: $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(\mathbb{R})$.

En efecto si $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$, entonces $d_H(C_n, C_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d_H(C_i, C_{i+1})$

Luego $d_H(C_n, C_m) \leq \frac{1}{6 \cdot 3^n} + \frac{1}{6 \cdot 3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{6 \cdot 3^{m-1}} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{m-1}} \right)$

Si $n, m \rightarrow \infty$ entonces $d_H(C_n, C_m) \rightarrow 0$. Por lo tanto $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(\mathbb{R})$. Luego, por la proposición 2.145, siendo \mathbb{R} es completo entonces $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ es completo.

En consecuencia, por la proposición 2.146 y el teorema 2.159, se concluye que

$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C$, el cual es el atractor del SIF (Grijalva, 2013).

Ejemplo. El triángulo de Sierpinski.

Sea $\{\mathbb{R}^2: f_1, f_2, f_3\}$ un SIF y $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, donde $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A)$, para

cada $A \in \mathcal{K}(X)$, siendo $f_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$, $f_2(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

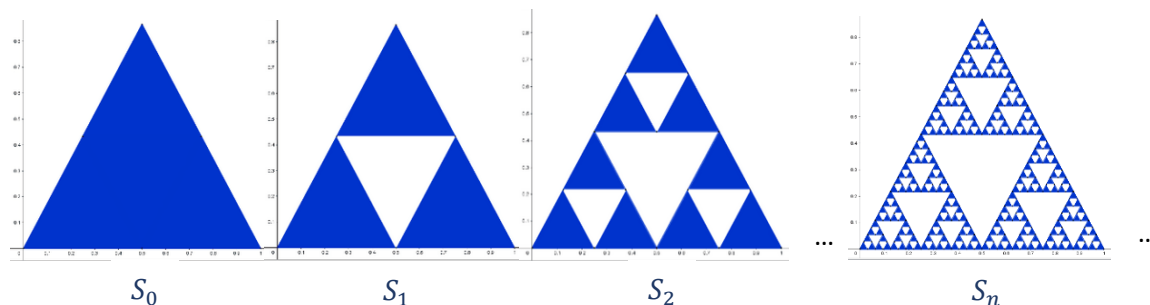
Sea S_0 el triángulo equilátero de lado 1, cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y

consideremos $S_1 = F(S_0)$, entonces sus respectivos vértices son $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Sea $S_2 = F(S_1)$, cuyos vértices son: $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $\left(\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $\left(\frac{3}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$, $\left(\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ y $\left(\frac{5}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$. Así sucesivamente, obtenemos el atractor del SIF, llamado triángulo de Sierpinski.

Figura 34.

Construcción del triángulo de Sierpinski.



Cada conjunto S_n consta de 3^n triángulos de lados 2^{-n} . El área del conjunto S_n es

$$\text{Área}(S_n) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot l \cdot \text{sen}(60^\circ)}{2} = \frac{(2^{-n})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}, \text{ donde } b \text{ es la base, } h \text{ la altura y } l \text{ es su lado.}$$

Como en cada iteración obtenemos 3^n triángulos, entonces $3^n \cdot \text{Área}(S_n) = 3^n \cdot \frac{(2^{-n})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Por consiguiente, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_T(S_n) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el área del triángulo de Sierpinski

se aproxima a cero. En consecuencia $S_{n+1} \subset S_n$.

Como $S_{n+1} \subset \overline{S_n}$, por la Proposición 2.119, tenemos $\omega(S_{n+1}, S_n) = 0$. Así,

$$d_H(S_n, S_{n+1}) = \max\{\omega(S_{n+1}, S_n), \omega(S_n, S_{n+1})\} = \max\{0, \omega(S_n, S_{n+1})\} = \omega(S_n, S_{n+1})$$

En particular, $d_H(S_0, S_1) = \omega(S_0, S_1) = \sup_{y \in S_0} \left\{ \inf_{x \in S_1} d(y, x) \right\}$. Asimismo, la distancia máxima

entre S_0 y S_1 se alcanza en el baricentro del triángulo central eliminado, ese punto pertenece a

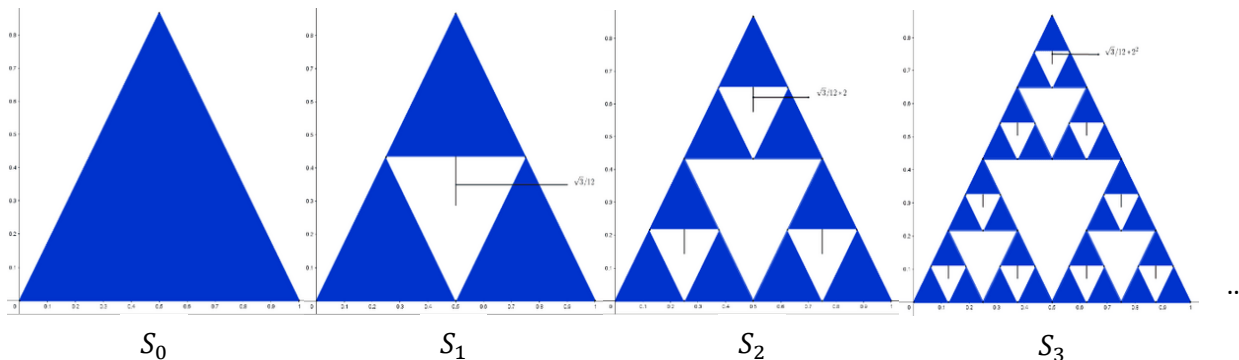
S_0 pero no a S_1 , dicho punto de S_0 es el más distante de S_1 .

Luego, tenemos las relaciones: $d_H(S_0, S_1) = \omega(S_0, S_1) = \frac{\sqrt{3}}{12}$; $d_H(S_1, S_2) = \omega(S_1, S_2) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2}$;

$$d_H(S_2, S_3) = \omega(S_2, S_3) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^2}. \text{ En consecuencia, } d_H(S_n, S_{n+1}) = \omega(S_n, S_{n+1}) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n}.$$

Figura 35.

Distancia entre S_n y S_{n+1} del triángulo de Sierpinski.



Afirmación. $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$. En efecto, si $n, m \in \mathbb{N}$ tal que

$m > n$, entonces tenemos la desigualdad $d_H(S_n, S_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d_H(S_i, S_{i+1})$.

$$\text{Luego, } d_H(S_n, S_m) \leq \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n} + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{n+1}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{m-1}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \right)$$

Si $n, m \rightarrow \infty$ entonces $d_H(S_n, S_m) \rightarrow 0$. Mostrando que $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$.

Por la proposición 2.145, se sigue que $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ es completo. Además, por la proposición 2.146 y el teorema 2.159, tenemos $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \bigcap_{n=1}^\infty S_n = S$, atractor del SIF (Grijalva, 2013).

Ejemplo. La carpeta de Sierpinski.

Se construye dividiendo un cuadrado en otros nueve cuadrados de lado $1/3$ del original y se elimina el que ocupa la posición central. Se repite este proceso en cada uno de los cuadrados restantes de forma indefinida. En cada iteración, el número de cuadrados se ve multiplicado por 8 y cada de los cuadrados es $1/3$ del anterior, obteniéndose un objeto geométrico “hueco”, donde el área se aproxima a cero y el perímetro es infinito (Cruz, 2017).

Consideremos $\{\mathbb{R}^2: f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ un SIF y $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, definido por:

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup f_3(A) \cup f_4(A) \cup f_5(A) \cup f_6(A) \cup f_7(A) \cup f_8(A) \text{ para cada}$$

$$A \in \mathcal{K}(X), \text{ siendo } f_1(x, y) = \frac{1}{3}(x, y); f_2(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{1}{3}, 0\right);$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, 0\right); f_4(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

$$f_5(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); f_6(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(0, \frac{2}{3}\right);$$

$$f_7(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ y } f_8(x, y) = \frac{1}{3}(x, y) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Sea $T_0 = [0,1] \times [0,1]$ y $T_k = F(T_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$.

Por construcción, T_1 es la unión de los 8 subcuadrados cerrados de lado $1/3$ que quedan. En cada uno de ellos, se repite el proceso eliminando el cuadrado central, resultando T_2 , y así sucesivamente obtenemos el atractor del SIF llamado la carpeta de Sierpinski.

Por lo tanto $T_{n+1} \subset T_n$ (Ver figura 36).

Como $T_{n+1} \subset T_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $T_{n+1} \subset \overline{T_n}$, por la proposición 2.119, tenemos

$$\omega(T_{n+1}, T_n) = 0, \text{ así}$$

$$d_H(T_n, T_{n+1}) = \max\{\omega(T_{n+1}, T_n), \omega(T_n, T_{n+1})\} = \max\{0, \omega(T_n, T_{n+1})\} = \omega(T_n, T_{n+1}).$$

En particular, $d_H(T_0, T_1) = \omega(T_0, T_1) = \sup_{y \in T_0} \left\{ \inf_{x \in T_1} d(y, x) \right\}$, afirmando que la distancia

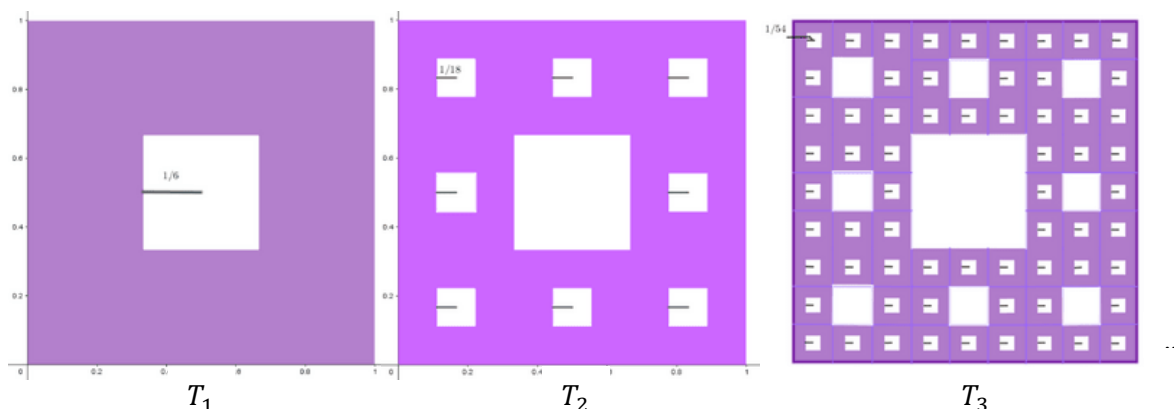
alcanza su máximo valor en el centro del cuadrado eliminado. Por lo tanto

$$d_H(T_0, T_1) = \omega(T_0, T_1) = \frac{1}{6}, d_H(T_1, T_2) = \omega(T_1, T_2) = \frac{1}{6 \cdot 3}, d_H(T_2, T_3) = \omega(T_2, T_3) = \frac{1}{6 \cdot 3^2}, \dots$$

De esta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_H(T_n, T_{n+1}) = \omega(T_n, T_{n+1}) = \frac{1}{6 \cdot 3^n}$.

Figura 36.

Construcción y distancia entre T_n y T_{n+1} de la carpeta de Sierpinski.



Afirmación. $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$. En efecto, si $n, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n, \text{ entonces } d_H(T_n, T_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d_H(T_i, T_{i+1})$$

$$\text{Luego, } d_H(T_n, T_m) \leq \frac{1}{6 \cdot 3^n} + \frac{1}{6 \cdot 3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{6 \cdot 3^{m-1}} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \dots + \frac{1}{3^{m-1}} \right)$$

Si $n, m \rightarrow \infty$ entonces $d_H(T_n, T_m) \rightarrow 0$. En consecuencia, $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$.

Por la proposición 2.145, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ es completo. Finalmente, por la proposición 2.146 y el teorema 2.159, se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = T$, el atractor del SIF (Grijalva, 2013).

2.20. Dimensión fractal.

En esta sección, se expone el concepto de dimensión de Hausdorff la cual es considerada una herramienta para determinar la dimensión fractal de un objeto geométrico, que describe su complejidad visual y matemática.

2.20.1 Dimensión Topológica.

En este apartado se estudia la dimensión topológica de un subconjunto en un espacio n -dimensional. Además, se ilustrarán con ejemplos en que consiste dicha definición.

Definición 2.162. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que A posee *dimensión topológica cero*, si dado $p \in A$ existen entornos $U(p, \varepsilon_j)$ con $\varepsilon_j > 0$ tal que $\partial U(p, \varepsilon_j) \cap A = \emptyset$, para todo $j = 1, 2, 3, \dots$ (Afonso, 2018).

Observación. Diremos que la dimensión topológica es cero de un conjunto B , si dado dos puntos $p, q \in B$ tal que $d(p, q) = d > 0$ se cumple que $\mathcal{B}(p, \varepsilon) \cap B = \emptyset \wedge \mathcal{B}(q, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ para todo $\varepsilon < d$.

Ejemplos.

- Si $x \in C$ es un punto del conjunto de Cantor, entonces existe un entorno U_x tal que $\partial U_x \cap C = \emptyset$. Así, el conjunto de Cantor tiene dimensión topológica cero.

- Si x pertenece a un intervalo, entonces cualquier entorno pequeño de x intersecta al conjunto en más de un punto, por tanto, un intervalo no tiene dimensión topológica cero.

(Afonso, 2018).

Definición 2.163. Decimos que A tiene *dimensión topológica* k , denotada por $\underset{top}{dim}(A) = k$ sí

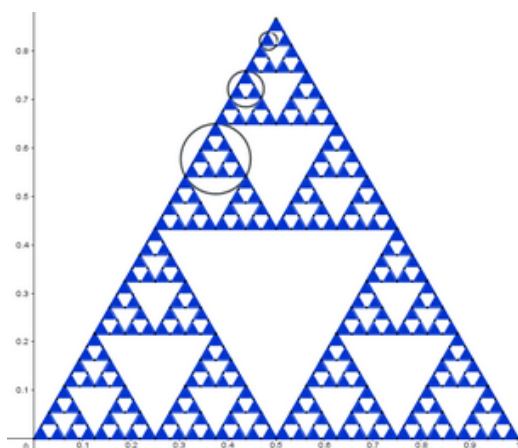
para cada punto de A existen entornos pequeños, cuya frontera intercepta al conjunto A en un subconjunto de dimensión $k - 1$ (Atencia, 2014).

Ejemplos.

- Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo $I = [a, b]$ y $x \in \langle a, b \rangle$, considérese un entorno de x , $\langle x - \varepsilon, x + \varepsilon \rangle$ tal que $\partial(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap I = \{b_1, b_2\}$. Como la frontera del conjunto $\{b_1, b_2\}$ es de dimensión topológica cero entonces $\underset{top}{dim}(I) = 1$.
- Dado un punto x del triángulo de Sierpinski, se traza un círculo que lo contiene, este intercepta al conjunto en tres puntos correspondientes a los vértices de uno de los triángulos pequeños que conforman la construcción. Por lo tanto, la dimensión topológica del triángulo de Sierpinski es 1.

Figura 37.

Entorno de los puntos del triángulo de Sierpinski.



2.20.2 Medida Exterior.

En este apartado, se presentan los conceptos de espacio de medida y de medida exterior, los cuales están fuertemente vinculados a la definición de medida de Hausdorff.

Definición 2.164. Sea X un conjunto no vacío y \mathfrak{F} una familia de subconjuntos de X . Diremos que \mathfrak{F} es una σ -álgebra si se cumplen:

- a) $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$.
- b) Si $A \in \mathfrak{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.
- c) Dada una colección $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}$ entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

Observación. El par (X, \mathfrak{F}) formado por un conjunto X y una σ -álgebra, se denomina espacio medible (Afonso, 2018).

Definición 2.165. Una función $\mu: \mathfrak{F} \rightarrow [0, \infty]$ en un espacio medible es llamada medida si:

- a) $\mu(\emptyset) = 0$.
- b) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es colección de conjuntos disjuntos entonces $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Observación. La triada (X, \mathfrak{F}, μ) conformada por un conjunto X , una σ -álgebra sobre X y una medida μ es llamada espacio de medida.

Consideremos (X, \mathfrak{F}, μ) un espacio de medida y $A \in \mathfrak{F}$, diremos que A es un conjunto nulo si $\mu(A) = 0$ (Afonso, 2018).

Definición 2.166. Dado $X \neq \emptyset$, una medida exterior es una función $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ que satisface:

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- b) Si $A, B \in \mathcal{P}(X)$ con $A \subseteq B$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- c) Dada una colección $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ entonces $\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$ (Afonso, 2018).

Proposición 2.167. Sean $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $g: \mathcal{J} \rightarrow [0, \infty]$ una aplicación con $\emptyset \in \mathcal{J}$ y $g(\emptyset) = 0$.

Supongamos que existe $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{J}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$. Dado $A \subset X$ y $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$

definida por $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} g(E_i)/E_i \in \mathcal{J} \text{ y } A \subset \cup_{i=1}^{\infty} E_i\}$ entonces μ^* es una medida exterior (Afonso, 2018).

Demostración.

Consideremos $A \subseteq X$ y la familia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{J}$ conforme a la hipótesis tal que $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.

i) Como $\emptyset \in \mathcal{J}$ y $g(\emptyset) = 0$ entonces $\inf \sum_{i=1}^{\infty} g(\emptyset) = 0$. Por lo tanto, $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii) Si $A \subset B \subset X$ y $B \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, entonces $A \subset B \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_i$. Cada suma $\sum_{i=1}^{\infty} g(B_i)$ también aparece en $\sum_{i=1}^{\infty} g(A_i)$, pero hay otras familias que cubren A y no cubren B , entonces

$\sum_{i=1}^{\infty} g(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g(A_i)$. Tomando ínfimo tenemos $\inf \sum_{i=1}^{\infty} g(B_i) \geq \inf \sum_{i=1}^{\infty} g(A_i)$.

Por lo tanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

iii) Consideremos $\varepsilon > 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $\{E_i^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{J}$ tal que $A_i \subset \cup_{k=1}^{\infty} E_i^k$.

Así, $\sum_{i=1}^{\infty} g(E_i^k) \leq \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Como $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} E_i^k$ entonces

$\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} g(E_i^k)$, logrando obtener $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Por lo tanto, $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon$ y en consecuencia, $\mu^*(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

2.20.3. Medida de Hausdorff.

En esta sección, se presenta el concepto de medida de Hausdorff, el cual permitirá definir y describir las principales propiedades de la dimensión de Hausdorff.

Definición 2.168. Consideremos $U \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Definimos el diámetro de U por

$$|U| = \sup_{x,y \in U} |x - y|.$$

Definición 2.169. Dado un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y una colección numerable de conjuntos $\{U_i\}_{i \geq 1}$ con $0 < |U_i| < \delta$ con $\delta > 0$ para todo $i \geq 1$. Decimos que $\{U_i\}$ es un δ -recubrimiento de F si

$F \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ (García, 2018).

Definición 2.170. Consideremos un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $s \geq 0$. Para cada $\delta > 0$, definimos el valor real $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s / U_i \text{ es un } \delta \text{-recubrimiento de } F\}$.

Por simplicidad, se denotará $\mathcal{H}_{\delta}^s(F) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,F}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$, donde $\mathcal{R}_{\delta,F}$ son todos los

δ – recubrimientos de F . Definimos a $\mathcal{H}^s(F)$ como la *medida de Hausdorff s -dimensional* de F (García, 2018).

Observación. Si δ se hace más pequeño, entonces $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ crece y tiende a un límite cuando $\delta \rightarrow 0$, es decir $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$.

Teorema 2.171. La medida de Hausdorff es una medida exterior (García, 2018).

Demostración.

Veamos que \mathcal{H}^s satisface las condiciones de una medida exterior.

i) Sea $A = \emptyset$, para cada $\delta > 0$ existe la familia vacía $A_i = \emptyset$, un δ – recubrimiento de \emptyset , entonces $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \leq \sum_{i=1}^0 |U_i|^s = 0$ y como $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) \geq 0$ tenemos que $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$. Luego, $\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$. En consecuencia, $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

ii) Supongamos que $A \subseteq B$ y sea $\delta > 0$ entonces

$$\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s / U_i \text{ es un } \delta \text{ – recubrimiento de } B\} \subseteq \{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s / U_i \text{ es un } \delta \text{ – recubrimiento de } A\}$$

Tomando ínfimo tenemos $\inf_{\mathcal{R}_{\delta,A}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \leq \inf_{\mathcal{R}_{\delta,B}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ y así, $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(B)$

Luego, $\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(B)$. Por lo tanto $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$.

iii) Finalmente, veamos que $\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$. En efecto, sean $\varepsilon > 0, \delta > 0$.

Como $\mathcal{H}_\delta^s(A_i) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A_i}} \sum_{j=1}^{\infty} |U_j^i|^s$ entonces $\mathcal{H}_\delta^s(A_i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} |U_j^i|^s$.

Por definición, $\sum_{j=1}^{\infty} |U_j^i|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$ y la inclusión $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} U_j^i$, se tiene,

$$\mathcal{H}_\delta^s(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \inf_{\mathcal{R}_{\delta,A_i}} \sum_{j=1}^{\infty} |U_j^i|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |U_j^i|^s \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_i) + \varepsilon$$

Así, $\mathcal{H}_\delta^s(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_i) + \varepsilon$ y tomando $\delta \rightarrow 0$, se consigue:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_i) + \varepsilon \rightarrow \mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i) + \varepsilon$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}^s(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$ concluyendo que \mathcal{H}^s es una medida exterior.

2.20.4. Dimensión de Hausdorff

Dado $F \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y $\delta < 1$, observamos que la medida de Hausdorff

$\mathcal{H}_\delta^s(F)$ es no creciente con respecto de s .

Si $t > s$ y $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un δ -recubrimiento de F , entonces $|U_i| < \delta$

Luego, tenemos $|U_i|^t = |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leq \delta^{t-s}|U_i|^s \rightarrow \sum_{i \geq 1} |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_{i \geq 1} |U_i|^s$

tomando ínfimo, se consigue la desigualdad $\inf_{\mathcal{R}_{\delta,F}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \inf_{\mathcal{R}_{\delta,F}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$

Por lo tanto, $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Como la medida de Hausdorff es finita

($\mathcal{H}^s(F) < \infty$), entonces existe una constante $M > 0$ tal que $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq M$. Así

$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} M$. Tomando $\delta \rightarrow 0$ y $t - s > 0$, con lo cual $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(F) = 0 \rightarrow \mathcal{H}^t(F) = 0$.

Por lo tanto, si $\mathcal{H}^s(F) < \infty \rightarrow \mathcal{H}^t(F) = 0$ para $t > s$. Por otra parte, si $s - t < 0$ y $\delta \rightarrow 0$

entonces $\delta^{s-t} \rightarrow \infty$. Luego $\delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Como $\mathcal{H}_\delta^t(F) \geq M > 0$, entonces

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s-t} M \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) \rightarrow \infty = \mathcal{H}^s(F)$. Con ello, si $\mathcal{H}^t(F) > 0 \rightarrow \mathcal{H}^s(F) = \infty$.

Observación. La medida de Hausdorff $\mathcal{H}^s(F)$ disminuye cuando s aumenta, es decir

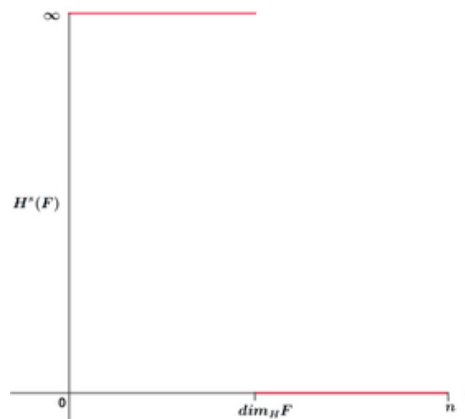
Si $s_1 < s_2 \rightarrow \mathcal{H}^{s_1}(F) \geq \mathcal{H}^{s_2}(F)$.

En la Figura 38 el valor crítico de s es originado cuando \mathcal{H}^s cambia de ∞ a 0. Dicho valor se

denomina *dimensión de Hausdorff* de F y será denotado por $\dim_H(F)$ (García, 2018).

Figura 38.

$\mathcal{H}^s(F)$ frente a s para un conjunto F .



Definición 2.173. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$, la *dimensión de Hausdorff* de F es el número real $\dim_H(F)$ que

satisface la siguiente condición:

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0: \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0: \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Es decir,

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H F \\ 0 & \text{si } s > \dim_H F \end{cases}$$

Observación.

Si $s = \dim_H F$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser igual a cero, infinito o satisfacer la condición $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ (García, 2018).

Ejemplo. El intervalo $]0,1[\subset \mathbb{R}$, tiene dimensión de Hausdorff igual a 1.

En efecto, sea $F =]0,1[$, entonces por definición, $\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\{\sum_{i \geq 1} |U_i|^s / \{U_i\}$ es un δ -recubrimiento de $F\}$. Si $\delta = \frac{1}{n}$, y definido el δ -recubrimiento $U_i = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ y $\delta \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se obtiene el ínfimo de los recubrimientos. Como $|U_i| = \frac{1}{n}$ y con n intervalos U_i se cubre F . Con ello, se tiene $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq n \left(\frac{1}{n}\right)^s = \frac{n}{n^s}$. Luego $\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^s}$.

Se presentan tres casos:

- Si $s = 1$ entonces $\mathcal{H}^1(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$.
- Cuando $s < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^s} = \infty$.
- Finalmente, si $s > 1$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^s} = 0$.

En consecuencia, $\dim_H F = 1$.

Ejemplo. El conjunto de Cantor posee dimensión de Hausdorff igual a $\frac{\log(2)}{\log(3)}$. En efecto, como

cada conjunto $\{C_n\}$ en el conjunto de Cantor se divide en 2^n intervalos disjuntos, cerrados y de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Tomando un δ -recubrimiento de C , siendo $\delta = 3^{-n} = |U_i|$, tenemos que

$\mathcal{H}_\delta^s(C) = \inf\{\sum_{i \geq 1} |U_i|^s / \{U_i\}$ es un δ -recubrimiento de $C\} = 2^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^s$ y además,

$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}}$, donde el valor de s depende cuando $\mathcal{H}^s(C)$ de ∞ "salta" a

cero. Luego, si $s = 0$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}} = \infty$ y si $s = 1$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}} = 0$.

Por lo tanto, $0 < \dim_H C < 1$ la dimensión no es un número entero,

Además, si $s = \frac{1}{2}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}} = \infty$, con lo cual $\frac{1}{2} < \dim_H C < 1$, por lo tanto, el valor de

s se obtendrá cuando $\frac{2^n}{3^{ns}} = 1$ sí y solo si

$$2^n = 3^{ns} \leftrightarrow \log(2^n) = \log(3^{ns}) \leftrightarrow n \log(2) = ns \log(3) \leftrightarrow s = \frac{\log(2)}{\log(3)}.$$

Así, se presentan los casos:

a) Si $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ entonces $\mathcal{H}^s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n} = 1$.

b) Cuando $s < \frac{\log(2)}{\log(3)}$ se tiene que $\mathcal{H}^s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}} = \infty$.

c) Finalmente, si $s > \frac{\log(2)}{\log(3)}$ se obtiene que $\mathcal{H}^s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^{ns}} = 0$.

En consecuencia, $\dim_H C = \frac{\log(2)}{\log(3)}$. (García, 2018).

Ejemplo. La curva de Koch tiene dimensión de Hausdorff igual a $\frac{\log(4)}{\log(3)}$. En efecto, cada

conjunto $\{K_{n \in \mathbb{N}}\}$ en la curva de Koch se divide en 4^n segmentos de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, así para

$\delta = 3^{-n} = |U_i|$, tomando el δ -recubrimiento de K , tenemos:

$$\mathcal{H}_\delta^s(K) = \inf\{\sum_{i \geq 1} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } K\} = 4^n \left(\frac{1}{3^n}\right)^s = \frac{4^n}{3^{ns}}$$

Así, $\mathcal{H}^s(K) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{ns}}$, el valor de s depende cuando $\mathcal{H}^s(K)$ pasa de ∞ a cero,

y de forma similar al caso anterior, el valor de s se obtendrá de la siguiente forma $\frac{4^n}{3^{ns}} = 1$ sí y

solo si $4^n = 3^{ns} \leftrightarrow \log(4^n) = \log(3^{ns}) \leftrightarrow n \log(4) = ns \log(3) \leftrightarrow s = \frac{\log(4)}{\log(3)}$. Así, cuando

$$s = \frac{\log(4)}{\log(3)} \Rightarrow \mathcal{H}^s(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{ns}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^n} = 1. \text{ Cuando } s < \frac{\log(4)}{\log(3)} \Rightarrow \mathcal{H}^s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{ns}} = \infty$$

y cuando $s > \frac{\log(4)}{\log(3)} \Rightarrow \mathcal{H}^s(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{ns}} = 0$. Por lo tanto, $\dim_H K = \frac{\log(4)}{\log(3)}$ (García, 2018).

Ejemplo. El triángulo de Sierpinski posee dimensión de Hausdorff igual a $\frac{\log(3)}{\log(2)}$.

Cada conjunto $\{T_{n \in \mathbb{N}}\}$ del triángulo de Sierpinski se divide en 3^n triángulos y cada lado del triángulo es de longitud $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Tomando un δ -recubrimiento de T , con $\delta = 2^{-n}$ tenemos que

$$|U_i| = 2^{-n} \text{ y } \mathcal{H}_\delta^s(T) = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } T \right\} = 3^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s$$

Así $\mathcal{H}_\delta^s(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^{ns}}$ y siguiendo los razonamientos anteriores, el valor de s

se determina cuando $\frac{3^n}{2^{ns}} = 1$ sí y solo si $3^n = 2^{ns} \leftrightarrow \log(3^n) = \log(2^{ns})$, es decir,

$$n \log(3) = ns \log(2) \leftrightarrow s = \frac{\log(3)}{\log(2)}. \text{ De esta forma, si } s = \frac{\log(3)}{\log(2)}, \text{ entonces}$$

$$\mathcal{H}^s(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^{ns}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n} = 1, \text{ cuando } s < \frac{\log(3)}{\log(2)} \Rightarrow \mathcal{H}^s(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^{ns}} = \infty \text{ y si } s > \frac{\log(3)}{\log(2)}$$

$$\text{Entonces } \mathcal{H}^s(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^{ns}} = 0. \text{ En consecuencia, } \dim_H T = \frac{\log(3)}{\log(2)}.$$

Definición 2.173. Se define la *dimensión fractal* como el cociente $D = -\frac{\log(N)}{\log(r(N))}$, donde N es el número de partes en que se descompone la figura y $r(N)$ es la razón de similitud de cada una de las partes del total (García, 2018).

Ejemplo.

- El triángulo de Sierpinski se descompone en tres partes iguales escaladas a razón $\frac{1}{2}$, así

$$N = 3 \text{ y } r(N) = \frac{1}{2}. \text{ Luego, } D = -\frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\log(3)}{-\log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)}.$$

- La carpeta de Sierpinski se descompone en ocho partes iguales escaladas a razón de

$$1/3, \text{ así } N = 8 \text{ y } r(N) = 1/3, \text{ con lo cual } D = -\frac{\log(8)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\log(8)}{-\log(3)} = \frac{\log(8)}{\log(3)}.$$

2.21. Introducción a los sistemas dinámicos.

La dinámica de sistemas no lineales, como los generados por polinomios en variable compleja, está relacionada con la generación de fractales a través de la autosimilitud.

Definición 2.174. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z_0 \in A$. Definimos la órbita de z_0 por f como el conjunto de puntos dado por $Orb(z_0) = \{z_k = f^k(z_0)/k \in \mathbb{N}\}$. El punto z_0 es denominado el punto inicial o condición inicial (Quintana, 2022).

Definición 2.175. Dada una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto periódico de f , si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $f^p(z_0) = z_0$. El mínimo valor de p es denominado p -periodo de z_0 en f . Un p ciclo en z_0 se define como: (Gonzalo, 2019).

$$Orb(z_0, f) = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\} \quad p: \text{es el menor entero positivo.}$$

Observación. El conjunto de puntos p -periodicos de f se denota por $Per_p(f)$.

Definimos el conjunto de puntos periódicos de f como $Per(f) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Per_i(f)$ y el conjunto de puntos fijos se denotará por $Fix(f)$.

Propiedades.

a) Todo punto periódico es un punto fijo de f^p , es decir si $z \in Per_p(f) \rightarrow f^p(z) = z$

b) Un punto no puede tener dos periodos distintos, así $Per_p(f) \cap Per_q(f) = \emptyset$ si $p \neq q$.

c) Si $z \in Per_p(f) \rightarrow f^p(z) \in Per_p(f)$. Así, $f(Per(f)) = Per(f)$ es decir $Per(f)$ es invariante bajo f .

d) Cada $Fix(f^p)$ está contenida en el conjunto de puntos periódicos $Per_p(f)$, es decir

$$Fix(f^p) \subseteq Per_p(f) \rightarrow \bigcup_{p=1}^{\infty} Fix(f^p) \subseteq Per(f)$$

e) En cualquier parte del espacio, se pueden encontrar puntos periódicos, es decir el sistema tiene comportamientos repetitivos. Es decir, $\overline{Per(f)} = X$.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2 - 1$ y el punto $z_0 = 0$. Tenemos que

$$O(z_0, f) = \{0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots\}. \text{ Así, } Per_2(f) = \{0, -1\}.$$

Definición 2.176. Consideremos una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Se define el conjunto ω -límite de f en z por $\omega(z, f) = \left\{ \omega \in \mathbb{C} / \text{existe } \{p_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ tal que } \lim_{j \rightarrow \infty} f^{p_j}(z) = \omega \right\}$ (Gonzalo, 2019).

Observación. Si $\omega \in \omega(z, f)$ entonces ω atrae a la órbita $Orb(z, f)$.

Definición 2.177. Dada una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y conjunto $A \subset \mathbb{C}$, decimos que A es invariante bajo f , si para todo $z \in A$ se cumple que $f^p(z) \in A$, para cada $p \in \mathbb{N}$. (Gonzalo, 2019).

Definición 2.178. Dados $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto invariante bajo f , se define la *cuenca de atracción* de A como el conjunto $\mathbb{B}(A) = \{\omega \in \mathbb{C} / \omega(z, f) \subseteq A\}$, es decir es el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ cuyas orbitas al ser iteradas por f terminan en A (Gonzalo, 2019).

Definición 2.179. Un atractor es un conjunto cerrado A con las siguientes propiedades:

- a) El conjunto A es invariante.
- b) El conjunto A atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales, es decir dado un conjunto abierto U contenido en A tal que si $z(0) \in U$, entonces la distancia entre $z(t)$ y A tiende a cero cuando t tiende a ∞ y A atrae a toda trayectoria que comienzan cerca de él.
- c) El conjunto A es minimal, es decir no existe ningún subconjunto propio de A que cumpla las dos condiciones anteriores (García, 2021).

Definición 2.180. Sean $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y un $z_0 \in \mathbb{C}$ punto periódico de periodo p . Se define el *multiplicador de z_0 en f* como $\lambda = (f^p)'(z_0)$ donde $(f^p)'$ es la derivada de la función f^p en el punto z_0 . El punto z_0 , según el valor de λ , se clasifica como:

- Súper atractor, si $\lambda = 0$.
- Atractor, si $0 < |\lambda| < 1$.
- Repulsor, si $|\lambda| > 1$.
- Indiferente, si $|\lambda| = 1$ (Cruz, 2017).

Definición 2.181. Un *sistema dinámico* es un par (X, f) , donde X es un espacio métrico y $f: X \rightarrow X$ es una aplicación en X (Quintana, 2022).

Definición 2.182. Un sistema dinámico (X, f) se dice *transitivo* si para todo $\epsilon > 0$ y para cada $x, y \in X$ existe $z \in X$ cuya orbita por f contiene un punto a distancia menor que ϵ de x , y en otra iteración, un punto a distancia menor a ϵ de y , es decir la órbita de z puede acercarse a cualquier punto del espacio X (Quintana, 2022).

Definición 2.183. Decimos que un sistema dinámico (X, f) , posee *dependencia sensible* respecto a las condiciones iniciales, si existe $\lambda > 0$ tal que para cada $x \in X$ y dado $\epsilon > 0$, existe $y \in X$ con $d(x, y) < \epsilon$ y además existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^p(x), f^p(y)) > \lambda$, es decir puntos muy cercanos pueden separarse al iterar la función (Quintana, 2022).

2.22. Conjunto de Julia.

Los conjuntos de Julia son fractales formado por puntos del plano complejo, cuyo comportamiento dinámico es caótico, obtenidos al iterar una función holomorfa.

El conjunto de Julia de una función $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por un polinomio complejo de grado mayor o igual a 2, será denotado por $J(f)$.

Observaciones.

i) Si $f(z) = c$ (polinomio de grado cero) entonces $f^n(z) = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, la sucesión $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en todo punto del dominio. Así, el conjunto de Julia es vacío, puesto que la sucesión de puntos que lo genera no es normal.

ii) Si $f(z) = z$, entonces $f^n(z) = z$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, la sucesión $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es normal en todo punto del dominio. En consecuencia, para este caso, el conjunto de Julia es vacío (Quintana, 2022).

Teorema 2.184. Sea f una función holomorfa y z_0 un punto fijo atractor, entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}(z_0, r)$ tal que para cada $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$, se cumple $f^n(z) \in \mathbb{D}(z_0, r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0$ (Quintana, 2022).

Demostración. Como z_0 es un punto fijo atractor de f , entonces $f(z_0) = z_0$ y $|f'(z_0)| < 1$.

Luego, $|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < 1$, y siendo f' es continua en z_0 , existe $r > 0$ y una constante $|\lambda| < 1$ tal que si $|z - z_0| < r$, se obtiene que:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \lambda |z - z_0| \rightarrow |f(z) - z_0| \leq \lambda |z - z_0| < \lambda r < r$$

Resultando que $f(z) \in \mathbb{D}(z_0, r)$, es decir $\mathbb{D}(z_0, r)$ es invariante por f . Luego, por inducción tenemos:

$$\text{Para } n = 2, |f^2(z) - f(z_0)| = |f^2(z) - z_0| \leq \lambda |f(z) - z_0| \leq \lambda^2 |z - z_0| < \lambda^2 r < r$$

Suponiendo valido para n , tenemos para $n + 1$

$$|f^{n+1}(z) - f(z_0)| \leq \lambda |f^n(z) - z_0| < \lambda \lambda^n r = \lambda^{n+1} r < r.$$

Por lo tanto, $f^n(z) \in \mathbb{D}(z_0, r)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\lambda^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z) - z_0| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n |z - z_0| = 0$.

En consecuencia, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = z_0$, para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$.

Proposición 2.185. Dada $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con U abierto y z_0 un punto fijo repulsor. Entonces existe un disco abierto $\mathbb{D}(z_0, r)$, tal que para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) \notin \mathbb{D}(z_0, r)$ (Quintana, 2022).

Demostración. Por hipótesis sobre z_0 tenemos que $f(z_0) = z_0$ y $|f'(z_0)| > 1$. Luego $f'(z_0) \neq 0$. Así, por el teorema de la función inversa aplicada en $z_0 \in U$ existen discos abiertos $\mathbb{D}(z_0, r)$ y $\mathbb{D}(f(z_0), s)$ tales que f es biyectiva entre esos discos y además su inversa local es dada por $g = f^{-1}: \mathbb{D}(f(z_0), s) \rightarrow \mathbb{D}(z_0, r)$, y $g(f(z_0)) = z_0$ con

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0) = 1 \rightarrow g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Como $|f'(z_0)| > 1 \rightarrow |g'(f(z_0))| < 1$ y siendo g' es continua en $f(z_0)$, existen $s' > 0$ y una constante $|\lambda| < 1$ tales que $|f(z) - f(z_0)| < s'$. Con ello, tenemos:

$$|g(f(z)) - g(f(z_0))| \leq \lambda |f(z) - f(z_0)| < \lambda s' < s' \rightarrow |g(f(z)) - g(f(z_0))| < s'$$

Por los cálculos del teorema 2.184, se sigue que $|g^n(f(z)) - g(f(z_0))| \leq \lambda^n |f(z) - f(z_0)|$.

Tomando $\lim_{n \rightarrow \infty} |g^n(f(z)) - g(f(z_0))| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n |f(z) - f(z_0)| = 0$.

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(f(z)) = g(f(z_0))$ para todo $f(z) \in \mathbb{D}(f(z_0), s)$.

Supongamos que existe $z \in \mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ tal que $f^n(z) \in \mathbb{D}(f(z_0), s)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (h.a)

Entonces para cada n , tenemos que $g^n(f^{n+1}(z)) \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Como g es la inversa local de f , se cumple que $g(f(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$, entonces $g(f^n(z)) = f^{n-1}(z) \rightarrow g^n(f^n(z)) = z$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto $g^n(f^{n+1}(z)) = f(z)$. Luego $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g^n(f^{n+1}(z)) = z_0$, así $f(z) = f(z_0)$, lo que contradice el hecho que $z \neq z_0$.

En consecuencia, no existe ningún punto $z \neq z_0$ cuya orbita permanezca en $\mathbb{D}(z_0, r)$, con lo cual se demuestra el resultado.

Definición 2.186 Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función polinomial de grado $d \geq 2$. Se define el *conjunto de Julia* generado por f al conjunto $J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} / \{f^k(z)\}_{k \geq 0} \text{ no es normal en } z\}$.

El complemento de $J_0(f)$ es llamado *conjunto de Fatou*, denotado por $F_0(f) = \mathbb{C} \setminus J_0(f)$

$$F_0(f) = \{z \in \mathbb{C} / \exists V \text{ abierto que contiene a } z \text{ y } \{f^k(z)\}_{k \geq 0} \text{ es normal en } V\}$$

Obsérvese que $F_0(f)$ es abierto, por ser una unión de conjuntos abiertos (Quintana, 2022).

Proposición 2.187. Dada una función polinomial $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado $d \geq 1$,

$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d$ con $a_d \neq 0$ y $\lambda > 1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), entonces existe $r = r(d; a_i) > 0$ tal que si $|z| > r$ se cumple que $|f(z)| \geq \lambda|z|$ y además, $\lim_{d \rightarrow \infty} |f^d(z)| = \infty$ (Quintana, 2022).

Demostración. Sea f dada en la hipótesis. Obsérvese que:

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1} + a_dz^d \rightarrow a_dz^d = f(z) - (a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1})$$

Como $|A| = |(A + B) - B| \leq |A + B| + |B|$, tenemos que

$$|a_dz^d| = |f(z) - (a_0 + a_1z + \dots + a_{d-1}z^{d-1})| \leq |f(z)| + |a_0 + \dots + a_{d-1}z^{d-1}|$$

Si $k \leq d - 1 \rightarrow |z|^k \leq |z|^{d-1}$. Luego tomando $|z| > 1$ con $k = 0, 1, \dots, d - 1$, se obtiene

$$|a_{d-1}||z|^{d-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0| \leq (|a_{d-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)|z|^{d-1}$$

Con lo cual resulta, $|a_dz^d| \leq |f(z)| + (|a_{d-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|)|z|^{d-1}$.

Considerando $C = \sum_{i=0}^{d-1} a_i$, tenemos que $|a_dz^d| \leq |f(z)| + \sum_{i=0}^{d-1} a_i |z|^{d-1}$, entonces

$$|a_d||z|^d \leq |f(z)| + C|z|^{d-1} \text{ y con ello, } |a_d||z|^d - C|z|^{d-1} \leq |f(z)|.$$

Entonces $|z|^{d-1}(|a_d||z| - C) \leq |f(z)|$.

Para que C sea positivo y crezca mas rápido que $|z|$, se debe cumplir que $|a_d||z| - C \geq \frac{|a_d||z|}{2}$.

Por lo tanto, $|f(z)| \geq |z|^{d-1} \frac{|a_d||z|}{2} \rightarrow |f(z)| \geq \frac{|z|^d |a_d|}{2}$.

Así, $\frac{|a_d||z|}{2} \geq C \rightarrow |z| \geq \frac{2C}{|a_d|}$, desde que $|z| > 1$ y $|z| > \frac{2C}{|a_d|}$, tomando $r = \max\left\{1, \frac{2C}{|a_d|}\right\}$,

tenemos para $|z| > r$, $\frac{|z|^d |a_d|}{2} = \frac{|a_d||z|^{d-1}|z|}{2} \rightarrow \frac{|a_d||z|^{d-1}|z|}{2} \geq \lambda|z|$ y con ello $|f(z)| \geq \lambda|z|$.

En consecuencia, $|f^d(z)| > \lambda^d|z|$ y, por consiguiente, $\lim_{d \rightarrow \infty} |f^d(z)| = \infty$, puesto que $\lambda > 1$.

Definición 2.188. Decimos que una función $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es *meromorfa* en U si f es holomorfa en U , excepto en ciertos puntos aislados o singulares, es decir la función crece sin límite de forma regular y no caótica.

Proposición 2.189. Sea \mathcal{F} una familia de funciones meromorfas definidas en $U \subset \mathbb{C}$, si existe un conjunto de tres puntos distintos $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) \neq a_i, i = 1, 2, 3$ para cada $z \in U$ y para todo $f \in \mathcal{F}$, entonces \mathcal{F} es normal (Cruz, 2017).

Proposición 2.190. Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $d \geq 2$, entonces el conjunto de Julia $J_0(f)$ es no vacío (Quintana, 2022).

Demostración. Supongamos que $J_0(f) = \emptyset$, entonces $F_0(f) = \mathbb{C}$ es decir $\{f^k(z)\}_{k \geq 0}$ es normal en todo \mathbb{C} . Por la proposición 2.187, existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$, entonces $|f(z)| \geq \lambda|z|$ con $\lambda > 1$. Así, tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(z)| = \infty$ y por condición de familia de funciones meromorfas, esta no puede ser normal en todo \mathbb{C} , es decir tiende al infinito en algunas regiones y es acotado en otras, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $J_0(f) \neq \emptyset$.

Proposición 2.191. Dado un polinomio $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado $d \geq 2$, entonces el conjunto de Julia $J_0(f)$ es compacto (Quintana, 2022).

Demostración. Como el complemento de $J_0(f)$ es abierto, entonces $J_0(f)$ es cerrado.

Sea $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_dz^d$, por la proposición 2.187, existe $r > 0$ tal que si $|z| > r$

entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(z)| = \infty$ y el conjunto abierto $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$, es la región exterior del disco $\mathbb{D}(0, r)$, donde $\{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente al infinito en D , de modo que $\{f^k(z)\}_{k \geq 0}$ es normal en D , por ello $D \subset F_0(f)$, entonces $J_0(f) \subset \mathbb{C} \setminus D$ con lo cual $J_0(f) \subset \overline{\mathbb{D}(0, r)}$, mostrando que $J_0(f)$ es acotado. Así, $J_0(f)$ es un conjunto cerrado y acotado de \mathbb{C} por lo tanto, compacto.

Proposición 2.192. Dada una función polinomial $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado $d \geq 2$, se cumplen:

- a) $J_0(f)$ es invariante bajo f es decir si $z \in J_0(f)$ entonces $f(z) \in J_0(f)$.
- b) Si $w \in J_0(f)$ y V es un entorno de w , entonces $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(V)$, satisface $W = \mathbb{C}$ o $W = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, donde $z_0 \notin J_0(f)$ (Quintana, 2022).

Proposición 2.193. Dada una función polinomial $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado $d \geq 2$, entonces el interior de $J_0(f)$ es vacío (Quintana, 2022).

Demostración. Supongamos que existe un abierto $V \neq \emptyset$ tal que $V \subset J_0(f)$ (h.a). Entonces $f^k(V) \subset J_0(f)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y por la Proposición 2.192 (b), tenemos que $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(V) \subset J_0(f)$ de donde $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(V) = \mathbb{C}$ o $\bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(V) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, lo que contradice la compacidad de $J_0(f)$. Así, $J_0(f)$ posee interior vacío.

Proposición 2.194. Dada una función polinomial $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado $d \geq 2$. Si w es un punto fijo atractor de f , entonces $\partial \mathbb{B}(w) = J_0(f)$, donde $\partial \mathbb{B}(w)$ es la frontera de la cuenca de atracción de w (Quintana, 2022).

Demostración. \supseteq) Consideremos $z_0 \in J_0(f)$, por la proposición 2.192 tenemos que $f^k(z_0) \in J_0(f)$ para todo $k \geq 0$, así la orbita $\{f^k(z_0)\}_{k \geq 1}$ no converge a un punto fijo atractor, es decir $z_0 \notin \mathbb{B}(w)$.

Sea V un entorno de z_0 , entonces $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(V)$ es decir $W = \mathbb{C}$ o $W = \mathbb{C} \setminus \{z_0'\}$, donde $z_0' \notin J_0(f)$. Como $\mathbb{B}(w)$ es un conjunto abierto y no vacío, entonces $W \cap \mathbb{B}(w) \neq \emptyset$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(V) \in \mathbb{B}(w)$. Luego, existe $v_0 \in V$, con $f^k(v_0) \in \mathbb{B}(w)$, es decir

$v_0 \in \mathbb{B}(w)$. Por lo tanto, $V \cap \mathbb{B}(w) \neq \emptyset$, y como $z_0 \in V$ y $z_0 \notin \mathbb{B}(w)$ se concluye que $z_0 \in \partial\mathbb{B}(w)$. En consecuencia, $J_0(f) \subset \partial\mathbb{B}(w)$.

⊆) Sea $z_0 \in \partial\mathbb{B}(w)$ y supongamos que $z_0 \notin J_0(f)$ (h.a). Entonces existe un entorno V de z_0 , donde $\{f^k(V)\}_{k \geq 0}$ es normal, es decir existe una subsucesión que converge uniformemente en compactos de V a una función holomorfa o al infinito. Como $V \cap \mathbb{B}(w) \neq \emptyset$, las iteradas de f convergen a w y así, la subsucesión converge a w en todo V . En consecuencia, todo punto de V tienen orbita que tiende a w es decir $V \subset \mathbb{B}(w)$, es una contradicción pues $z_0 \in \partial\mathbb{B}(w)$. Por tanto $z_0 \in J_0(f)$.

Observación. La función polinomial $f_c(z) = z^2 + c$

La construcción del conjunto de Julia está dada por $z_0 = z$: punto inicial y $c = a + bi$, dado por:

$$z_1 = f_c(z_0) = z_0^2 + c$$

$$z_2 = f_c(z_1) = (z_1)^2 + c = (z_0^2 + c)^2 + c$$

$$z_3 = f_c(z_2) = (z_2)^2 + c = ((z_0^2 + c)^2 + c)^2 + c$$

En general, se cumple $z_{n+1} = f_c(z_n) = z_n^2 + c$ (Atencia, 2014).

2.22.1 Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot surgió desde el análisis de la dinámica compleja, un campo de estudio, abordado por los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia a principios del siglo XX.

Definición 2.195 El conjunto de Mandelbrot M está formado por valores $c \in \mathbb{C}$ y el punto inicial fijo $z_0 = 0$. La órbita del punto inicial fijo es obtenida por la iteración de la función $f_c(z) = z^2 + c$, y de manera recursiva se cumple que $z_{n+1} = z_n^2 + c$.

El conjunto de Mandelbrot está definido por:

$$M = \{c \in \mathbb{C} / \exists s > 0, \text{ tal que } |f_c^n(0)| \leq s, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Es decir, la órbita de cero está acotada (García, 2018).

Observación.

- Un punto c pertenece a M si y solo si la sucesión no es divergente al infinito.
- Los puntos c en M generan conjuntos de Julia de tipo conexos.
- Los puntos c no pertenecientes a M generan conjuntos de Julia desconexos.

Propiedades básicas.

a) El conjunto de Mandelbrot es un conjunto compacto, puesto que $c \in M$ si y solo si

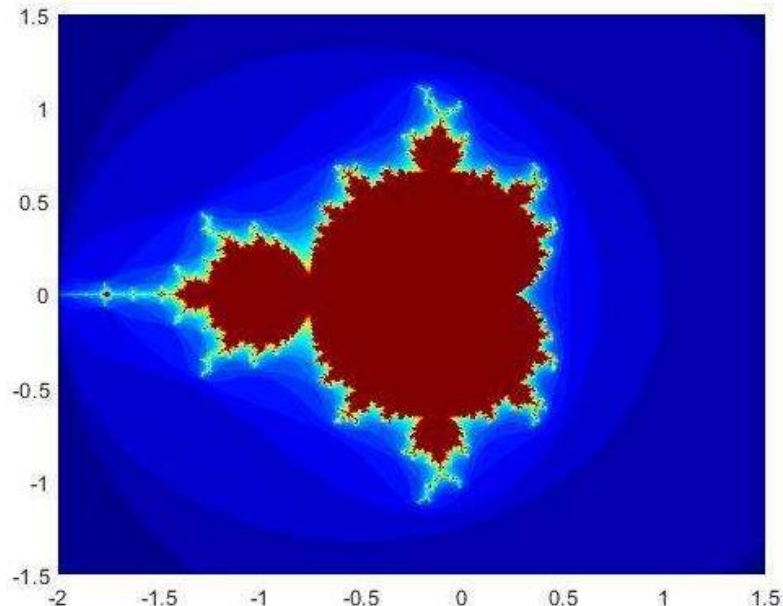
$$|f^n(0)| \leq 2 \quad \forall n \geq 0.$$

b) La intersección del conjunto de Mandelbrot con el eje real es el intervalo $[-2, 1/4]$.

c) Un punto c pertenece al conjunto de Mandelbrot cuando su correspondiente conjunto de Julia es conexo y es definido por $M = \{c \in \mathbb{C} / J(f) \text{ es conexo}\}$ (García, 2018).

Figura 39.

Conjunto Mandelbrot $n=500$ puntos, $k= 30$ iteraciones



III. METODO

3.1. Tipo de investigación

El presente estudio es de tipo básico y aplicativo, con un nivel descriptivo. Se caracteriza por ser una investigación teórica y documental, basada en la recopilación y análisis de información proveniente de fuentes escritas relacionadas con el tópico abordado. Además, presenta un diseño no experimental, enfocado en el uso de la geometría fractal como una herramienta que contribuye al desarrollo y mejora del diseño geométrico en la industria textil.

3.2. Ámbito temporal y espacial

La investigación no describe un ámbito temporal y espacial, puesto que es una investigación teórica básica y aplicada, es decir no se requiere especificar el tiempo ni el lugar donde se realiza la investigación. Por ello, el desarrollo de la investigación no considera definir estos conceptos metodológicos.

3.3. Variables

Debido al enfoque de la investigación, no se definen variables vinculadas al tema, puesto que es una investigación teórica-descriptiva bajo un diseño no experimental.

3.4. Población y muestra

El tema de investigación, al emplear un nivel descriptivo no experimental, el cual es enfocado en su teoría y respectiva aplicación, no precisa de la definición de una población y muestra.

3.5. Instrumentos

Para efectuar el análisis minucioso de la investigación, se utilizaron los siguientes instrumentos:

- Revisión documental: el cual consistió en examinar, analizar y sintetizar información proveniente de textos académicos avanzados, tesis, artículos científicos, página web e

informes de datos computacionales relacionados al tema. Esta fue interpretada, organizada y orientada de acuerdo a los objetivos del estudio, permitiendo un análisis adecuado y la obtención de conclusiones válidas y fundamentadas. Este proceso tuvo como finalidad comprender y sustentar el planteamiento teórico y metodológico de la investigación

- Análisis temático y analítico: que permitió identificar, organizar e interpretar los tópicos vinculados a los objetivos de estudio, mientras que el análisis analítico profundizó la comprensión de las aplicaciones e implicancias dentro de la industria textil y el diseño de modas.
- Simulación computacional en Matlab: este instrumento permitió reproducir el comportamiento geométrico de un sistema iterado de funciones mediante un modelo matemático, haciendo factible la observación y análisis del proceso en forma precisa y controlada.

3.5. Procedimiento

La presente tesis, está centrada en la geometría fractal aplicada a la moda, se desarrolla mediante la recopilación, el análisis y la discusión de información teórica y computacional. En una primera fase se aborda el marco teórico necesario: transformaciones lineales afines, espacios métricos completos, compacidad, topología básica y funciones contractivas. Estos conceptos permitirán comprender y aplicar la métrica de Hausdorff y el sistema iterado de funciones (SIF) para la generación de fractales y el cálculo de sus dimensiones.

A continuación, se estudiaron los fractales clásicos y los fractales en el plano complejo (conjuntos de Julia y Mandelbrot), lo cual exige una revisión de funciones holomorfas y teoría de iteración sobre el campo complejo. Analizados estos fundamentos teóricos, se procedió a la implementación computacional, que consistió en la implementación y programación de los

modelos matemáticos y su respectiva simulación en software Matlab, con el fin de generar imágenes fractales y explorar variaciones en los parámetros de las iteraciones.

Las imágenes obtenidas mediante la simulación, se exportan a programas de diseño gráfico para su ajuste estético (escala, color y movimiento) y su adaptación a patrones textiles. Finalmente, los diseños resultantes se integran en propuestas de indumentaria, permitiendo evaluar la viabilidad de su producción textil.

En todo el proceso se exige un razonamiento riguroso y un análisis minucioso entre fases, con énfasis en la coherencia entre el fundamento matemático, la implementación computacional y la aplicación en diseño textil. El objetivo es obtener resultados reproducibles y aplicables que faciliten la creatividad profesional en el área del diseño de modas.

Este procedimiento permitió establecer una conexión entre la teoría matemática de los fractales, su representación computacional y su aplicación estética en el diseño textil, evidenciando el carácter interdisciplinar del estudio.

3.7 Análisis de datos

En la investigación, no se efectuaron análisis ni tratamiento de datos estadísticos, debido que no es necesario considerar estas técnicas y herramientas, puesto que es un diseño no experimental, basado en forma íntegra sobre una teoría matemática y su aplicación.

3.8. Consideraciones éticas

En la presente investigación se ha actuado con probidad académica y respeto hacia los derechos de autor. Todas las fuentes utilizadas, tanto bibliográficas como otras, fueron debidamente citadas en el trabajo, otorgando el crédito correspondiente a los autores. La información recopilada ha sido interpretada conforme al contenido original. Asimismo, en la sección de referencias se incluyen todos los trabajos consultados, reconociendo el aporte intelectual de los investigadores consultados.

IV. RESULTADOS

Los fractales son efectuados en el plano cartesiano y en el plano complejo, en el caso de los reales, la geometría fractal, es considerada una imagen obtenida vía transformaciones matriciales o efectos geométricos, las transformaciones lineales y de tipo afín que, al aplicarse en conjunto, determinan el movimiento de las imágenes y la forma de los fractales, como por ejemplo el triángulo de Sierpinski entre otros.

El fractal es un conjunto acotado, cerrado y no vacío, es decir es un conjunto compacto y en algunos casos ser un continuo, la métrica considerada para medir la distancia entre los elementos de un fractal, como se explicó, es la métrica de Hausdorff. De esta forma, resulta que los fractales $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), d_H)$ es un espacio métrico completo.

Las funciones contractivas en un espacio métrico completo, garantizan la existencia de un único punto fijo. Estas, aplicadas sobre conjuntos compactos dentro de una métrica de Hausdorff permiten la generación teórica de los fractales. En forma matemática un conjunto de aplicaciones contractivas en $(\mathcal{K}(X), d_H)$ donde: $F: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$, definidas por $F(A) = \bigcup_{n=1}^m f_n(A)$, $\forall A \in \mathcal{K}(X)$ permiten la existencia un único punto fijo $A \in \mathcal{K}(X)$ tal que $F(A) = \bigcup_{n=1}^m f_n(A) = A$. Así, un sistema iterativo de funciones (SIF) permite crear fractales mediante aplicaciones contractivas mediante contracciones a la figura, acercando los puntos de la imagen mediante transformaciones elementales o transformaciones afines.

La medida de Hausdorff es una medida exterior y siendo esta dada por $\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s / U_i \text{ es un } \delta - \text{recubrimiento de } F \}$, su valor crítico s fue originado cuando \mathcal{H}^s cambia de ∞ a 0, y este se define como la dimensión de Hausdorff de F , esta constituye una herramienta para medir la dimensión fractal de un objeto y posibilitar su comprensión dentro de un espacio interdisciplinar.

Por otra parte, fractales en el plano complejo, son desarrollados por funciones complejas,

llamadas funciones holomorfas, estas funciones son el punto de inicio en la generación de los fractales complejos.

Los conjuntos de Julia son fractales formado por conjunto de puntos, que tienen un comportamiento caótico que se obtienen al iterar una función holomorfa, las cuales se definen por polinomios de grado mayor o igual a 2. Los puntos del conjunto de Julia están acotados dentro de un límite determinado, son puntos que no son normales y cuyas funciones convergen.

Las imágenes matemáticas llamadas fractales por el matemático B. Mandelbrot, se ejecutará en los software matemáticos de programación, logrando obtener fractales en forma inmediata con sus respectivos colores, originando así el arte fractal. Como resultados de este estudio presentaremos algunos ejemplos y las imágenes resultantes serán trasladadas a los programas de diseño gráfico donde elaboramos las imágenes a diferentes escalas y movimientos, para su aplicación en prendas de vestir. Por lo tanto, el diseño textil es obtenido por un procedimiento matemático teórico y computacional, posteriormente ejecutado en el área técnica como el diseño.

A continuación, presentaremos como resultado central, la simulación del arte fractal del conjunto de Julia en prendas de vestir y el arte textil de los Tocapus, aplicado en una prenda de vestir que son conjuntos de cuadrados cuyo interior tienen una variedad de diseños o formas geométricas relacionadas a las transformaciones matriciales estudiadas.

El código en Matlab ® para el conjunto de Julia es presentado a continuación:

```
function Julia_plot(n,c,k,Xr,Yr)
% Funcion que dibuja el conjunto de Julia dado un
parámetro c
% Julia_plot(n,c,k,Xr,Yr)
% Variables de entrada:
% n - número de puntos de la matriz donde se pinta el
conjunto de
% Julia
% c - parámetro en la ecuación  $z = z^2 + c$ 
% k - número de iteraciones
```

```

% Xr - rango de valores del eje x, Xr(1,1) - valor min,
Xr(1,2)
% - valor max
% Yr - rango de valores del eje y, Yr(1,1) - valor min,
Yr(1,2)
% - valor max
% ejemplo:
% Julia plot(500,25i,100,[-2 2],[-2 2])
% Se crea la matriz con el tamaño definido
x=linspace(Xr(1,1),Xr(1,2),n);
y=linspace(Yr(1,1),Yr(1,2),n);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
W = zeros(length(X),length(Y));
% Se rellena la matriz utilizando el método de Julia
for m = 1:size(X,2)
for j = 1:size(Y,2)
[w,iter] = Julia(X(m,j)+Y(m,j)*1i,c,k);
W(m,j) = W(m,j) + iter;
end
end
% Se pinta el conjunto de Julia
hold on;
%map =[0.7 0.7 0;0 0 0.4;0 0 0.5;0 0 0.6;0 0 0.8;0 0 0];
colormap(colorcube);
pcolor(X,Y,W);
shading interp;
hold off;
% Funcion para calcular el conjunto de Julia
function [pri,it] = Julia(z,c,k)
R = max(abs(c),2);
i = 0;
while i < k
if abs(z) > R
pri = 1;
it = i;
return;
end
z = z^2 + c;
i = i + 1;
end
pri = 0;
it = i; (Molero,2011).

```

A continuación, se presentan cuatro modelos con su respectivo diseño fractal y un diseño tocapu.

Figura 40.

Conjunto de Julia ($n=800$, $c=-0.79+0.15i$, $k=100$, $[-1\ 1],[-1\ 1]$)

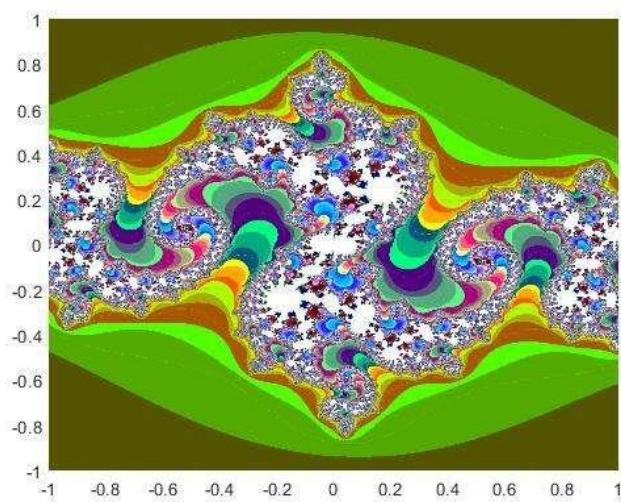


Figura 41.

Conjunto de Julia ($n=500$, $c=0.360+0.1003i$, $k=150$, $[-1, 1],[-1.1, 1.1]$)

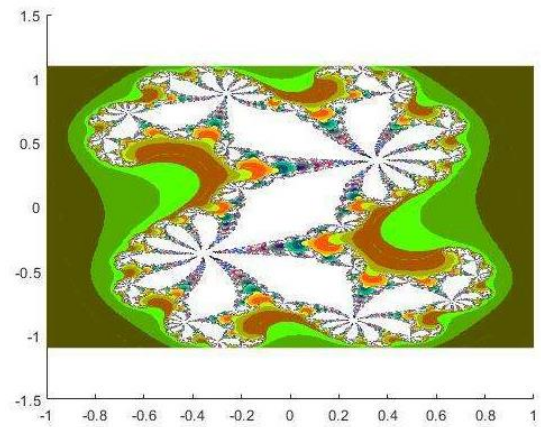
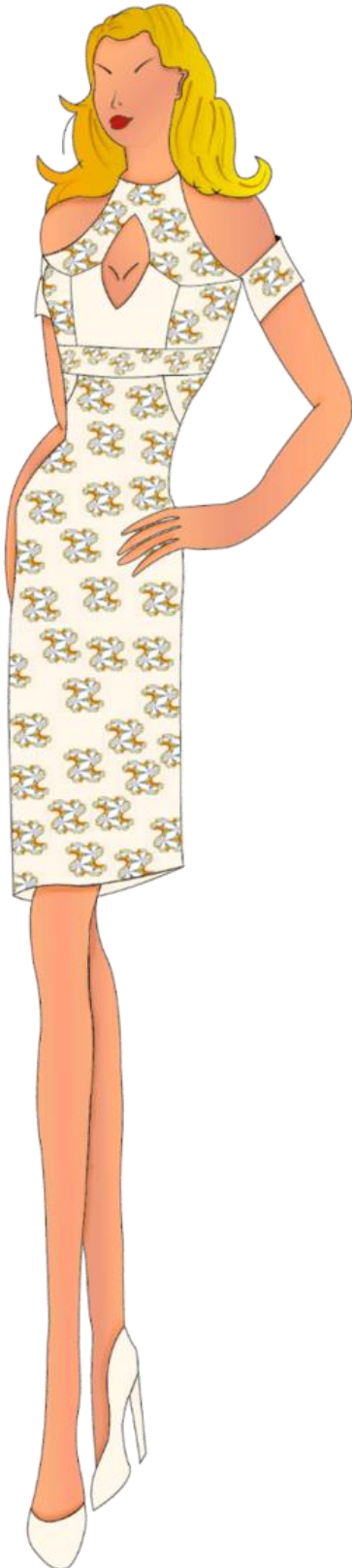


Figura 42.

Conjunto de Julia ($n=500$, $c=0.4+0.3i$, $k=200$, $[-1, 1], [-1$

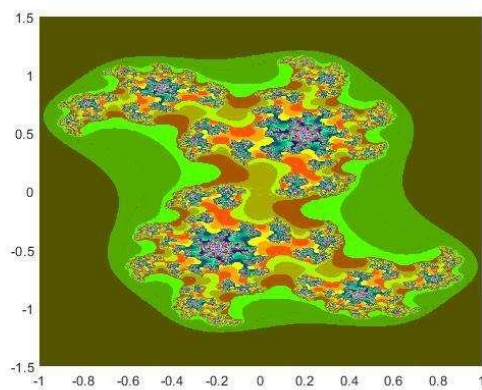


Figura 43.

Conjunto de Julia ($n=500$, $c=-0.689-0.4626i$, $k=50$, $[-1.5, 1.5]$, $[-$

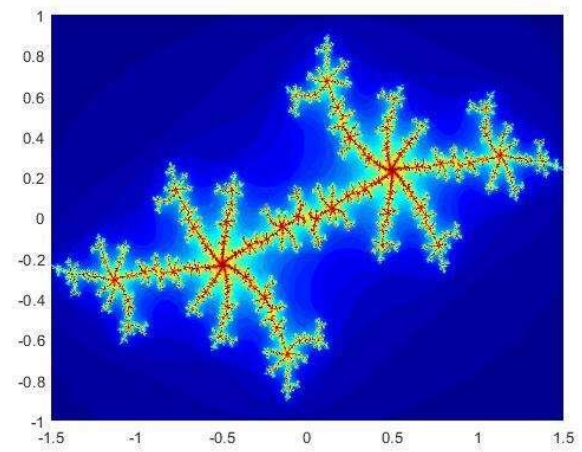


Figura 44.*Diseño Tocapu*

V. DISCUSION DE RESULTADOS

La presente investigación se centra en el análisis de la geometría fractal y su aplicación en el diseño textil mediante la programación computacional y el uso de programas de diseño gráfico. Para ello, se abordaron los fractales en el plano real y complejo. Los conjuntos fractales, especialmente el conjunto de Julia, fueron generados mediante simulación computacional y posteriormente adaptados al ámbito del diseño gráfico, permitiendo su aplicación práctica en el diseño textil y en la elaboración de prendas de vestir.

Un hallazgo relevante durante el proceso fue la relación entre las figuras del tejido Tocapu, desarrollado en el Imperio Incaico, y las propiedades geométricas de los fractales. Estos, caracterizados por sus formas regulares y su orden estructural, fueron analizados mediante transformaciones matriciales, evidenciando una correspondencia con las repeticiones y simetrías presentes en los fractales. Este vínculo permitió considerar los Tocapus como una manifestación ancestral del pensamiento geométrico fractal, aplicable también a distintas escalas dentro del diseño textil contemporáneo, vislumbrando el conocimiento matemático que poseían los incas.

Para la generación de fractales en el plano real se aplicaron transformaciones matriciales, fundamentando en conceptos de espacios métricos, topología y compacidad. En este sentido, los aportes de Adame (2005) fueron mejor detallados y expuestos en este estudio, presentando el comportamiento de los fractales en el plano real, colocando ejemplos que inspiraron el desarrollo de las nuevas representaciones visuales en esta investigación.

De igual manera, la métrica de Hausdorff, que permite determinar la distancia entre los elementos de un fractal, fue revisada y mejorada a partir del trabajo de Grijalva (2013), mientras que la dimensión fractal se fundamentó en lo expuesto por García (2018). Estas

referencias contribuyeron a fortalecer la comprensión teórica y a sustentar la aplicación práctica del modelo fractal en el ámbito textil, que fueron parte de este trabajo.

En el caso de los fractales generados en el plano complejo, la programación en Matlab permitió obtener imágenes del conjunto de Julia, caracterizadas por su estructura compacta y la repetición de patrones a diferentes escalas. Dichas simulaciones se realizaron siguiendo la metodología propuesta por Molero (2011), lo cual posibilitó representar la evolución de funciones polinómicas holomorfas bajo iteración, dando un nuevo enfoque para determinar otros tipos de diseño geométrico fractal. Asimismo, el marco teórico de Quintana (2022) aportó las bases conceptuales de los conjuntos de Julia y Mandelbrot, esenciales para comprender el comportamiento de los sistemas complejos aplicados al diseño textil.

Finalmente, los resultados obtenidos evidencian que la geometría fractal puede convertirse en una herramienta eficaz dentro del proceso creativo y técnico del diseño textil. El uso combinado de modelos matemáticos, simulaciones computacionales y herramientas gráficas permite integrar ciencia, arte y tecnología en una misma propuesta. Este trabajo demuestra que la matemática aplicada al diseño puede generar nuevas formas estéticas y funcionales, abriendo posibilidades de innovación en la industria de la moda y aportando nuevas ideas en base a las referencias empleadas.

VI. CONCLUSIONES

- La investigación permitió comprender que los fractales son imágenes matemáticas generadas a partir de transformaciones lineales, afines y matriciales, desarrolladas en un espacio métrico completo y compacto. El uso de la métrica de Hausdorff, resultó fundamental para describir la estructura de estas figuras en el plano real, donde se aplicó el sistema de funciones iteradas que garantizan la existencia de puntos fijos.
- Asimismo, se determinó que la dimensión de Hausdorff constituye una herramienta esencial para medir la complejidad de los fractales, diferenciándose de la dimensión topológica al no limitarse a valores enteros. Este concepto permitió describir las formas irregulares conocidas como “monstruos matemáticos”, demostrando que incluso las estructuras aparentemente caóticas pueden representarse mediante reglas matemáticas precisas.
- En cuanto a los fractales modernos, desarrollados en el plano complejo, se comprobó que su construcción requiere de funciones holomorfas aplicadas en sistemas iterados de funciones, lo cual origina conjuntos compactos no vacíos, como los de Julia y Mandelbrot, que reflejan la dinámica topológica de dichos sistemas.
- Otra conclusión fundamental de la investigación fue la simulación numérica mediante el software Matlab, cuya programación permitió reproducir los fractales mediante iteraciones sucesivas y visualizar sus estructuras en distintos niveles de detalle. Este proceso automatizado posibilitó generar imágenes con alta precisión matemática en un tiempo muy breve, lo que evidencia la utilidad del cómputo como herramienta indispensable para la experimentación y el análisis visual de los fractales.
- Finalmente, se concluye que la integración entre la matemática fractal, la simulación computacional y el diseño gráfico ofrece un enfoque innovador para el diseño textil, al

permitir crear patrones autoreplicantes de gran complejidad estética. De esta manera, el estudio demuestra que la tecnología informática no solo facilita la comprensión de estructuras matemáticas avanzadas, sino que también impulsa la creatividad y la innovación en la industria de la moda.

VII. RECOMENDACIONES

- Conviene considerar implementar el estudio de la geometría fractal en diversas áreas del conocimiento, dado su carácter multidisciplinario y su utilidad en la descripción de fenómenos naturales, procesos biológicos y modelos científicos. Su incorporación en los programas académicos fortalecería las competencias analíticas y tecnológicas de los futuros profesionales.
- En el campo de la biología, se sugiere integrar la geometría fractal y la programación aplicada al análisis de estructuras biológicas, ya que ambas disciplinas podrían generar importantes avances científicos al permitir modelar patrones naturales sin recurrir necesariamente a instrumentos de observación microscópica.
- Se recomienda realizar investigaciones interdisciplinarias que relacionen la geometría fractal con la ciencia y el arte andino, particularmente con el estudio matemático y físico de los tejidos del Imperio Incaico, como el Tocapu, con el fin de comprender la lógica geométrica y simbólica que subyace en sus representaciones.
- Para futuras investigaciones, se propone explorar la aplicación de fractales tridimensionales o generados mediante inteligencia artificial, con el propósito de ampliar las posibilidades estéticas y funcionales del diseño de telas.
- Se sugiere continuar el estudio de la geometría fractal aplicada al diseño textil, incorporando nuevos algoritmos de programación y simulación que permitan obtener fractales con mayor nivel de detalle y variación cromática, así como la generación de nuevas figuras, respetando el rigor teórico y matemático que los fundamenta.
- Se recomienda elaborar un programa o paquete informático basado en la simulación de fractales, que no solo contenga un conjunto de diseños fractales ya generados, sino que también permita a los diseñadores textiles crear y modificar nuevas figuras a partir de

ellos. Esta propuesta busca facilitar el acceso a recursos visuales de alto valor estético y matemático, fomentando la creatividad, la innovación tecnológica y la relación interdisciplinaria entre la matemática y el diseño textil.

VIII. REFERENCIAS

- Adame, E. (2005). *Sistemas de funciones iteradas y los fractales*. Facultad de Matemáticas e Ingeniería Programa de Matemáticas. Fundación Universitaria Konrad Lorenz.
https://www.academia.edu/19586615/Sistema_de_Funciones_Iteradas_y_los_Fractales
- Afonso, A. (2018). *Medida, dimensión y fractales*. [Tesis de pregrado, Universidad de la Laguna]. <https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/915/8844/1/Medida,+dimension+y+fractales..pdf>
- Atencia, V. (2014). *Fractales matemáticos*. [Trabajo final de grado, Universidad de Barcelona]. <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/54228/1/memoria.pdf>
- Barragán, F., Romero, A., Sánchez, S. y Grijalva, V. (2014). *Introducción a la métrica de Hausdorff*. Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- Churchill, R. y Ward, J. Variable compleja y aplicaciones. (7ma. Ed.). Mc. Graw. Hill.
- Cruz, J. (2017). *Ejemplos de fractales en los conjuntos de Julia de funciones meromorfas*, [Tesis de pregrado, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla].
<https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/d4f84959-a189-4837-8089-e2bf3ce48285>
- Daniilidis, A. (2020). *Espacios métricos*. Eduni.
[https://www.arisdaniilidis.at/Espacios%20Metricos%20\(IMCA\).pdf](https://www.arisdaniilidis.at/Espacios%20Metricos%20(IMCA).pdf)
- Escobedo, R., Robles, C. y Rodríguez, E. (2007). *La Topología de los Continuos*. (Nº 20)
<https://semana.mat.uson.mx/memoriasxvii/Archivos/XVII/RaulEscobedo.pdf>
- Espinoza, E. (2006). *Algebra Lineal*, (2da. Ed.). EER
- Espinoza, E. (2008). Variable compleja, (2da. Ed.). EER
- García, E. (2018). *Teoría de la Dimensión Topológica*, [Tesis de pregrado, Universidad de Cantabria].
- García, V. (2021). *Reconstrucción de atractores para el análisis de registros Electrofisiológico*, [Tesis de posgrado, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo]. <https://www.uaeh.edu.mx/docencia/Tesis/icbi/maestria/2021/valeria-garcia.pdf>

- Gonzalo, A. (2019). *Sistemas dinámicos discretos y la ecuación logística*, [Tesis de pregrado, Universidad de Salamanca].
<https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/147036/TFG%20Sistemas%20dinámicos%20discretos%20y%20la%20ecuación%20logística%20-%20Alejandro%20Gonzalo%20Fernández.pdf>
- Gordillo, A., y Navarro, J. (2020). *Apuntes de Topología*. Universidad de Extremadura.
<https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/11642/1/978-84-09-25212-1.pdf>
- Grijalva, V. (2013). *Métrica de Hausdorff*, [Tesis de pregrado, Universidad Tecnológica de la Mixteca - México]. <https://es.scribd.com/document/381747456/13146>
- Hernández, A. (2012). *Aplicaciones del Teorema del punto fijo: Fractales*, [Tesis de pregrado, Universidad de Murcia - España].
<https://webs.um.es/beca/Investigacion/tfghernandezvicente.pdf>
- Herrero, P. (2010). *Topología de espacios métricos*. Universidad de Murcia.
<https://es.scribd.com/document/388756740/Topologia-de-Espacios-Metricos>
- Herstein, I. (1979). *Algebra moderna*. Trillas.
- Iribarren, I. (2008). *Topología de espacios métricos*. Limusa.
- Ivorra, C. (s.f.). *Topología*. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf>
- Jiménez, D. (2018). *Topología General*. Universidad de Valparaiso.
<https://matematica.uv.cl/djimenez/archivo/topologia.pdf>
- Lázaro, M. (2017). *Algebra Lineal*. Moshera S.R.L.
- Llorente, F. (2018). *Teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas y no expansivas*, [Tesis de pregrado, Universidad de Sevilla].
<https://idus.us.es/items/f0a72b31-f6e5-4e45-bc6e-cf7855ee6f51>
- Loayza, J. (2006). *Aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach*, [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos].
<https://cybertesis.unmsm.edu.pe/item/e444e16f-1131-4e54-9145-b45ecaf2ba2c>
- Macho, M. (2008). *Topología General*. Universidad del País Vasco.

- <https://es.scribd.com/document/480626630/Topologia-General-Marta-Macho-pdf>
- Macho, M. (2014). *Topología*. Universidad del País Vasco.
- <https://www.ehu.es/~mtwmastm/Topologia1415.pdf>
- Manayay, D., & Tesén, M. (2015). *Existencia y unicidad de puntos fijos para funciones débilmente contractivas en espacios métricos completos parcialmente ordenados y algunas aplicaciones en EDO*, [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo].
- Maximenko, E. (s.f.). *Apuntes y ejercicios matemáticos*. <https://esfm.egormaximenko.com/>
- Molero, J. (2011). *Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Cuencas de atracción. Sistemas de Funciones Iteradas. Aplicaciones*. [Tesis de pregrado, Universidad Politécnica de Cartagena – España].
- Montesdeoca, P. (2005). *Longitud y Área de Curvas Fractales. Dimensión Fractal*. Universidad Nacional de Cuyo.
- <https://personales.ulpgc.es/angelplaza.dma/ficheros/resolver/ficheros/fractales.pdf>
- Munkres, J. (2002). *Topología*. Prentice Hall.
- Muto, V. (2011). *Métodos Numéricos*. <https://www.ehu.es/~mepmufov/>
- Ojeda, E. (2012). *Cinemática de fractales generados por Sistemas de iteración de funciones*, [Tesis de posgrado, Centro de Investigación en Matemáticas - México].
- <https://cimat.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1008/323>
- Pérez, C. (2007). *Transformaciones Lineales afines y Fractales*, [Monografía de pregrado, Universidad Pedagógica Nacional Facultad de Ciencia y Tecnología]. Ddepartamento de Matemáticas de Colombia
- <http://funes.uniandes.edu.co/11959/1/Perez2007Transformaciones.pdf>
- Pérez, F. (2004). *Curso de Análisis Complejo*. Universidad de Granada – España.
- https://www.ugr.es/~fjperez/textos/funciones_variable_compleja.pdf

- Quintana, Y. (2022). *Conjunto de Julia de una aplicación polinomial*, [Tesis de pregrado, Universidad de Cantabria – España].
<https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/26248/QuintanaRuilobaYaiza-TFG-Matematicas.pdf?sequence=1>
- Romero, J. (2016). *Completitud de la métrica de Hausdorff en espacios métricos compactos*, [Tesis de pregrado, Universidad Francisco José de Caldas – Colombia]
- Sabogal, S. y Arenas, G. (2011). *Una introducción a la geometría fractal*.
<https://es.scribd.com/document/346766444/Una-Introduccion-a-La-Geometria-Fractal-Sonia-Sabogal-y-Gilberto-Arenas>
- Salazar, J. (2018). *Estudio sobre los Sistemas Iterados de Funciones Contractiva*, [Tesis de posgrado, Instituto Potosino de Investigación Científica y Tecnológica, A.C. de México]
<https://ipicyt.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1010/1907/1/TMIPICYTS2E72018.pdf>
- Sampayo, N. (2015). *Continuos, hiperespacios y funciones de Whitney*, [Tesis de pregrado, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla – México]
<https://repositorioinstitucional.buap.mx/server/api/core/bitstreams/dba85ba0-e702-44ba-bd9d-2a7e0018c093/content>
- Speziale, L. (2010). *Transformaciones Lineales*. [Fascículo, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autonomía de México].
<http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/xmlui/handle/132.248.52.100/9325?show=full>
- Spiegel, M., Lipschutz, S., Schiller, J., & Spellman, D. (2011). *Variable compleja*. (2da Ed.)
Mc. Graw Hill.
- Suarez, D. (2021). *Notas de Análisis Complejo*.
<https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2024/matematica4/Mate4-Complejos-Daniel-Suarez.pdf>

Villegas, M. (2014). *Conjuntos Autosimilares y Dimensión Fractal*, [Tesis de pregrado, Universidad de Armería – España].

<https://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/3514/Memoria.pdf?s>

IX. ANEXOS

Anexo A. Compresión referente al eje Y.

Ejemplo: Evaluar la C_y , si $k=0,7$ si los vértices de la estrella son $B' = (4.33,1.75)$;

$C' = (-4.33,2.5)$; $C''' = (-4.33, -2.5)$; $D' = (0, -5)$; $D''' = (4.33, -2.5)$; $N = (1.25,0)$;

$M = (0.63,1.08)$; $L = (-0.63,1.08)$; $K = (-1.25,0)$; $P = (-0.63, -1.08)$;

$O = (0.63, -1.08)$.

Solución.

$C_{yB'} \rightarrow C_y(4.33,2.5) = (4.33,1.75) = E_1$; $C_{yC'} \rightarrow C_y(-4.33,2.5) = (-4.33,1.75) = I_1$

$C_{yC'''} \rightarrow C_y(-4.33, -2.5) = (-4.33, -3.75) = J_1$; $C_{yD'} \rightarrow C_y(0, -5) = (0, -3.5) = L_1$

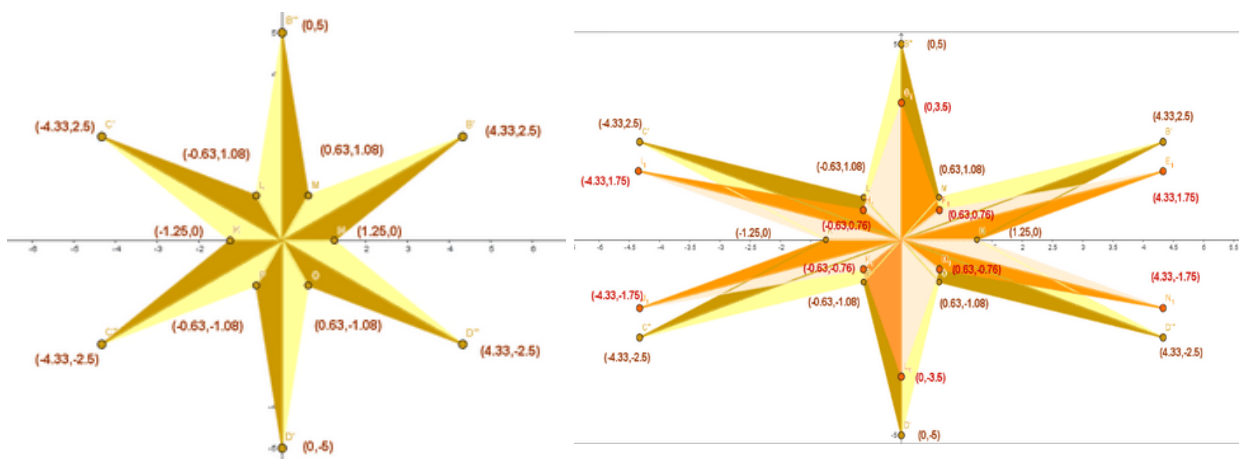
$C_{yD'''} \rightarrow C_y(4.33, -2.5) = (4.33, -1.75) = N_1$; $C_{yN} \rightarrow C_y(1.25,0) = (1.25,0) = N$

$C_{yM} \rightarrow C_y(0.63,1.08) = (0.63,0.76) = F_1$; $C_{yL} \rightarrow C_y(-0.63,1.08) = (-0.63,0.76) = H_1$

$C_{yK} \rightarrow C_y(-1.25,0) = (-1.25,0) = K$; $C_{yP} \rightarrow C_y(-0.63, -1.08) = (-0.63, -0.76) = K_1$

$C_{yO} \rightarrow C_y(0.63, -1.08) = (0.63, -0.76) = M_1$

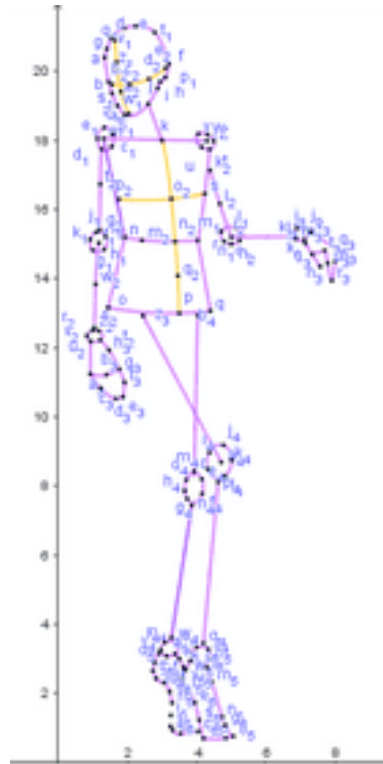
Figura de Contracción en la estrella de 6 puntas con respecto al eje Y, si



Anexo B. Desplazamiento en el eje X.

Ejemplo: Evaluar el D_x , si $k=1$ en cada punto de la figura anatómica simplificada

Anatomía del ser humano simplificada, realizado por puntos los cuales están unidos por funciones



Nota. Fuente: Pinterest

Solución.

$$D_{x_a} \rightarrow D_x(1.34, 20.4) = (21.74, 20.4) ; D_{x_b} \rightarrow D_x(1.46, 19.69) = (21.15, 19.69)$$

$$D_{x_{s_1}} \rightarrow D_x(1.55, 19.37) = (20.92, 19.37) ; D_{x_{u_1}} \rightarrow D_x(1.72, 19) = (20.72, 19) ;$$

$$D_{x_c} \rightarrow D_x(1.92, 18.75) = (20.67, 18.75) ; D_{x_j} \rightarrow D_x(2.6, 19.06) = (21.66, 19.06)$$

$$D_{x_i} \rightarrow D_x(2.88, 19.51) = (22.39, 19.51) ; D_{x_h} \rightarrow D_x(2.95, 19.69) = (22.64, 19.69)$$

$$D_{x_{p_1}} \rightarrow D_x(3.1, 19.83) = (22.93, 19.83) ; D_{x_f} \rightarrow D_x(3.2, 20.21) = (23.41, 20.21)$$

$$D_{x_{t_1}} \rightarrow D_x(2.79, 21.12) = (23.91, 21.12) ; D_{x_e} \rightarrow D_x(2.24, 21.31) = (23.55, 21.31)$$

$$D_{x_d} \rightarrow D_x(1.91, 21.25) = (23.16, 21.25) ; D_{x_{q_1}} \rightarrow D_x(1.54, 20.96) = (22.5, 20.96)$$

$$D_{x_g} \rightarrow D_x(1.41, 20.65) = (22.06, 20.65) ; D_{x_{w_1}} \rightarrow D_x(2.04, 18.77) = (20.81, 18.77)$$

$$D_{x_{a_2}} \rightarrow D_x(1.81, 19.42) = (21.23, 19.42) ; D_{x_{z_1}} \rightarrow D_x(1.69, 20.26) = (21.95, 20.26)$$

$$D_{x_{v_1}} \rightarrow D_x(1.64, 20.89) = (22.53, 20.89) ; D_{x_{b_2}} \rightarrow D_x(1.56, 19.61) = (21.17, 19.61)$$

$$D_{x_{c_2}} \rightarrow D_x(2.07,19.62) = (21.69,19.62); D_{x_{d_2}} \rightarrow D_x(2.62,19.77) = (22.39,19.77)$$

$$D_{x_{e_2}} \rightarrow D_x(3.11,20.09) = (23.2,20.09); D_{x_{a_1}} \rightarrow D_x(1.33,18.37) = (19.7,18.37)$$

$$D_{x_{b_1}} \rightarrow D_x(1.58,18.18) = (1.58,19.76); D_{x_{c_1}} \rightarrow D_x(1.55,17.83) = (19.38,17.83)$$

$$D_{x_{e_1}} \rightarrow D_x(1.13,18.06) = (19.19,18.06); D_{x_m} \rightarrow D_x(1.31,18.06) = (19.37,18.06)$$

$$D_{x_k} \rightarrow D_x(3,18) = (21,18); D_{x_l} \rightarrow D_x(4.31,17.99) = (22.3,17.99)$$

$$D_{x_u} \rightarrow D_x(4.14,17.81) = (21.95,17.81); D_{x_v} \rightarrow D_x(4.05,18.19) = (22.24,18.19)$$

$$D_{x_w} \rightarrow D_x(4.32,18.17) = (22.49,18.17); D_{x_z} \rightarrow D_x(4.5,17.98) = (22.48,17.98)$$

$$D_{x_t} \rightarrow D_x(4.38,17.74) = (22.12,17.74); D_{x_{p_2}} \rightarrow D_x(1.76,16.3) = (18.06,16.3)$$

$$D_{x_{o_2}} \rightarrow D_x(3.27,16.31) = (19.58,16.31); D_{x_s} \rightarrow D_x(4.24,16.46) = (20.7,16.46)$$

$$D_{x_r} \rightarrow D_x(4.04,15.1) = (19.14,15.1); D_{x_{n_2}} \rightarrow D_x(3.38,15.07) = (18.45,15.07)$$

$$D_{x_{m_2}} \rightarrow D_x(2.42,15.11) = (17.53,15.11); D_{x_n} \rightarrow D_x(1.92,15.16) = (17.08,15.16)$$

$$D_{x_{f_2}} \rightarrow D_x(1.22,16.74) = (17.96,16.74); D_{x_{g_2}} \rightarrow D_x(1.2,15.41) = (16.61,15.41)$$

$$D_{x_{j_1}} \rightarrow D_x(1.1,15.34) = (16.44,15.34); D_{x_{k_1}} \rightarrow D_x(0.92,15.13) = (16.05,15.13)$$

$$D_{x_{g_1}} \rightarrow D_x(1,14.82) = (15.82,14.82); D_{x_{h_1}} \rightarrow D_x(1.33,14.85) = (16.18,14.85)$$

$$D_{x_{i_1}} \rightarrow D_x(1.37,15.21) = (16.58,15.21); D_{x_{f_1}} \rightarrow D_x(1.18,15.03) = (16.21,15.03)$$

$$D_{x_{w_2}} \rightarrow D_x(1.08,13.83) = (14.91,13.83); D_{x_{z_2}} \rightarrow D_x(1.05,12.58) = (13.63,12.58)$$

$$D_{x_{r_2}} \rightarrow D_x(1,12.5) = (13.5,12.5); D_{x_{v_2}} \rightarrow D_x(0.83,12.34) = (13.17,12.34)$$

$$D_{x_{u_2}} \rightarrow D_x(0.94,12.19) = (13.13,12.19); D_{x_{t_2}} \rightarrow D_x(1.22,12.22) = (13.44,12.22)$$

$$D_{x_{s_2}} \rightarrow D_x(1.18,12.49) = (13.67,12.49); D_{x_{a_3}} \rightarrow D_x(0.93,11.24) = (12.17,11.24)$$

$$D_{x_{c_3}} \rightarrow D_x(1.23,10.83) = (12.06,10.83); D_{x_{d_3}} \rightarrow D_x(1.67,10.53) = (12.20,10.53)$$

$$D_{x_{e_3}} \rightarrow D_x(1.87,10.58) = (12.45,10.58); D_{x_{f_3}} \rightarrow D_x(1.92,10.99) = (12.91,10.99)$$

$$D_{x_{g_3}} \rightarrow D_x(1.77,11.38) = (13.15,11.38); D_{x_{h_3}} \rightarrow D_x(1.47,11.93) = (13.40,11.93)$$

$$D_{x_{b_3}} \rightarrow D_x(1.4,11.22) = (12.62,11.22); D_{x_{q_2}} \rightarrow D_x(3.46,14.09) = (17.55,14.09)$$

$$D_{x_p} \rightarrow D_x(3.5,13) = (16.5,13); D_{x_o} \rightarrow D_x(1.44,13.16) = (14.60,13.16)$$

$$D_{x_q} \rightarrow D_x(4.4,13.06) = (17.46,13.06); D_{x_{z_3}} \rightarrow D_x(2.45,12.93) = (15.38,12.93)$$

$$D_{x_{b_4}} \rightarrow D_x(4.03,12.93) = (16.96,12.93); D_{x_{c_4}} \rightarrow D_x(3.93,8.42) = (12.35,8.42)$$

$$D_{x_{d_4}} \rightarrow D_x(3.7,8.17) = (11.87,8.17); D_{x_{h_4}} \rightarrow D_x(3.65,7.85) = (11.50,7.85)$$

$$D_{x_{g_4}} \rightarrow D_x(3.73,7.63) = (11.36,7.63); D_{x_{f_4}} \rightarrow D_x(4.16,7.77) = (11.93,7.77)$$

$$D_{x_{e_4}} \rightarrow D_x(4.15,8.2) = (12.35,8.2); D_{x_{a_4}} \rightarrow D_x(4.71,8.68) = (13.39,8.68)$$

$$D_{x_{i_4}} \rightarrow D_x(4.37,8.97) = (13.34,8.97); D_{x_{m_4}} \rightarrow D_x(4.33,8.48) = (12.81,8.48)$$

$$D_{x_{l_4}} \rightarrow D_x(4.82,8.29) = (13.11,8.29); D_{x_{k_4}} \rightarrow D_x(5.02,8.75) = (13.77,8.75)$$

$$D_{x_{j_4}} \rightarrow D_x(4.78,9.18) = (13.96,9.18); D_{x_{a_4}} \rightarrow D_x(4.71,8.68) = (13.39,8.68)$$

$$D_{x_{n_4}} \rightarrow D_x(3.86,7.44) = (11.30,7.44); D_{x_{o_4}} \rightarrow D_x(3.27,3.61) = (6.88,3.61)$$

$$D_{x_{r_4}} \rightarrow D_x(3.08,3.47) = (6.55,3.47); D_{x_{v_4}} \rightarrow D_x(2.97,3.25) = (6.22,3.25)$$

$$D_{x_{u_4}} \rightarrow D_x(3.13,3.07) = (6.20,3.07); D_{x_{t_4}} \rightarrow D_x(3.38,3.14) = (6.52,3.14)$$

$$D_{x_{s_4}} \rightarrow D_x(3.43,3.45) = (6.88,3.45); D_{x_{q_4}} \rightarrow D_x(4.2,3.45) = (7.65,3.45)$$

$$D_{x_{w_4}} \rightarrow D_x(4,3.33) = (7.33,3.33); D_{x_{z_4}} \rightarrow D_x(4.34,3.27) = (7.61,3.27)$$

$$D_{x_{a_5}} \rightarrow D_x(3.86,3.12) = (6.98,3.12); D_{x_{c_5}} \rightarrow D_x(4.08,2.84) = (6.92,2.84)$$

$$D_{x_{b_5}} \rightarrow D_x(4.4,2.97) = (7.37,2.97); D_{x_{z_5}} \rightarrow D_x(2.92,3.15) = (6.07,3.15)$$

$$D_{x_{d_5}} \rightarrow D_x(2.79,2.88) = (5.67,2.88); D_{x_{e_5}} \rightarrow D_x(2.74,2.64) = (5.38,2.64)$$

$$D_{x_{f_5}} \rightarrow D_x(2.83,2.43) = (5.26,2.43); D_{x_{g_5}} \rightarrow D_x(3.06,2.3) = (5.36,2.3)$$

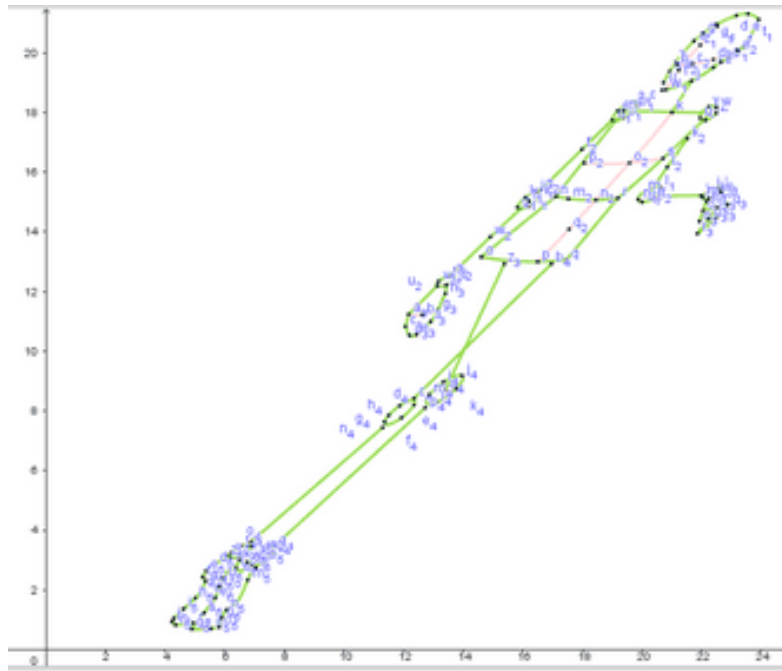
$$D_{x_{a_6}} \rightarrow D_x(3.22,2.04) = (5.26,2.04); D_{x_{h_5}} \rightarrow D_x(3.29,1.72) = (5.01,1.72)$$

$$D_{x_{i_5}} \rightarrow D_x(3.26,1.36) = (4.62,1.36); D_{x_{j_5}} \rightarrow D_x(3.25,1.04) = (4.29,1.04)$$

$$D_{x_{b_6}} \rightarrow D_x(3.31,0.93) = (4.24,0.93); D_{x_{r_5}} \rightarrow D_x(3.54,0.83) = (4.37,0.83)$$

$$\begin{aligned}
D_{x_{c_6}} &\rightarrow D_x(4.05,0.89) = (4.94,0.89); D_{x_{k_5}} \rightarrow D_x(3.5,3) = (6.5,3) \\
D_{x_{l_5}} &\rightarrow D_x(3.62,2.75) = (6.37,2.75); D_{x_{w_5}} \rightarrow D_x(3.82,2.93) = (6.75,2.93) \\
D_{x_{v_5}} &\rightarrow D_x(3.68,2.68) = (6.36,2.68); D_{x_{u_5}} \rightarrow D_x(3.56,2.4) = (5.96,2.4) \\
D_{x_{t_5}} &\rightarrow D_x(3.73,2.1) = (5.83,2.1); D_{x_{e_6}} \rightarrow D_x(3.95,1.73) = (5.68,1.73) \\
D_{x_{s_5}} &\rightarrow D_x(4.08,1.23) = (5.31,1.23); D_{x_{q_5}} \rightarrow D_x(4.2,0.69) = (4.89,0.69) \\
D_{x_{p_5}} &\rightarrow D_x(4.85,0.7) = (5.55,0.7); D_{x_{o_5}} \rightarrow D_x(5.06,0.75) = (5.81,0.75) \\
D_{x_{g_6}} &\rightarrow D_x(4.83,1.07) = (5.90,1.07); D_{x_{n_5}} \rightarrow D_x(4.73,1.33) = (6.06,1.33) \\
D_{x_{m_5}} &\rightarrow D_x(4.44,2.33) = (6.77,2.33); D_{x_{f_6}} \rightarrow D_x(4.31,2.74) = (7.05,2.74) \\
D_{x_{k_2}} &\rightarrow D_x(4.39,17.13) = (21.52,17.13); D_{x_{l_2}} \rightarrow D_x(4.67,16.17) = (20.84,16.17) \\
D_{x_{i_2}} &\rightarrow D_x(5,15.2) = (20.2,15.2); D_{x_{j_2}} \rightarrow D_x(6.75,15.21) = (21.96,15.21) \\
D_{x_{m_1}} &\rightarrow D_x(4.72,15.36) = (21.08,15.36); D_{x_{l_1}} \rightarrow D_x(5.12,15.47) = (20.59,15.47) \\
D_{x_{f_6}} &\rightarrow D_x(4.31,2.74) = (7.05,2.74); D_{x_{h_2}} \rightarrow D_x(5.25,15.1) = (20.35,15.1) \\
D_{x_{o_1}} &\rightarrow D_x(5,15) = (20,15); D_{x_{n_1}} \rightarrow D_x(4.79,15.08) = (19.87,15.08) \\
D_{x_{i_3}} &\rightarrow D_x(6.9,15.46) = (22.36,15.46); D_{x_{j_3}} \rightarrow D_x(7.14,15.45) = (22.59,15.45) \\
D_{x_{k_3}} &\rightarrow D_x(7.21,15.27) = (22.48,15.27); D_{x_{l_3}} \rightarrow D_x(7.11,15.12) = (22.23,15.12) \\
D_{x_{m_3}} &\rightarrow D_x(6.87,15.16) = (22.03,15.16); D_{x_{k_6}} \rightarrow D_x(7.14,15.02) = (22.16,15.02) \\
D_{x_{o_3}} &\rightarrow D_x(7.34,14.71) = (22.05,14.71); D_{x_{n_3}} \rightarrow D_x(7.57,14.35) = (21.92,14.35) \\
D_{x_{t_3}} &\rightarrow D_x(7.7,14.81) = (22.51,14.81); D_{x_{u_3}} \rightarrow D_x(7.79,14.44) = (22.23,14.44) \\
D_{x_{r_3}} &\rightarrow D_x(7.91,13.94) = (21.85,13.94); D_{x_{s_3}} \rightarrow D_x(8,14.5) = (22.5,14.5) \\
D_{x_{q_3}} &\rightarrow D_x(7.96,14.91) = (22.87,14.91); D_{x_{v_3}} \rightarrow D_x(7.3,15.34) = (22.64,15.34)
\end{aligned}$$

Desplazamiento de la figura con respecto al eje X, si $k=1$



Ejemplo: Hallar el D_x , si $k = -1$ en cada punto de la figura anatómica simplificada, mostrada anteriormente.

Solución.

$$D_{x_a} \rightarrow D_x(1.34, 20.4) = (-19.06, 20.4); D_{x_b} \rightarrow D_x(1.46, 19.69) = (-18.23, 19.69)$$

$$D_{x_{s_1}} \rightarrow D_x(1.55, 19.37) = (-17.82, 19.37); D_{x_{u_1}} \rightarrow D_x(1.72, 19) = (-17.28, 19)$$

$$D_{x_c} \rightarrow D_x(1.92, 18.75) = (-16.83, 18.75); D_{x_j} \rightarrow D_x(2.6, 19.06) = (-16.46, 19.06)$$

$$D_{x_i} \rightarrow D_x(2.88, 19.51) = (-16.63, 19.51); D_{x_h} \rightarrow D_x(2.95, 19.69) = (-16.74, 19.69)$$

$$D_{x_{p_1}} \rightarrow D_x(3.1, 19.83) = (-16.73, 19.83); D_{x_f} \rightarrow D_x(3.2, 20.21) = (-17.01, 20.21)$$

$$D_{x_{t_1}} \rightarrow D_x(2.79, 21.12) = (-18.33, 21.12); D_{x_e} \rightarrow D_x(2.24, 21.31) = (-19.07, 21.31)$$

$$D_{x_d} \rightarrow D_x(1.91, 21.25) = (-19.34, 21.25); D_{x_{q_1}} \rightarrow D_x(1.54, 20.96) = (-19.42, 20.96)$$

$$D_{x_g} \rightarrow D_x(1.41, 20.65) = (-19.24, 20.65); D_{x_{w_1}} \rightarrow D_x(2.04, 18.77) = (-16.73, 18.77)$$

$$D_{x_{a_2}} \rightarrow D_x(1.81, 19.42) = (-17.61, 19.42); D_{x_{z_1}} \rightarrow D_x(1.69, 20.26) = (-18.57, 20.26)$$

$$D_{x_{v_1}} \rightarrow D_x(1.64, 20.89) = (-19.25, 20.89); D_{x_{b_2}} \rightarrow D_x(1.56, 19.61) = (-18.05, 19.61)$$

$$D_{x_{c_2}} \rightarrow D_x(2.07, 19.62) = (-17.55, 19.62); D_{x_{d_2}} \rightarrow D_x(2.62, 19.77) = (-17.15, 19.77)$$

$$D_{x_{e_2}} \rightarrow D_x(3.11, 20.09) = (-16.98, 20.09); D_{x_{d_1}} \rightarrow D_x(1.33, 18.37) = (-17.04, 18.37)$$

$$D_{x_{b_1}} \rightarrow D_x(1.58, 18.18) = (-16.60, 18.18); D_{x_{c_1}} \rightarrow D_x(1.55, 17.83) = (-16.28, 17.83)$$

$$D_{x_{e_1}} \rightarrow D_x(1.13, 18.06) = (-16.93, 18.06); D_{x_m} \rightarrow D_x(1.31, 18.06) = (-16.75, 18.06)$$

$$D_{x_k} \rightarrow D_x(3, 18) = (-15, 18); D_{x_l} \rightarrow D_x(4.31, 17.99) = (-13.68, 17.99)$$

$$D_{x_u} \rightarrow D_x(4.14, 17.81) = (-13.67, 17.81); D_{x_v} \rightarrow D_x(4.05, 18.19) = (-14.14, 18.19)$$

$$D_{x_w} \rightarrow D_x(4.32, 18.17) = (-13.85, 18.17); D_{x_z} \rightarrow D_x(4.5, 17.98) = (-13.48, 17.98)$$

$$D_{x_t} \rightarrow D_x(4.38, 17.74) = (-13.36, 17.74); D_{x_{p_2}} \rightarrow D_x(1.76, 16.3) = (-14.54, 16.3)$$

$$D_{x_{o_2}} \rightarrow D_x(3.27, 16.31) = (-13.04, 16.31); D_{x_s} \rightarrow D_x(4.24, 16.46) = (-12.22, 16.46)$$

$$D_{x_r} \rightarrow D_x(4.04, 15.1) = (-11.06, 15.1); D_{x_{n_2}} \rightarrow D_x(3.38, 15.07) = (-11.69, 15.07)$$

$$D_{x_{m_2}} \rightarrow D_x(2.42, 15.11) = (-12.69, 15.11); D_{x_n} \rightarrow D_x(1.92, 15.16) = (-13.24, 15.16)$$

$$D_{x_{f_2}} \rightarrow D_x(1.22, 16.74) = (-15.52, 16.74); D_{x_{g_2}} \rightarrow D_x(1.2, 15.41) = (-14.21, 15.41)$$

$$D_{x_{j_1}} \rightarrow D_x(1.1, 15.34) = (-14.24, 15.34); D_{x_{k_1}} \rightarrow D_x(0.92, 15.13) = (-14.21, 15.13)$$

$$D_{x_{g_1}} \rightarrow D_x(1, 14.82) = (-13.82, 14.82); D_{x_{h_1}} \rightarrow D_x(1.33, 14.85) = (-13.52, 14.85)$$

$$D_{x_{i_1}} \rightarrow D_x(1.37, 15.21) = (-13.84, 15.21); D_{x_{f_1}} \rightarrow D_x(1.18, 15.03) = (-13.85, 15.03)$$

$$D_{x_{w_2}} \rightarrow D_x(1.08, 13.83) = (-12.75, 13.83); D_{x_{z_2}} \rightarrow D_x(1.05, 12.58) = (-11.53, 12.58)$$

$$D_{x_{r_2}} \rightarrow D_x(1, 12.5) = (-11.5, 12.5); D_{x_{v_2}} \rightarrow D_x(0.83, 12.34) = (-11.51, 12.34)$$

$$D_{x_{u_2}} \rightarrow D_x(0.94, 12.19) = (-11.25, 12.19); D_{x_{t_2}} \rightarrow D_x(1.22, 12.22) = (-11, 12.22)$$

$$D_{x_{s_2}} \rightarrow D_x(1.18, 12.49) = (-11.31, 12.49); D_{x_{a_3}} \rightarrow D_x(0.93, 11.24) = (-10.31, 11.24)$$

$$D_{x_{c_3}} \rightarrow D_x(1.23, 10.83) = (-9.6, 10.83); D_{x_{d_3}} \rightarrow D_x(1.67, 10.53) = (-8.86, 10.53)$$

$$D_{x_{e_3}} \rightarrow D_x(1.87, 10.58) = (-8.71, 10.58); D_{x_{f_3}} \rightarrow D_x(1.92, 10.99) = (-9.07, 10.99)$$

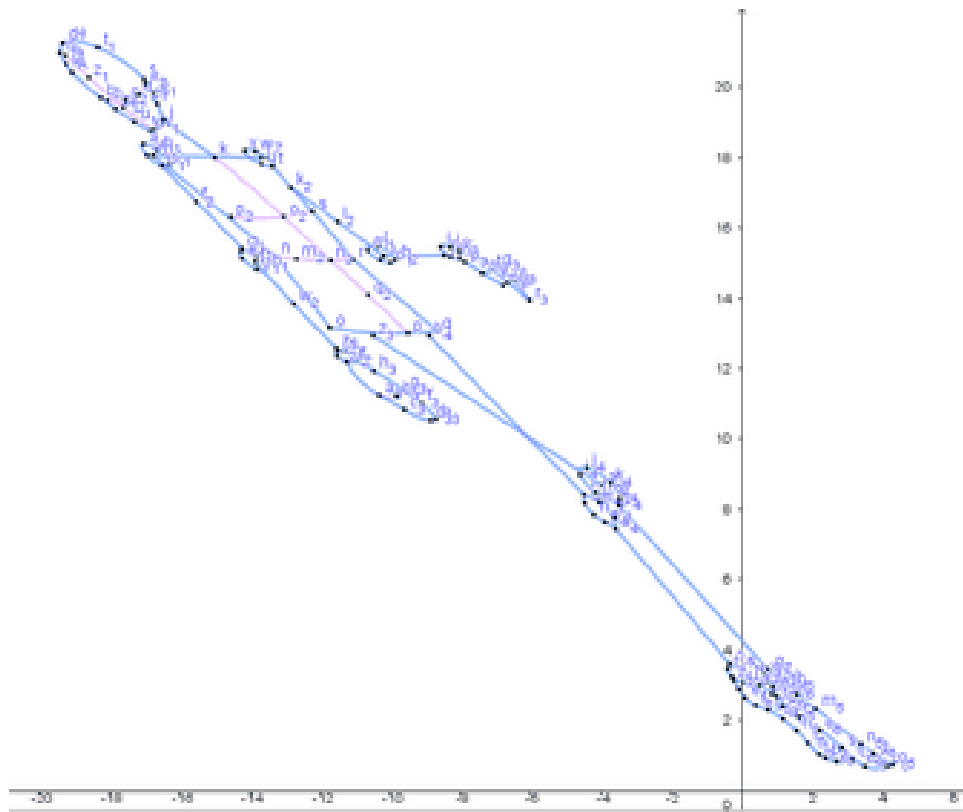
$$D_{x_{g_3}} \rightarrow D_x(1.77, 11.38) = (-9.61, 11.38); D_{x_{h_3}} \rightarrow D_x(1.47, 11.93) = (-10.46, 11.93)$$

$$D_{x_{b_3}} \rightarrow D_x(1.4, 11.22) = (-9.82, 11.22); D_{x_{q_2}} \rightarrow D_x(3.46, 14.09) = (-10.63, 14.09)$$

$$\begin{aligned}
D_{x_p} &\rightarrow D_x(3.5,13) = (-9.5,13); D_{x_o} \rightarrow D_x(1.44,13.16) = (-11.72,13.16) \\
D_{x_q} &\rightarrow D_x(4.4,13.06) = (-8.66,13.06); D_{x_{z_3}} \rightarrow D_x(2.45,12.93) = (-10.48,12.93) \\
D_{x_{b_4}} &\rightarrow D_x(4.03,12.93) = (-8.90,12.93); D_{x_{c_4}} \rightarrow D_x(3.93,8.42) = (-4.49,8.42) \\
D_{x_{d_4}} &\rightarrow D_x(3.7,8.17) = (-4.47,8.17); D_{x_{h_4}} \rightarrow D_x(3.65,7.85) = (-4.2,7.85) \\
D_{x_{g_4}} &\rightarrow D_x(3.73,7.63) = (-3.9,7.63); D_{x_{f_4}} \rightarrow D_x(4.16,7.77) = (-3.61,7.77) \\
D_{x_{e_4}} &\rightarrow D_x(4.15,8.2) = (-4.05,8.2); D_{x_{a_4}} \rightarrow D_x(4.71,8.68) = (-3.97,8.68) \\
D_{x_{i_4}} &\rightarrow D_x(4.37,8.97) = (-4.6,8.97); D_{x_{m_4}} \rightarrow D_x(4.33,8.48) = (-4.15,8.48) \\
D_{x_{l_4}} &\rightarrow D_x(4.82,8.29) = (-3.47,8.29); D_{x_{k_4}} \rightarrow D_x(5.02,8.75) = (-3.73,8.75) \\
D_{x_{j_4}} &\rightarrow D_x(4.78,9.18) = (-4.4,9.18); D_{x_{a_4}} \rightarrow D_x(4.71,8.68) = (-3.97,8.68) \\
D_{x_{n_4}} &\rightarrow D_x(3.86,7.44) = (-3.58,7.44); D_{x_{o_4}} \rightarrow D_x(3.27,3.61) = (-0.34,3.61) \\
D_{x_{r_4}} &\rightarrow D_x(3.08,3.47) = (-0.39,3.47); D_{x_{v_4}} \rightarrow D_x(2.97,3.25) = (-0.28,3.25) \\
D_{x_{u_4}} &\rightarrow D_x(3.13,3.07) = (0.06,3.07); D_{x_{t_4}} \rightarrow D_x(3.38,3.14) = (0.24,3.14) \\
D_{x_{s_4}} &\rightarrow D_x(3.43,3.45) = (-0.02,3.45); D_{x_{q_4}} \rightarrow D_x(4.2,3.45) = (0.75,3.45) \\
D_{x_{w_4}} &\rightarrow D_x(4,3.33) = (0.67,3.33); D_{x_{z_4}} \rightarrow D_x(4.34,3.27) = (1.07,3.27) \\
D_{x_{a_5}} &\rightarrow D_x(3.86,3.12) = (0.74,3.12); D_{x_{c_5}} \rightarrow D_x(4.08,2.84) = (1.24,2.84) \\
D_{x_{b_5}} &\rightarrow D_x(4.4,2.97) = (1.43,2.97); D_{x_{z_5}} \rightarrow D_x(2.92,3.15) = (-0.23,3.15) \\
D_{x_{d_5}} &\rightarrow D_x(2.79,2.88) = (-0.09,2.88); D_{x_{e_5}} \rightarrow D_x(2.74,2.64) = (0.1,2.64) \\
D_{x_{f_5}} &\rightarrow D_x(2.83,2.43) = (0.4,2.43); D_{x_{g_5}} \rightarrow D_x(3.06,2.3) = (0.76,2.3) \\
D_{x_{a_6}} &\rightarrow D_x(3.22,2.04) = (1.18,2.04); D_{x_{h_5}} \rightarrow D_x(3.29,1.72) = (1.57,1.72) \\
D_{x_{i_5}} &\rightarrow D_x(3.26,1.36) = (1.9,1.36); D_{x_{j_5}} \rightarrow D_x(3.25,1.04) = (2.21,1.04) \\
D_{x_{b_6}} &\rightarrow D_x(3.31,0.93) = (2.38,0.93); D_{x_{r_5}} \rightarrow D_x(3.54,0.83) = (2.71,0.83) \\
D_{x_{c_6}} &\rightarrow D_x(4.05,0.89) = (3.16,0.89); D_{x_{k_5}} \rightarrow D_x(3.5,3) = (0.5,3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{x_{l_5}} &\rightarrow D_x(3.62,2.75) = (0.87,2.75); D_{x_{w_5}} \rightarrow D_x(3.82,2.93) = (0.89,2.93) \\
D_{x_{v_5}} &\rightarrow D_x(3.68,2.68) = (1,2.68); D_{x_{u_5}} \rightarrow D_x(3.56,2.4) = (1.16,2.4) \\
D_{x_{t_5}} &\rightarrow D_x(3.73,2.1) = (1.63,2.1); D_{x_{e_6}} \rightarrow D_x(3.95,1.73) = (2.22,1.73) \\
D_{x_{s_5}} &\rightarrow D_x(4.08,1.23) = (2.85,1.23); D_{x_{q_5}} \rightarrow D_x(4.2,0.69) = (3.51,0.69) \\
D_{x_{p_5}} &\rightarrow D_x(4.85,0.7) = (4.15,0.7); D_{x_{o_5}} \rightarrow D_x(5.06,0.75) = (4.31,0.75) \\
D_{x_{g_6}} &\rightarrow D_x(4.83,1.07) = (3.76,1.07); D_{x_{n_5}} \rightarrow D_x(4.73,1.33) = (3.4,1.33) \\
D_{x_{m_5}} &\rightarrow D_x(4.44,2.33) = (2.11,2.33); D_{x_{f_6}} \rightarrow D_x(4.31,2.74) = (1.57,2.74) \\
D_{x_{k_2}} &\rightarrow D_x(4.39,17.13) = (-12.74,17.13); D_{x_{l_2}} \rightarrow D_x(4.67,16.17) = (-11.5,16.17) \\
D_{x_{i_2}} &\rightarrow D_x(5,15.2) = (-10.2,15.2); D_{x_{j_2}} \rightarrow D_x(6.75,15.21) = (-8.46,15.21) \\
D_{x_{m_1}} &\rightarrow D_x(4.72,15.36) = (-10.64,15.36); D_{x_{l_1}} \rightarrow D_x(5.12,15.47) = (-10.35,15.47) \\
D_{x_{f_6}} &\rightarrow D_x(4.31,2.74) = (1.57,2.74); D_{x_{h_2}} \rightarrow D_x(5.25,15.1) = (-9.85,15.1) \\
D_{x_{o_1}} &\rightarrow D_x(5,15) = (-10,15); D_{x_{n_1}} \rightarrow D_x(4.79,15.08) = (-10.29,15.08) \\
D_{x_{i_3}} &\rightarrow D_x(6.9,15.46) = (-8.56,15.46); D_{x_{j_3}} \rightarrow D_x(7.14,15.45) = (-8.31,15.45) \\
D_{x_{k_3}} &\rightarrow D_x(7.21,15.27) = (-8.06,15.27); D_{x_{l_3}} \rightarrow D_x(7.11,15.12) = (-8.01,15.12) \\
D_{x_{m_3}} &\rightarrow D_x(6.87,15.16) = (-8.29,15.16); D_{x_{k_6}} \rightarrow D_x(7.14,15.02) = (-7.88,15.02) \\
D_{x_{o_3}} &\rightarrow D_x(7.34,14.71) = (-7.37,14.71); D_{x_{n_3}} \rightarrow D_x(7.57,14.35) = (-6.78,14.35) \\
D_{x_{t_3}} &\rightarrow D_x(7.7,14.81) = (-7.11,14.81); D_{x_{u_3}} \rightarrow D_x(7.79,14.44) = (-6.65,14.44) \\
D_{x_{r_3}} &\rightarrow D_x(7.91,13.94) = (-6.03,13.94); D_{x_{s_3}} \rightarrow D_x(8,14.5) = (-6.5,14.5) \\
D_{x_{q_3}} &\rightarrow D_x(7.96,14.91) = (-6.95,14.91); D_{x_{v_3}} \rightarrow D_x(7.3,15.34) = (-8.04,15.34)
\end{aligned}$$

El desplazamiento de la figura en el eje X, si $k=-1$



Anexo C. Desplazamiento en el eje Y.

Ejemplo: Hallar el D_y , si $k = 1$ en cada punto de la figura anatómica simplificada mostrada en el anexo B.

Solución.

$$D_{y_a} \rightarrow D_y(1.34, 20.4) = (1.34, 21.74) ; D_{y_b} \rightarrow D_x(1.46, 19.69) = (1.46, 21.15)$$

$$D_{y_{s_1}} \rightarrow D_y(1.55, 19.37) = (1.55, 20.92) ; D_{y_{u_1}} \rightarrow D_y(1.72, 19) = (1.72, 20.72) ;$$

$$D_{y_c} \rightarrow D_y(1.92, 18.75) = (1.92, 20.67) ; D_{y_j} \rightarrow D_y(2.6, 19.06) = (2.6, 21.66)$$

$$D_{y_i} \rightarrow D_y(2.88, 19.51) = (2.88, 22.39) ; D_{y_h} \rightarrow D_y(2.95, 19.69) = (2.95, 22.64)$$

$$D_{y_{p_1}} \rightarrow D_y(3.1, 19.83) = (3.1, 22.93) ; D_{y_f} \rightarrow D_y(3.2, 20.21) = (3.2, 23.41)$$

$$D_{y_{t_1}} \rightarrow D_y(2.79, 21.12) = (2.79, 23.91) ; D_{y_e} \rightarrow D_y(2.24, 21.31) = (2.24, 23.55)$$

$$D_{y_d} \rightarrow D_y(1.91, 21.25) = (1.91, 23.16) ; D_{y_{q_1}} \rightarrow D_y(1.54, 20.96) = (1.54, 22.5)$$

$$D_{y_g} \rightarrow D_y(1.41, 20.65) = (1.41, 22.06) ; D_{y_{w_1}} \rightarrow D_y(2.04, 18.77) = (2.04, 20.81)$$

$$D_{y_{a_2}} \rightarrow D_y(1.81,19.42) = (1.81,21.23); D_{y_{z_1}} \rightarrow D_y(1.69,20.26) = (1.69,21.95)$$

$$D_{y_{v_1}} \rightarrow D_y(1.64,20.89) = (1.64,22.53); D_{y_{b_2}} \rightarrow D_y(1.56,19.61) = (1.56,21.17)$$

$$D_{y_{c_2}} \rightarrow D_y(2.07,19.62) = (2.07,21.69); D_{y_{d_2}} \rightarrow D_y(2.62,19.77) = (2.62,22.39)$$

$$D_{y_{e_2}} \rightarrow D_y(3.11,20.09) = (3.11,23.2); D_{y_{a_1}} \rightarrow D_y(1.33,18.37) = (1.33,19.7)$$

$$D_{y_{b_1}} \rightarrow D_y(1.58,18.18) = (1.58,19.76); D_{y_{c_1}} \rightarrow D_y(1.55,17.83) = (1.55,19.38)$$

$$D_{y_{e_1}} \rightarrow D_y(1.13,18.06) = (1.13,19.19); D_{y_m} \rightarrow D_y(1.31,18.06) = (1.31,19.37)$$

$$D_{y_k} \rightarrow D_y(3,18) = (3,21); D_{y_l} \rightarrow D_y(4.31,17.99) = (4.31,22.3)$$

$$D_{y_u} \rightarrow D_y(4.14,17.81) = (4.14,21.95); D_{y_v} \rightarrow D_y(4.05,18.19) = (4.05,22.24)$$

$$D_{y_w} \rightarrow D_y(4.32,18.17) = (4.32,22.49); D_{y_z} \rightarrow D_y(4.5,17.98) = (4.5,22.48)$$

$$D_{y_t} \rightarrow D_y(4.38,17.74) = (4.38,22.12); D_{y_{p_2}} \rightarrow D_y(1.76,16.3) = (1.76,18.06)$$

$$D_{y_{o_2}} \rightarrow D_y(3.27,16.31) = (3.27,19.58); D_{y_s} \rightarrow D_y(4.24,16.46) = (4.24,20.7)$$

$$D_{y_r} \rightarrow D_y(4.04,15.1) = (4.04,19.14); D_{y_{n_2}} \rightarrow D_y(3.38,15.07) = (3.38,18.45)$$

$$D_{y_{m_2}} \rightarrow D_y(2.42,15.11) = (2.42,17.53); D_{y_n} \rightarrow D_y(1.92,15.16) = (1.92,17.08)$$

$$D_{y_{f_2}} \rightarrow D_y(1.22,16.74) = (1.22,17.96); D_{y_{g_2}} \rightarrow D_y(1.2,15.41) = (1.2,16.61)$$

$$D_{y_{j_1}} \rightarrow D_y(1.1,15.34) = (1.1,16.44); D_{y_{k_1}} \rightarrow D_y(0.92,15.13) = (0.92,16.05)$$

$$D_{y_{g_1}} \rightarrow D_y(1,14.82) = (1,15.82); D_{y_{h_1}} \rightarrow D_y(1.33,14.85) = (1.33,16.18)$$

$$D_{y_{i_1}} \rightarrow D_y(1.37,15.21) = (1.37,16.58); D_{y_{f_1}} \rightarrow D_y(1.18,15.03) = (1.18,16.21)$$

$$D_{y_{w_2}} \rightarrow D_y(1.08,13.83) = (1.08,14.91); D_{y_{z_2}} \rightarrow D_y(1.05,12.58) = (1.05,13.63)$$

$$D_{y_{r_2}} \rightarrow D_y(1,12.5) = (1,13.5); D_{y_{v_2}} \rightarrow D_y(0.83,12.34) = (0.83,13.17)$$

$$D_{y_{u_2}} \rightarrow D_y(0.94,12.19) = (0.94,13.13); D_{y_{t_2}} \rightarrow D_y(1.22,12.22) = (1.22,13.44)$$

$$D_{y_{s_2}} \rightarrow D_y(1.18,12.49) = (1.18,13.67); D_{y_{a_3}} \rightarrow D_y(0.93,11.24) = (0.93,12.17)$$

$$D_{y_{c_3}} \rightarrow D_y(1.23,10.83) = (1.23,12.06); D_{y_{d_3}} \rightarrow D_y(1.67,10.53) = (1.67,12.20)$$

$$D_{y_{e_3}} \rightarrow D_y(1.87,10.58) = (1.87,12.45); D_{y_{f_3}} \rightarrow D_y(1.92,10.99) = (1.92,12.91)$$

$$D_{y_{g_3}} \rightarrow D_y(1.77,11.38) = (1.77,13.15); D_{y_{h_3}} \rightarrow D_y(1.47,11.93) = (1.47,13.40)$$

$$D_{y_{b_3}} \rightarrow D_y(1.4,11.22) = (1.4,12.62); D_{y_{q_2}} \rightarrow D_y(3.46,14.09) = (3.46,17.55)$$

$$D_{y_p} \rightarrow D_y(3.5,13) = (3.5,16.5); D_{y_o} \rightarrow D_y(1.44,13.16) = (1.44,14.60)$$

$$D_{y_q} \rightarrow D_y(4.4,13.06) = (4.4,17.46); D_{y_{z_3}} \rightarrow D_y(2.45,12.93) = (2.45,15.38)$$

$$D_{y_{b_4}} \rightarrow D_y(4.03,12.93) = (4.03,16.96); D_{y_{c_4}} \rightarrow D_y(3.93,8.42) = (3.93,12.35)$$

$$D_{y_{d_4}} \rightarrow D_y(3.7,8.17) = (3.7,11.87); D_{y_{h_4}} \rightarrow D_y(3.65,7.85) = (3.65,11.50)$$

$$D_{y_{g_4}} \rightarrow D_y(3.73,7.63) = (3.73,11.36); D_{y_{f_4}} \rightarrow D_y(4.16,7.77) = (4.16,11.93)$$

$$D_{y_{e_4}} \rightarrow D_y(4.15,8.2) = (4.15,12.35); D_{y_{a_4}} \rightarrow D_y(4.71,8.68) = (4.71,13.39)$$

$$D_{y_{i_4}} \rightarrow D_y(4.37,8.97) = (4.37,13.34); D_{y_{m_4}} \rightarrow D_y(4.33,8.48) = (4.33,12.81)$$

$$D_{y_{l_4}} \rightarrow D_y(4.82,8.29) = (4.82,13.11); D_{y_{k_4}} \rightarrow D_y(5.02,8.75) = (5.02,13.77)$$

$$D_{y_{j_4}} \rightarrow D_y(4.78,9.18) = (4.78,13.96); D_{y_{a_4}} \rightarrow D_y(4.71,8.68) = (4.71,13.39)$$

$$D_{y_{n_4}} \rightarrow D_y(3.86,7.44) = (3.86,11.30); D_{y_{o_4}} \rightarrow D_y(3.27,3.61) = (3.27,6.88)$$

$$D_{y_{r_4}} \rightarrow D_y(3.08,3.47) = (3.08,6.55); D_{y_{v_4}} \rightarrow D_y(2.97,3.25) = (2.97,6.22)$$

$$D_{y_{u_4}} \rightarrow D_y(3.13,3.07) = (3.13,6.20); D_{y_{t_4}} \rightarrow D_y(3.38,3.14) = (3.38,6.52)$$

$$D_{y_{s_4}} \rightarrow D_y(3.43,3.45) = (3.43,6.88); D_{y_{q_4}} \rightarrow D_y(4.2,3.45) = (4.2,7.65)$$

$$D_{y_{w_4}} \rightarrow D_y(4,3.33) = (4,7.33); D_{y_{z_4}} \rightarrow D_y(4.34,3.27) = (4.34,7.61)$$

$$D_{y_{a_5}} \rightarrow D_y(3.86,3.12) = (3.86,6.98); D_{y_{c_5}} \rightarrow D_y(4.08,2.84) = (4.08,6.92)$$

$$D_{y_{b_5}} \rightarrow D_y(4.4,2.97) = (4.4,7.37); D_{y_{z_5}} \rightarrow D_y(2.92,3.15) = (2.92,6.07)$$

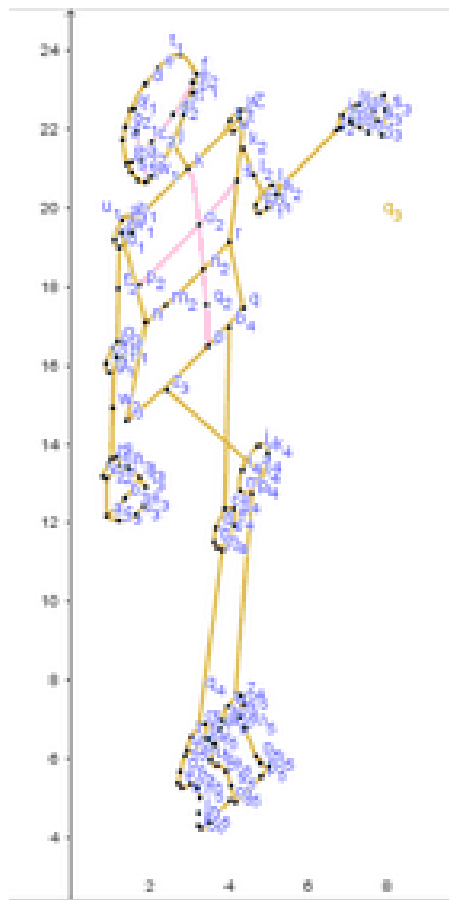
$$D_{y_{d_5}} \rightarrow D_y(2.79,2.88) = (2.79,5.67); D_{y_{e_5}} \rightarrow D_y(2.74,2.64) = (2.74,5.38)$$

$$D_{y_{f_5}} \rightarrow D_y(2.83,2.43) = (2.83,5.26); D_{y_{g_5}} \rightarrow D_y(3.06,2.3) = (3.06,5.36)$$

$$D_{y_{a_6}} \rightarrow D_y(3.22,2.04) = (3.22,5.26); D_{y_{h_5}} \rightarrow D_y(3.29,1.72) = (3.29,5.01)$$

$$\begin{aligned}
D_{y_{i_5}} &\rightarrow D_y(3.26,1.36) = (3.26,4.62); D_{y_{j_5}} \rightarrow D_y(3.25,1.04) = (3.25,4.29) \\
D_{y_{b_6}} &\rightarrow D_y(3.31,0.93) = (3.31,4.24); D_{y_{r_5}} \rightarrow D_y(3.54,0.83) = (3.54,4.37) \\
D_{y_{c_6}} &\rightarrow D_y(4.05,0.89) = (4.05,4.94); D_{y_{k_5}} \rightarrow D_y(3.5,3) = (3.5,6.5) \\
D_{y_{l_5}} &\rightarrow D_y(3.62,2.75) = (3.62,6.37); D_{y_{w_5}} \rightarrow D_y(3.82,2.93) = (3.82,6.75) \\
D_{y_{v_5}} &\rightarrow D_y(3.68,2.68) = (3.68,6.36); D_{y_{u_5}} \rightarrow D_y(3.56,2.4) = (3.56,5.96) \\
D_{y_{t_5}} &\rightarrow D_y(3.73,2.1) = (3.73,5.83); D_{y_{e_6}} \rightarrow D_y(3.95,1.73) = (3.95,5.68) \\
D_{y_{s_5}} &\rightarrow D_y(4.08,1.23) = (4.08,5.31); D_{y_{q_5}} \rightarrow D_y(4.2,0.69) = (4.2,4.89) \\
D_{y_{p_5}} &\rightarrow D_y(4.85,0.7) = (4.85,5.55); D_{y_{o_5}} \rightarrow D_y(5.06,0.75) = (5.06,5.81) \\
D_{y_{g_6}} &\rightarrow D_y(4.83,1.07) = (4.83,5.90); D_{y_{n_5}} \rightarrow D_y(4.73,1.33) = (4.73,6.06) \\
D_{y_{m_5}} &\rightarrow D_y(4.44,2.33) = (4.44,6.77); D_{y_{f_6}} \rightarrow D_y(4.31,2.74) = (4.31,7.05) \\
D_{y_{k_2}} &\rightarrow D_y(4.39,17.13) = (4.39,21.52); D_{y_{l_2}} \rightarrow D_y(4.67,16.17) = (4.67,20.84) \\
D_{y_{i_2}} &\rightarrow D_y(5,15.2) = (5,20.2); D_{y_{j_2}} \rightarrow D_y(6.75,15.21) = (6.75,21.96) \\
D_{y_{m_1}} &\rightarrow D_y(4.72,15.36) = (4.72,21.08); D_{y_{l_1}} \rightarrow D_y(5.12,15.47) = (5.12,20.59) \\
D_{y_{f_6}} &\rightarrow D_y(4.31,2.74) = (4.31,7.05); D_{y_{h_2}} \rightarrow D_y(5.25,15.1) = (5.25,20.35) \\
D_{y_{o_1}} &\rightarrow D_y(5,15) = (5,20); D_{y_{n_1}} \rightarrow D_y(4.79,15.08) = (4.79,19.87) \\
D_{y_{i_3}} &\rightarrow D_y(6.9,15.46) = (6.9,22.36); D_{y_{j_3}} \rightarrow D_y(7.14,15.45) = (7.14,22.59) \\
D_{y_{k_3}} &\rightarrow D_y(7.21,15.27) = (7.21,22.48); D_{y_{l_3}} \rightarrow D_y(7.11,15.12) = (7.11,22.23) \\
D_{y_{m_3}} &\rightarrow D_y(6.87,15.16) = (6.87,22.03); D_{y_{k_6}} \rightarrow D_y(7.14,15.02) = (7.14,22.16) \\
D_{y_{o_3}} &\rightarrow D_y(7.34,14.71) = (7.34,22.05); D_{y_{n_3}} \rightarrow D_y(7.57,14.35) = (7.57,21.92) \\
D_{y_{t_3}} &\rightarrow D_y(7.7,14.81) = (7.7,22.51); D_{y_{u_3}} \rightarrow D_y(7.79,14.44) = (7.79,22.23) \\
D_{y_{r_3}} &\rightarrow D_y(7.91,13.94) = (7.91,21.85); D_{y_{s_3}} \rightarrow D_y(8,14.5) = (8,22.5) \\
D_{y_{q_3}} &\rightarrow D_y(7.96,14.91) = (7.96,22.87); D_{y_{v_3}} \rightarrow D_y(7.3,15.34) = (7.3,22.64)
\end{aligned}$$

Desplazamiento de la figura en el eje Y, si $k=1$



Ejemplo: Determinar el D_y , si $k = -1$ en cada punto de la figura anatómica simplificada

Solución.

$$D_{y_a} \rightarrow D_y(1.34, 20.4) = (1.34, 19.06) ; D_{y_b} \rightarrow D_y(1.46, 19.69) = (1.46, 18.23)$$

$$D_{y_{s_1}} \rightarrow D_y(1.55, 19.37) = (1.55, 17.82) ; D_{y_{u_1}} \rightarrow D_y(1.72, 19) = (1.72, 17.28) ;$$

$$D_{y_c} \rightarrow D_y(1.92, 18.75) = (1.92, 16.83) ; D_{y_j} \rightarrow D_y(2.6, 19.06) = (2.6, 16.46)$$

$$D_{y_i} \rightarrow D_y(2.88, 19.51) = (2.88, 16.63) ; D_{y_h} \rightarrow D_y(2.95, 19.69) = (2.95, 16.74)$$

$$D_{y_{p_1}} \rightarrow D_y(3.1, 19.83) = (3.1, 16.73) ; D_{y_f} \rightarrow D_y(3.2, 20.21) = (3.2, 17.01)$$

$$D_{y_{t_1}} \rightarrow D_y(2.79, 21.12) = (2.79, 18.33) ; D_{y_e} \rightarrow D_y(2.24, 21.31) = (2.24, 19.07)$$

$$D_{y_d} \rightarrow D_y(1.91, 21.25) = (1.91, 19.34) ; D_{y_{q_1}} \rightarrow D_y(1.54, 20.96) = (1.54, 19.42)$$

$$D_{y_g} \rightarrow D_y(1.41, 20.65) = (1.41, 19.24) ; D_{y_{w_1}} \rightarrow D_y(2.04, 18.77) = (2.04, 16.73)$$

$$D_{y_{a_2}} \rightarrow D_y(1.81, 19.42) = (1.81, 17.61) ; D_{y_{z_1}} \rightarrow D_y(1.69, 20.26) = (1.69, 18.57)$$

$$D_{y_{v_1}} \rightarrow D_y(1.64,20.89) = (1.64,19.25); D_{y_{b_2}} \rightarrow D_y(1.56,19.61) = (1.56,18.05)$$

$$D_{y_{c_2}} \rightarrow D_y(2.07,19.62) = (2.07,17.55); D_{y_{a_2}} \rightarrow D_y(2.62,19.77) = (2.62,17.15)$$

$$D_{y_{e_2}} \rightarrow D_y(3.11,20.09) = (3.11,16.98); D_{y_{a_1}} \rightarrow D_y(1.33,18.37) = (1.33,17.04)$$

$$D_{y_{b_1}} \rightarrow D_y(1.58,18.18) = (1.58,16.60); D_{y_{c_1}} \rightarrow D_y(1.55,17.83) = (1.55,16.28)$$

$$D_{y_{e_1}} \rightarrow D_y(1.13,18.06) = (1.13,16.93); D_{y_m} \rightarrow D_y(1.31,18.06) = (1.31,16.75)$$

$$D_{y_k} \rightarrow D_y(3,18) = (3,15); D_{y_l} \rightarrow D_y(4.31,17.99) = (4.31,13.68)$$

$$D_{y_u} \rightarrow D_y(4.14,17.81) = (4.14,13.67); D_{y_v} \rightarrow D_y(4.05,18.19) = (4.05,14.14)$$

$$D_{y_w} \rightarrow D_y(4.32,18.17) = (4.32,13.85); D_{y_z} \rightarrow D_y(4.5,17.98) = (4.5,13.48)$$

$$D_{y_t} \rightarrow D_y(4.38,17.74) = (4.38,13.36); D_{y_{p_2}} \rightarrow D_y(1.76,16.3) = (1.76,14.54)$$

$$D_{y_{o_2}} \rightarrow D_y(3.27,16.31) = (3.27,13.04); D_{y_s} \rightarrow D_y(4.24,16.46) = (4.24,12.22)$$

$$D_{y_r} \rightarrow D_y(4.04,15.1) = (4.04,11.06); D_{y_{n_2}} \rightarrow D_y(3.38,15.07) = (3.38,11.69)$$

$$D_{y_{m_2}} \rightarrow D_y(2.42,15.11) = (2.42,12.69); D_{y_n} \rightarrow D_y(1.92,15.16) = (1.92,13.24)$$

$$D_{y_{f_2}} \rightarrow D_y(1.22,16.74) = (1.22,15.52); D_{y_{g_2}} \rightarrow D_y(1.2,15.41) = (1.2,14.21)$$

$$D_{y_{j_1}} \rightarrow D_y(1.1,15.34) = (1.1,14.24); D_{y_{k_1}} \rightarrow D_y(0.92,15.13) = (0.92,14.21)$$

$$D_{y_{g_1}} \rightarrow D_y(1,14.82) = (1,13.82); D_{y_{h_1}} \rightarrow D_y(1.33,14.85) = (1.33,13.52)$$

$$D_{y_{i_1}} \rightarrow D_y(1.37,15.21) = (1.37,13.84); D_{y_{f_1}} \rightarrow D_y(1.18,15.03) = (1.18,13.85)$$

$$D_{y_{w_2}} \rightarrow D_y(1.08,13.83) = (1.08,12.75); D_{y_{z_2}} \rightarrow D_y(1.05,12.58) = (1.05,11.53)$$

$$D_{y_{r_2}} \rightarrow D_y(1,12.5) = (1,11.5); D_{y_{v_2}} \rightarrow D_y(0.83,12.34) = (0.83,11.51)$$

$$D_{y_{u_2}} \rightarrow D_y(0.94,12.19) = (0.94,11.25); D_{y_{t_2}} \rightarrow D_y(1.22,12.22) = (1.22,11)$$

$$D_{y_{s_2}} \rightarrow D_y(1.18,12.49) = (1.18,11.31); D_{y_{a_3}} \rightarrow D_y(0.93,11.24) = (0.93,10.31)$$

$$D_{y_{c_3}} \rightarrow D_y(1.23,10.83) = (1.23,9.6); D_{y_{d_3}} \rightarrow D_y(1.67,10.53) = (1.67,8.86)$$

$$D_{y_{e_3}} \rightarrow D_y(1.87,10.58) = (1.87,8.71); D_{y_{f_3}} \rightarrow D_y(1.92,10.99) = (1.92,9.07)$$

$$D_{y_{g_3}} \rightarrow D_y(1.77,11.38) = (1.77,9.61); D_{y_{h_3}} \rightarrow D_y(1.47,11.93) = (1.47,10.46)$$

$$D_{y_{b_3}} \rightarrow D_y(1.4,11.22) = (1.4,9.82); D_{y_{q_2}} \rightarrow D_y(3.46,14.09) = (3.46,10.63)$$

$$D_{y_p} \rightarrow D_y(3.5,13) = (3.5,9.5); D_{y_o} \rightarrow D_y(1.44,13.16) = (1.44,11.72)$$

$$D_{y_q} \rightarrow D_y(4.4,13.06) = (4.4,8.66); D_{y_{z_3}} \rightarrow D_y(2.45,12.93) = (2.45,10.48)$$

$$D_{y_{b_4}} \rightarrow D_y(4.03,12.93) = (4.03,8.90); D_{y_{c_4}} \rightarrow D_y(3.93,8.42) = (3.93,4.49)$$

$$D_{y_{d_4}} \rightarrow D_y(3.7,8.17) = (3.7,4.47); D_{y_{h_4}} \rightarrow D_y(3.65,7.85) = (3.65,4.2)$$

$$D_{y_{g_4}} \rightarrow D_y(3.73,7.63) = (3.73,3.9); D_{y_{f_4}} \rightarrow D_y(4.16,7.77) = (4.16,3.61)$$

$$D_{y_{e_4}} \rightarrow D_y(4.15,8.2) = (4.15,4.05); D_{y_{a_4}} \rightarrow D_y(4.71,8.68) = (4.71,3.97)$$

$$D_{y_{i_4}} \rightarrow D_y(4.37,8.97) = (4.37,4.6); D_{y_{m_4}} \rightarrow D_y(4.33,8.48) = (4.33,4.15)$$

$$D_{y_{l_4}} \rightarrow D_y(4.82,8.29) = (4.82,3.47); D_{y_{k_4}} \rightarrow D_y(5.02,8.75) = (5.02,3.73)$$

$$D_{y_{j_4}} \rightarrow D_y(4.78,9.18) = (4.78,4.4); D_{y_{a_4}} \rightarrow D_y(4.71,8.68) = (4.71,3.97)$$

$$D_{y_{n_4}} \rightarrow D_y(3.86,7.44) = (3.86,3.58); D_{y_{o_4}} \rightarrow D_y(3.27,3.61) = (3.27,0.34)$$

$$D_{y_{r_4}} \rightarrow D_y(3.08,3.47) = (3.08,0.39); D_{y_{v_4}} \rightarrow D_y(2.97,3.25) = (2.97,0.28)$$

$$D_{y_{u_4}} \rightarrow D_y(3.13,3.07) = (3.13,0.06); D_{y_{t_4}} \rightarrow D_y(3.38,3.14) = (3.38, -0.24)$$

$$D_{y_{s_4}} \rightarrow D_y(3.43,3.45) = (3.43,0.02); D_{y_{q_4}} \rightarrow D_y(4.2,3.45) = (4.2, -0.75)$$

$$D_{y_{w_4}} \rightarrow D_y(4,3.33) = (4, -0.67); D_{y_{z_4}} \rightarrow D_y(4.34,3.27) = (4.34, -1.07)$$

$$D_{y_{a_5}} \rightarrow D_y(3.86,3.12) = (3.86, -0.74); D_{y_{c_5}} \rightarrow D_y(4.08,2.84) = (4.08, -1.24)$$

$$D_{y_{b_5}} \rightarrow D_y(4.4,2.97) = (4.4, -1.43); D_{y_{z_5}} \rightarrow D_y(2.92,3.15) = (2.92,0.23)$$

$$D_{y_{d_5}} \rightarrow D_y(2.79,2.88) = (2.79,0.09); D_{y_{e_5}} \rightarrow D_y(2.74,2.64) = (2.74, -0.1)$$

$$D_{y_{f_5}} \rightarrow D_y(2.83,2.43) = (2.83, -0.4); D_{y_{g_5}} \rightarrow D_y(3.06,2.3) = (3.06, -0.76)$$

$$D_{y_{a_6}} \rightarrow D_y(3.22,2.04) = (3.22, -1.18); D_{y_{h_5}} \rightarrow D_y(3.29,1.72) = (3.29, -1.57)$$

$$D_{y_{i_5}} \rightarrow D_y(3.26,1.36) = (3.26, -1.9); D_{y_{j_5}} \rightarrow D_y(3.25,1.04) = (3.25, -2.21)$$

$$D_{y_{b_6}} \rightarrow D_y(3.31,0.93) = (3.31, -2.38); D_{y_{r_5}} \rightarrow D_y(3.54,0.83) = (3.54, -2.71)$$

$$D_{y_{c_6}} \rightarrow D_y(4.05,0.89) = (4.05, -3.16); D_{y_{k_5}} \rightarrow D_y(3.5,3) = (3.5, -0.5)$$

$$D_{y_{l_5}} \rightarrow D_y(3.62,2.75) = (3.62, -0.87); D_{y_{w_5}} \rightarrow D_y(3.82,2.93) = (3.82, -0.89)$$

$$D_{y_{v_5}} \rightarrow D_y(3.68,2.68) = (3.68, -1); D_{y_{u_5}} \rightarrow D_y(3.56,2.4) = (3.56, -1.16)$$

$$D_{y_{t_5}} \rightarrow D_y(3.73,2.1) = (3.73, -1.63); D_{y_{e_6}} \rightarrow D_y(3.95,1.73) = (3.95, -2.22)$$

$$D_{y_{s_5}} \rightarrow D_y(4.08,1.23) = (4.08, -2.85); D_{y_{q_5}} \rightarrow D_y(4.2,0.69) = (4.2, -3.51)$$

$$D_{y_{p_5}} \rightarrow D_y(4.85,0.7) = (4.85, -4.15); D_{y_{o_5}} \rightarrow D_y(5.06,0.75) = (5.06, -4.31)$$

$$D_{y_{g_6}} \rightarrow D_y(4.83,1.07) = (4.83, -3.76); D_{y_{n_5}} \rightarrow D_y(4.73,1.33) = (4.73, -3.4)$$

$$D_{y_{m_5}} \rightarrow D_y(4.44,2.33) = (4.44, -2.11); D_{y_{f_6}} \rightarrow D_y(4.31,2.74) = (4.31, -1.57)$$

$$D_{y_{k_2}} \rightarrow D_y(4.39,17.13) = (4.39,12.74); D_{y_{l_2}} \rightarrow D_y(4.67,16.17) = (4.67,11.5)$$

$$D_{y_{i_2}} \rightarrow D_y(5,15.2) = (5,10.2); D_{y_{j_2}} \rightarrow D_y(6.75,15.21) = (6.75,8.46)$$

$$D_{y_{m_1}} \rightarrow D_y(4.72,15.36) = (4.72,10.64); D_{y_{l_1}} \rightarrow D_y(5.12,15.47) = (5.12,10.35)$$

$$D_{y_{f_6}} \rightarrow D_y(4.31,2.74) = (4.31, -1.57); D_{y_{h_2}} \rightarrow D_y(5.25,15.1) = (5.25,9.85)$$

$$D_{y_{o_1}} \rightarrow D_y(5,15) = (5,10); D_{y_{n_1}} \rightarrow D_y(4.79,15.08) = (4.79,10.29)$$

$$D_{y_{i_3}} \rightarrow D_y(6.9,15.46) = (6.9,8.56); D_{y_{j_3}} \rightarrow D_y(7.14,15.45) = (7.14,8.31)$$

$$D_{y_{k_3}} \rightarrow D_y(7.21,15.27) = (7.21,8.06); D_{y_{l_3}} \rightarrow D_y(7.11,15.12) = (7.11,8.01)$$

$$D_{y_{m_3}} \rightarrow D_y(6.87,15.16) = (6.87,8.29); D_{y_{k_6}} \rightarrow D_y(7.14,15.02) = (7.14,7.88)$$

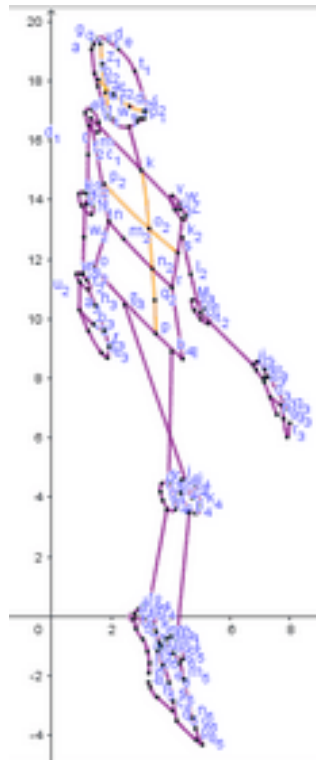
$$D_{y_{o_3}} \rightarrow D_y(7.34,14.71) = (7.34,7.37); D_{y_{n_3}} \rightarrow D_y(7.57,14.35) = (7.57,6.78)$$

$$D_{y_{t_3}} \rightarrow D_y(7.7,14.81) = (7.7,7.11); D_{y_{u_3}} \rightarrow D_y(7.79,14.44) = (7.79,6.65)$$

$$D_{y_{r_3}} \rightarrow D_y(7.91,13.94) = (7.91,6.03); D_{y_{s_3}} \rightarrow D_y(8,14.5) = (8,6.5)$$

$$D_{y_{q_3}} \rightarrow D_y(7.96,14.91) = (7.96,6.95); D_{y_{v_3}} \rightarrow D_y(7.3,15.34) = (7.3,8.04)$$

Desplazamiento de la figura en el eje Y, si $k=-1$



Anexo D. Transformación de traslación del motivo inca

Tomando como vector de traslación a $(20,6)$, tenemos:

$$T_{(20,6)}(B) = T_{(20,6)}(8,12) = (28,18)=B'_2$$

$$T_{(20,6)}(A_1) = T_{(20,6)}(8,10) = (28,16)=O_7$$

$$T_{(20,6)}(B_1) = T_{(20,6)}(6,10) = (26,16)=R_7$$

$$T_{(20,6)}(A_2) = T_{(20,6)}(6,7.99) = (26,13.99)=E_8$$

$$T_{(20,6)}(B_2) = T_{(20,6)}(3.8,7.99) = (23.8,13.99)=F_8$$

$$T_{(20,6)}(N) = T_{(20,6)}(3.8,6.79) = (23.8,12.79)=N'_2$$

$$T_{(20,6)}(T) = T_{(20,6)}(1.8,6.79) = (21.8,12.79)=T'_2$$

$$T_{(20,6)}(N_1) = T_{(20,6)}(1.8,5.59) = (21.8,11.59)=P_8$$

$$T_{(20,6)}(Z) = T_{(20,6)}(1,5.59) = (21,11.59)=Z'_1$$

$$T_{(20,6)}(M) = T_{(20,6)}(1,5.19) = (21,11.19)=R_8$$

$$T_{(20,6)}(O_1) = T_{(20,6)}(1.8,5.19) = (21.8,11.19)=Q_8$$

$$T_{(20,6)}(T') = T_{(20,6)}(1.8,3.99) = (21.8,9.99)=T''_1$$

$$T_{(20,6)}(N') = T_{(20,6)}(3.8,3.99) = (23.8,9.99)=N''_1$$

$$T_{(20,6)}(Z_3) = T_{(20,6)}(3.8,2.79) = (23.8,8.79)=V_8$$

$$T_{(20,6)}(W_3) = T_{(20,6)}(6,2.79) = (26,8.79)=U_8$$

$$T_{(20,6)}(L_3) = T_{(20,6)}(6,0.78) = (26,6.78)=J_9$$

$$T_{(20,6)}(K_3) = T_{(20,6)}(8,0.78) = (28,6.78)=I_9$$

$$T_{(20,6)}(B'_1) = T_{(20,6)}(8, -1.22) = (28,4.78)=V_9$$

$$T_{(20,6)}(B''') = T_{(20,6)}(12.4, -1.22) = (32.4,4.78)=B'''$$

$$T_{(20,6)}(K_4) = T_{(20,6)}(12.4,0.78) = (32.4,6.78)=I_{10}$$

$$T_{(20,6)}(L_4) = T_{(20,6)}(14.4,0.78) = (34.4,6.78)=J_{10}$$

$$T_{(20,6)}(W_4) = T_{(20,6)}(14.4,2.79) = (34.4,8.79)=I_{11}$$

$$T_{(20,6)}(Z_4) = T_{(20,6)}(16.6,2.79) = (36.6,8.79)=J_{11}$$

$$T_{(20,6)}(N'') = T_{(20,6)}(16.6,3.99) = (36.6,9.99)=N'''$$

$$T_{(20,6)}(T'') = T_{(20,6)}(18.6,3.99) = (38.6,9.99)=T'''$$

$$T_{(20,6)}(G_3) = T_{(20,6)}(18.6,5.19) = (38.6,11.19)=F_{12}$$

$$T_{(20,6)}(H_3) = T_{(20,6)}(19.4,5.19) = (39.4,11.19)=G_{12}$$

$$T_{(20,6)}(Z') = T_{(20,6)}(19.4,5.59) = (39.4,11.59)=Z''$$

$$T_{(20,6)}(F_3) = T_{(20,6)}(18.6,5.59) = (38.6,11.59)=E_{12}$$

$$T_{(20,6)}(T'_1) = T_{(20,6)}(18.6,6.79) = (38.6,12.79)=Z_{11}$$

$$T_{(20,6)}(N'_1) = T_{(20,6)}(16.6,6.79) = (36.6,12.79)=W_{11}$$

$$T_{(20,6)}(T_2) = T_{(20,6)}(16.6,7.99) = (36.6,13.99)=K_{12}$$

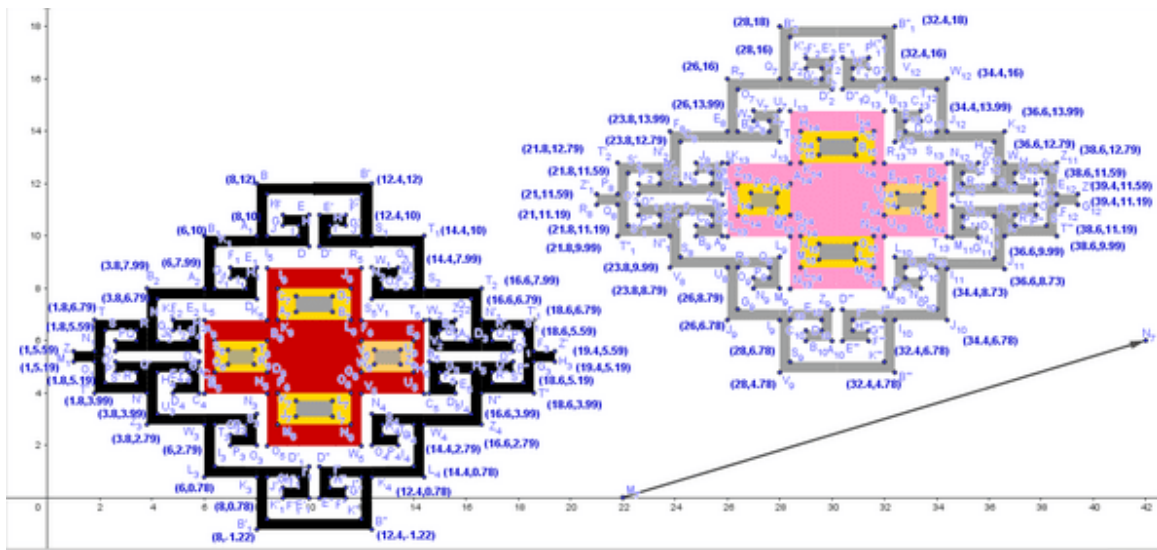
$$T_{(20,6)}(S_2) = T_{(20,6)}(14.4,7.99) = (34.4,13.99)=J_{12}$$

$$T_{(20,6)}(T_1) = T_{(20,6)}(14.4,10) = (34.4,16)=W_{12}$$

$$T_{(20,6)}(S_1) = T_{(20,6)}(12.4,10) = (32.4,16)=V_{12}$$

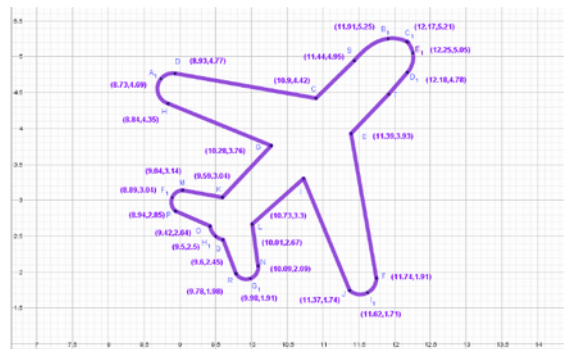
$$T_{(20,6)}(B') = T_{(20,6)}(12.4,12) = (32.4,18)=B''_1$$

Traslación del motivo inca por el vector (20,6)



Anexo E. Transformación de traslación y rotación

Ejemplo: En el avión se aplicará la transformación de traslación y rotación.



En la figura se observa un avión simplificado elaborado por puntos y funciones en el plano cartesiano.

Solución. Cada vector es trasladado y rotado con $\beta = 180^\circ$

$$T_{(4,0)}(C) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 10.9 \\ 4.42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.9 \\ 4.42 \end{pmatrix} = C'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 14.9 \\ 4.42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14.9 \\ 4.42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.9 \\ -4.42 \end{pmatrix} = C''$$

$$T_{(4,0)}(D) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 8.93 \\ 4.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.93 \\ 4.77 \end{pmatrix} = D'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 12.93 \\ 4.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.93 \\ 4.77 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.93 \\ -4.77 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(E) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 11.39 \\ 3.93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.39 \\ 3.93 \end{pmatrix} = E'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 15.39 \\ 3.93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.39 \\ 3.93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.39 \\ -3.93 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(F) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 11.74 \\ 1.91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.74 \\ 1.91 \end{pmatrix} = F'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 15.74 \\ 1.91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.74 \\ 1.91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.74 \\ -1.91 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(G) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 10.28 \\ 3.76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.28 \\ 3.76 \end{pmatrix} = G'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 14.28 \\ 3.76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14.28 \\ 3.76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.28 \\ -3.76 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(H) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 8.84 \\ 4.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.84 \\ 4.35 \end{pmatrix} = H'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 12.84 \\ 4.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.84 \\ 4.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.84 \\ -4.35 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(I) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 10.73 \\ 3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.73 \\ 3.3 \end{pmatrix} = I'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 14.73 \\ 3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14.73 \\ 3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.73 \\ -3.3 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(J) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 11.37 \\ 1.74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.37 \\ 1.74 \end{pmatrix} = J'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 14.37 \\ 1.74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14.37 \\ 1.74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.37 \\ -1.74 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(K) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 9.59 \\ 3.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.59 \\ 3.04 \end{pmatrix} = K'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 13.59 \\ 3.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13.59 \\ 3.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.59 \\ -3.04 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(L) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 10.01 \\ 2.67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.01 \\ 2.67 \end{pmatrix} = L'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 14.01 \\ 2.67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14.01 \\ 2.67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.01 \\ -2.67 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(M) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 9.04 \\ 3.14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.04 \\ 3.14 \end{pmatrix} = M'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 13.04 \\ 3.14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13.04 \\ 3.14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.04 \\ -3.14 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(N) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 10.09 \\ 2.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.09 \\ 2.08 \end{pmatrix} = N'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 14.09 \\ 2.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14.09 \\ 2.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14.09 \\ -2.08 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(O) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 9.42 \\ 2.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.42 \\ 2.64 \end{pmatrix} = O'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 13.42 \\ 2.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13.42 \\ 2.64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.42 \\ -2.64 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(P) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 8.94 \\ 2.85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.94 \\ 2.85 \end{pmatrix} = P'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 12.94 \\ 2.85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.94 \\ 2.85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.94 \\ -2.85 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(Q) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 9.6 \\ 2.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.6 \\ 2.45 \end{pmatrix} = Q'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 13.6 \\ 2.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13.6 \\ 2.45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.6 \\ -2.45 \end{pmatrix} = Q''$$

$$T_{(4,0)}(R) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 9.78 \\ 1.97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.78 \\ 1.97 \end{pmatrix} = R'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 13.78 \\ 1.97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13.78 \\ 1.97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.78 \\ -1.97 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(S) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 11.44 \\ 4.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.44 \\ 4.95 \end{pmatrix} = S'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 15.44 \\ 4.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.44 \\ 4.95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.44 \\ -4.95 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(T) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 11.92 \\ 4.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.92 \\ 4.48 \end{pmatrix} = T'$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 15.92 \\ 4.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.92 \\ 4.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.92 \\ -4.48 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(A_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 8.73 \\ 4.69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.73 \\ 4.69 \end{pmatrix} = A'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 12.73 \\ 4.69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.73 \\ 4.69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.73 \\ -4.69 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(B_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 11.91 \\ 5.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.91 \\ 5.25 \end{pmatrix} = B'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 15.91 \\ 5.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.91 \\ 5.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.91 \\ -5.25 \end{pmatrix} = B''_1$$

$$T_{(4,0)}(C_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 12.17 \\ 5.21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.17 \\ 5.21 \end{pmatrix} = C'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 16.17 \\ 5.21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16.17 \\ 5.21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.17 \\ -5.21 \end{pmatrix} = C''_1$$

$$T_{(4,0)}(D_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 12.18 \\ 4.78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.18 \\ 4.78 \end{pmatrix} = D'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 16.18 \\ 4.78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16.18 \\ 4.78 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.18 \\ -4.78 \end{pmatrix} = D''_1$$

$$T_{(4,0)}(E_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 12.25 \\ 5.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.25 \\ 5.05 \end{pmatrix} = E'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 16.25 \\ 5.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16.25 \\ 5.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16.25 \\ -5.05 \end{pmatrix} = E''_1$$

$$T_{(4,0)}(F_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 8.89 \\ 3.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.89 \\ 3.04 \end{pmatrix} = F'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 12.89 \\ 3.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12.89 \\ 3.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.89 \\ -3.04 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(G_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 9.98 \\ 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.98 \\ 1.9 \end{pmatrix} = G'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 13.98 \\ 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13.98 \\ 1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.98 \\ -1.9 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(H_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 9.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = H'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 13.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$

$$T_{(4,0)}(I_1) = T_{(4,0)} \begin{pmatrix} 11.62 \\ 1.71 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.62 \\ 1.71 \end{pmatrix} = I'_1$$

$$T_{180} \begin{pmatrix} 15.62 \\ 1.71 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15.62 \\ 1.71 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.62 \\ -1.71 \end{pmatrix}$$

El avión por medio de la transformación es trasladado y rotado con un ángulo de 180°

