



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

LA UTILIZACIÓN DE LAS APLICACIONES $\theta - \phi$ CONTRACTIVAS EN ESPACIOS
B-MÉTRICOS COMPLETOS EN LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE
PUNTO FIJO

Línea de investigación:
Matemática pura y aplicada

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Autor

Rocha Yupanqui, Alex Javier

Asesor

Velasquez Alarcon, Jorge David

ORCID: 0000-0002-6844-3487

Jurado

Mendoza Arenas, Rubén Darío

Medina Aguilar, Rosa Luz

Cruzado Quispe, Ever Franklin

Lima - Perú

2026

RECONOCIMIENTO - NO COMERCIAL - SIN OBRA DERIVADA
(CC BY-NC-ND)



LA UTILIZACIÓN DE LAS APLICACIONES θ - ϕ CONTRACTIVAS EN ESPACIOS B-MÉTRICOS COMPLETOS EN LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO

INFORME DE ORIGINALIDAD

24%

INDICE DE SIMILITUD

22%

FUENTES DE INTERNET

18%

PUBLICACIONES

13%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	www.isr-publications.com	2%
	Fuente de Internet	
2	mafiadoc.com	2%
	Fuente de Internet	
3	hdl.handle.net	1%
	Fuente de Internet	
4	moam.info	1%
	Fuente de Internet	
5	cyberleninka.org	1%
	Fuente de Internet	
6	Almanzor Sapena Piera. "Espacios métricos fuzzy definidos por t-normas.", 'Universitat Politecnica de Valencia', 2015	1%
	Fuente de Internet	
7	Çelik, Ufuk. "Sabit noktaların geometrisi ve sabit noktalardaki süreksizlik.", Balıkesir University (Turkey), 2024	1%
	Publicación	
8	Erdal Karapınar, Ravi P. Agarwal. "Chapter 3 Metric Fixed Point Theory", Springer Science and Business Media LLC, 2022	1%
	Publicación	
9	Wei Long, Soomieh Khaleghizadeh, Peyman Salimi, Stojan Radenović et al. "Some new fixed point results in partial ordered metric spaces via admissible mappings", 'Springer Science and Business Media LLC'	1%
	Fuente de Internet	
10	dokumen.pub	1%
	Fuente de Internet	
11	casopisi.junis.ni.ac.rs	1%
	Fuente de Internet	
12	www.iosrjen.org	<1%
	Fuente de Internet	
13	www.slideshare.net	



Universidad Nacional
Federico Villarreal

VRIN | VICERRECTORADO
DE INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

LA UTILIZACIÓN DE LAS APLICACIONES $\theta - \phi$ CONTRACTIVAS EN ESPACIOS B-MÉTRICOS COMPLETOS EN LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO

Línea de investigación

Matemática pura y aplicada

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Autor

Rocha Yupanqui, Alex Javier

Asesor

Velasquez Alarcon, Jorge David

ORCID: 0000-0002-6844-3487

Jurado

Mendoza Arenas, Rubén Darío

Medina Aguilar, Rosa Luz

Cruzado Quispe, Ever Franklin

Lima – Perú

2026

DEDICATORIA

A mi familia: a mi madre Bonifacia, a mi padre Javier y a mi hermana Milagros quienes, con su amor incondicional, su cariño sincero y su amistad inquebrantable, me sostuvieron entre sus abrazos. Su apoyo ha sido mi refugio y mi mayor fortaleza.

Por su confianza en mi persona y en mi meta trazada. Me protegieron con sus regaños, con sus sermones y con sus consejos para enrumbar mi vida en el sendero de la investigación en la ciencia de la matemática.

AGRADECIMIENTOS

Escribo estas líneas con profunda gratitud y una nostalgia entrañable de recordar a todas las personas que me brindaron su apoyo a lo largo de mi formación de pregrado en la Universidad Nacional Federico Villarreal.

Estoy muy agradecido en especial con mi familia, mi madre Bonifacia, mi padre Javier y mi hermana Milagros por su apoyo incondicional. Aunque nuestras raíces no se forjaron en cuna de reyes, y al inicio el calor de un hogar nos fue esquivo, hoy avanzamos con paso firme. Los amo con una intensidad que supera incluso el amor por mí mismo.

Asimismo, me permito expresar un agradecimiento sincero hacia mi propia persona, por la firmeza de carácter demostrada al no ceder ante las múltiples tentaciones que, en su momento, pudieron haberme desviado del sendero matemático. Esta perseverancia me permitió culminar con éxito mi formación. Del mismo modo, manifiesto mi gratitud a Pronabec, cuya valiosa ayuda económica fue fundamental para el desarrollo y sostenimiento de mi carrera profesional.

A mis profesores y administrativos de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Universidad Nacional Federico Villarreal por sus conocimientos tanto académicos como personales.

Por último, a mis compañeros y amigos que fui formando en mi vida universitaria.

Agradezco también al destino, por haberme conducido a la Universidad Nacional Federico Villarreal, institución que lleva el nombre de un insigne matemático peruano. Ubicada en Villa Hermosa, esta casa de estudios fue el escenario donde forjé mi formación académica, mientras residía en Villa El Salvador, llevando con orgullo el nombre de ambas villas en mi trayectoria personal y profesional.

“Duda cuando alguien te diga en qué debes creer, cómo pensar y a qué temer”

ÍNDICE

Resumen	vi
Abstract	vii
I. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Descripción del problema	2
1.1.1 Problema general	2
1.1.2 Problemas específicos.....	2
1.2 Antecedentes	2
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo general	3
1.3.2 Objetivos específicos	3
1.4 Justificación.....	3
1.5 Hipótesis.....	3
1.5.1 Hipótesis general	3
1.5.2 Hipótesis específicas	3
II. MARCO TEÓRICO	4
2.1 Espacios métricos.....	4
2.2 Sucesiones, monotonía de sucesiones, teoremas y completitud en espacios métricos	4
2.3 Lemas de límite superior e inferior	7
2.4 Funciones, continuidad y monotonía	11
2.5 Espacios métricos generalizados y propiedades.....	12
2.6 Contracciones	16

2.7 Teoremas y lemas	19
III. MÉTODO	31
3.1 Tipo de investigación	31
3.2 Ámbito temporal y espacial.....	31
3.3 Variables	31
3.4 Población y muestra	32
3.5 Instrumentos	32
3.6 Procedimiento.....	32
3.7 Análisis de datos	32
3.8 Consideraciones Éticas	32
IV. RESULTADOS	33
4.1 Teorema principal.....	33
4.2 Aplicación a una ecuación integral de Volterra lineal	45
4.3 Aplicación a una ecuación integral de Volterra no lineal	49
4.4 Corolarios	53
V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	60
VI. CONCLUSIONES.....	61
VII. RECOMENDACIONES	62
VIII. REFERENCIAS.....	63

RESUMEN

En esta investigación, se maneja la aplicación $\theta - \phi$ –contracción de un espacio b-métrico en sí mismo extendiendo la definición de la aplicación $\theta - \phi$ –contracción introducida por Zheng en un espacio métrico usual y además se prueba el teorema del punto fijo para aplicaciones $\theta - \phi$ contracción en los espacios b-métricos. Este teorema, es un instrumento matemático poderoso que se usa para verificar la existencia de soluciones a ecuaciones no lineales. Los teoremas del punto fijo establecen que si una $\theta - \phi$ contracción satisface ciertas condiciones, entonces existe un punto fijo en el espacio b-métrico. Las diferentes versiones de este teorema se aplican en la matemática y en las diferentes ciencias; así como por ejemplo en las ecuaciones integrales no lineales.

Palabras claves: Espacio b-métrico, Punto fijo, $\theta - \phi$ –contracción.

ABSTRACT

In this research, we consider the contraction mapping of a b-metric space onto itself by extending the definition of the contraction mapping introduced by Zheng in a standard metric space, and we will also prove the fixed-point theorem for contraction mappings in b-metric spaces. This theorem is a powerful mathematical tool used to verify the existence of solutions to nonlinear equations. Fixed-point theorems state that if a contraction satisfies certain conditions, then there exists a fixed point in the b-metric space. The different versions of this theorem are applied in mathematics and in various sciences, for example, in nonlinear integral equations.

Keywords: b-metric space, Fixed point, θ - ϕ -contraction

I. INTRODUCCIÓN

El principio de contracción de Banach es un resultado fundamental en la teoría de puntos fijos. Debido a su importancia, varios matemáticos han estudiado muchas extensiones y generalizaciones. En 2014, Jleli & Samet analizaron una generalización del teorema del punto fijo de Banach en espacios métricos generalizados en un nuevo tipo de aplicaciones contractivas llamados θ -contracción o (JS-contracción) y demostraron un resultado de punto fijo en espacios métricos generalizados. En esta dirección se ha estudiado y generalizado varios teoremas de punto fijo. Los espacios b-métricos fueron introducidos por Bakhtin (1989) y Czerwik (1993), de tal manera que la desigualdad triangular se sustituye por la desigualdad b-triangular.

Inicialmente se presenta la existencia del teorema del punto fijo para θ - ϕ -contracciones en un espacio b-métrico completo. Se relaciona al teorema ya existente del punto fijo en espacios métricos completos. El nuevo espacio b-métrico surge al distorsionar la desigualdad triangular en una b-desigualdad triangular. En el capítulo 2 se muestra que esta distorsión necesita de una familia de aplicaciones llamadas θ - ϕ -contractivas, que son aplicaciones en los reales que cumplen cierto tipo de acotamiento y continuidad. Se definen conceptos como sucesiones, límite superior, límites inferior, sucesiones de Cauchy en el espacio b-métrico y cuando esté espacio sea completo; seguidamente se muestra el método de investigación, las variables y los pasos a seguir en la obtención del resultado. En el capítulo 4 se muestra el resultado principal, el teorema del punto fijo para aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos. Finalmente, se presenta algunas observaciones y recomendaciones sobre el resultado de la investigación. En el capítulo 6 se mostrará las conclusiones del trabajo.

1.1 Descripción del problema

Esta investigación aborda la dificultad que representa identificar contracciones que cumplan determinadas condiciones dentro de generalizaciones de espacios métricos, de manera que se garantice la existencia de puntos fijos. Ante esta complejidad, se propone la combinación de θ -contracciones y ϕ -contracciones y el uso de estas contracciones como una estrategia que permita establecer la propiedad del punto fijo en espacios b-métricos completos.

1.1.1 Problema general

¿Las aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos garantizan la existencia y unicidad del punto fijo?

1.1.2 Problemas específicos

- ¿Las aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos garantizan la existencia del punto fijo?
- ¿Las aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos garantizan la unicidad del punto fijo?

1.2 Antecedentes

Stefan Banach, probó el teorema del punto fijo para α – contractivas en espacios métricos completos, el cual es utilizada habitualmente para resolver ecuaciones funcionales.

Zheng (2017), introdujo la noción de la aplicación θ - ϕ -contracción y demostró el Teorema del Punto Fijo para aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios métricos completos.

Zheng (2023), probó el Teorema del Punto Fijo para θ -contractivas en espacios b-métricos completos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Demostrar que las aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos garantizan la existencia y unicidad del punto fijo.

1.3.2 *Objetivos específicos*

- Determinar que las aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos garantizan la existencia y unicidad del punto fijo.
- Describir los fundamentos teóricos de los espacios b-métricos, las aplicaciones θ - ϕ -contractivas.
- Establecer resultados preliminares, bases para la demostración del teorema de punto fijo.
- Presentar ejemplos que verifiquen la aplicabilidad.

1.4 **Justificación**

El desarrollo de este estudio busca verificar el teorema del punto fijo para un espacio métrico generalizado que se le denomina espacio b-métrico, el cual permitirá resolver ecuaciones no lineales de integrales.

Con la presente investigación se pretende dar otro enfoque al estudio de los espacios b-métricos en la prueba del teorema del punto fijo, con el objetivo de motivar, promover y difundir el estudio y las aplicaciones de las matemáticas en el entorno social.

1.5 **Hipótesis**

1.5.1 *Hipótesis general*

Toda aplicación θ - ϕ -contractiva en espacios b-métricos completos con condiciones establecidas poseen un único punto fijo.

1.5.2 *Hipótesis específicas*

- Las aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos garantiza la existencia del punto fijo.
- Las aplicaciones θ - ϕ -contractivas en espacios b-métricos completos garantiza la unicidad del punto fijo.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Espacios métricos

Se presenta la definición de espacio métrico y se denota por [EM] el cual tiene tres propiedades importantes que se denotan por [EM1], [EM2] y [EM3].

Definición 2.1 (Espacio Métrico)

Sea X un conjunto con al menos un elemento, y sea $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ una aplicación tal que para todo $x, y, z \in X$, d es llamada métrica si:

$$[EM1] \quad d(x, y) = 0 \text{ si y solo si } x = y$$

$$[EM2] \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$[EM3] \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (Rossafi et al., 2022).}$$

Nota. -

1-La propiedad de no negatividad de un espacio métrico resulta de [EM1] y [EM2] pues en [EM3] consideramos $y = x$ entonces $d(x, x) \leq d(x, z) + d(z, x)$. Luego por [EM1] y [EM2] se tiene la desigualdad $0 \leq 2d(x, z)$ entonces $0 \leq d(x, z)$. Así $d(x, z) \geq 0$.

2-La propiedad [EM2] se conoce como simetría.

3-La propiedad [EM3] se conoce como desigualdad triangular.

4- (X, d) es conocido como un espacio métrico, cuya métrica es “ d ”.

2.2 Sucesiones, monotonía de sucesiones y completitud en espacios métricos

Se define la convergencia y sucesión de Cauchy en los espacios métricos.

Definición 2.2 (Sucesión):

Considerando el espacio métrico (X, d) , una sucesión es una aplicación de $\mathbb{N}$ en X . Esto es, $n \mapsto x_n \in X$, es decir $S(n) = x_n$. Se suele designar por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, identificando la sucesión con la imagen de la aplicación para abreviar $\{x_n\}$ (Romero Martín, 1983).

Definición 2.3 (Convergencia de una sucesión):

Considerando el espacio métrico (X, d) y la sucesión $\{x_n\}$ en X con $x \in X$. La sucesión $\{x_n\}$ es llamada convergente en (X, d) y converge a x . Sí para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Es denotado como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ o $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$ (Romero Martín, 1983).

Definición 2.4 (Sucesión Cauchy):

Considerando el espacio métrico (X, d) . La sucesión $\{x_n\}$ en X se denomina sucesión de Cauchy en (X, d) .

Sí para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$.

O equivalentemente, sí $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+q}) = 0$ para todo $q \in \mathbb{N}$ (Romero Martín, 1983).

Definición 2.5 (Sucesión No Cauchy):

Considerando el espacio métrico (X, d) . La siguiente definición está basada en Rossafi et al. (2022), una sucesión $\{x_n\}$ en X no es una sucesión de Cauchy en (X, d) .

Sí existe un $\varepsilon > 0$ y sucesiones $\{n(k)\}, \{m(k)\}$ de enteros positivos tales que $d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \varepsilon$ para todo $n(k), m(k) \geq k$ y $\varepsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)})$ para todos los enteros positivos k .

Definición 2.6 (Sucesión constante):

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ es constante sí y solo sí $x_n = x_{n+1}$ para casi todo entero positivo n , en el dominio de la sucesión, es decir, sí $x_n = x_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$ con n_0 fijo (Salazar Caicedo & Acevedo Frías, 1997).

Ejemplos.

$$1- \{1^n\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$2- \{2\} = \{2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots\}$$

Definición 2.7 (Sucesión creciente):

Una sucesión $\{x_n\}$ es creciente sí y solo sí $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lima, 2020).

Definición 2.8 (Sucesión no decreciente):

Una sucesión $\{x_n\}$ es no decreciente sí y solo sí $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lima, 2020).

Definición 2.9 (Sucesión decreciente):

Una sucesión $\{x_n\}$ es decreciente sí y solo sí $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lima, 2020).

Definición 2.10 (Sucesión no creciente):

Una sucesión $\{x_n\}$ es no creciente sí y solo sí $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lima, 2020).

Definición 2.11 (Sucesión acotada):

Una sucesión $\{x_n\}$ es acotada si existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $c \leq x_n \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lima, 2020).

Definición 2.12 (Sucesión acotada inferiormente):

Una sucesión $\{x_n\}$ es acotada inferiormente si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lima, 2020).

Definición 2.13 (Sucesión acotada superiormente):

Una sucesión $\{x_n\}$ es acotada superiormente si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Lima, 2020).

Teorema 2.14 (Sucesión monótona y acotada es convergente):

Toda sucesión monótona y acotada es convergente (Lima, 2020).

Prueba. -

Sea una sucesión no creciente $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y acotada inferiormente. Se toma $a = \inf \{x_n; n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Se afirma que $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$,

como $a < a + \varepsilon$, el número $a + \varepsilon$ no es cota inferior de la sucesión $\{x_n\}$. Luego existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} < a + \varepsilon$. Como la sucesión es no creciente, para todo $n > n_0$ entonces $x_n \leq x_{n_0}$ y por tanto $x_n \leq x_{n_0} < a + \varepsilon$. Como $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se observa que $a - \varepsilon < a \leq x_n$. Para todo $n > n_0$ se tiene que $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Así se demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Nota. -

Sí $\{x_n\}$ es no decreciente, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n; n = 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Definición 2.15 (Espacio métrico completo):

El espacio métrico (X, d) se denomina espacio métrico completo. Sí cada sucesión de Cauchy en X es convergente (Herrero, 2010).

2.3 Lemas de límites superior e inferior

Definición 2.16 (Límite superior y Límite inferior):

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que está acotada se prueba que la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$y_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \text{ es convergente.}$$

Prueba. -

1ero: En $\mathbb{R}$, como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado, el subconjunto $\{a_k \mid k \geq n\}$ de colas es acotada.

entonces existen $\sup\{a_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R}$, $\inf\{a_k \mid k \geq n\} \in \mathbb{R}$.

2do: Sea por definición:

$$y_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \dots (\alpha)$$

$$y_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\} \dots (\beta)$$

Se debe tener en cuenta que $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} \dots\} \subseteq \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, a_{n+4} \dots\}$

De la definición del supremo en (α) .

Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. $a_k \leq y_n$, para todo $k \geq n$

En particular para todo $k \geq n + 1$,

$a_k \leq y_n$, para todo $k \geq n + 1$

donde y_n es cota superior de $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$.

Se tiene 2 cosas:

i) y_n es cota superior de $\{a_k \mid k \geq n + 1\}$.

ii) y_{n+1} es la menor cota superior de $\{a_k \mid k \geq n + 1\}$. entonces $y_{n+1} \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Así $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monotona no creciente ... (1)

Por otra parte $\{a_k \mid k \geq n\}$ es acotado inferiormente entonces existe $M \in \mathbb{R}$: $M < a_k$ para todo $k \geq n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Donde M es cota inferior de $\{a_k \mid k \geq n\}$.

Como $\inf \{a_k \mid k \geq n\}$ es la mayor cota inferior de $\{a_k \mid k \geq n\}$ entonces,

$M \leq \inf \{a_k \mid k \geq n\} \leq \sup \{a_k \mid k \geq n\} = y_n$, entonces $M \leq y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada inferiormente ... (2)

Por lo tanto, de (1) y (2) se tiene que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Nota. -

El límite superior de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denotado por $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ es definido por:

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ donde $y_n = \sup \{a_k \mid k \geq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definamos la sucesión $x_n = \inf \{a_k \mid k \geq n\}$. De manera analoga se prueba que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monotona no decreciente y acotada superiormente entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Nota. -

El límite inferior de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denotado por $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ es definido por:

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ donde $x_n = \inf \{a_k \mid k \geq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota. -

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales entonces se tiene lo siguiente,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Ejemplo:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n \cdot n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots)$$

Así $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Lema 2.17:

- a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$
- b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente sí y solo si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \notin \{\pm\infty\}$
- c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es divergente a $+\infty$ sí y solo si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$
- d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es divergente a $-\infty$ sí y solo si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$
- e) Para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene lo siguiente:

e.1)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Nota. - Solo sí la parte derecha de la desigualdad está bien definida, $\infty - \infty$ no está definida.

e.2) Sí $a_n, b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Nota. - Solo sí la parte derecha de la desigualdad está bien definida, $0 \cdot \infty$ no está definida.

e.3)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

Nota. - Solo sí la parte izquierda de la desigualdad está bien definida, $\infty - \infty$ no está definida.

e.4) Sí $a_n, b_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$$

f) Para $A, B \subseteq [0, +\infty[$ se tiene lo siguiente:

$$\sup(AB) = \sup(A) \sup(B) \text{ (Lima, 2020).}$$

Nota. - Solo si la parte izquierda de la desigualdad está bien definida, $0 \cdot \infty$ no está definida.

Prueba. -

a) Por demostrar: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ para toda sucesión acotada $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Se recuerda que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se cumple $\inf(A) \leq \sup(A)$

como $\{a_k : k \geq n\} \subseteq \mathbb{R}$ entonces $\inf\{a_k \mid k \geq n\} \leq \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por definición de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando limite cuando $n \rightarrow \infty$ y como el límite preserva las desigualdades.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\therefore \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

b) Por demostrar: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente si y solo si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \notin \{\pm\infty\}$

Es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe si y solo si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

$\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ se cumple por a) falta demostrar $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ por definición de límite,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ entonces

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

$$\text{entonces } \begin{cases} L - \varepsilon < a_n \Rightarrow L - \varepsilon \leq \inf\{a_n \mid n \geq N\} \\ a_n < L + \varepsilon \Rightarrow \sup\{a_n \mid n \geq N\} \leq L + \varepsilon \end{cases}$$

Además, se sabe por definición de ínfimo, supremo y las dos desigualdades anteriores,

$$L - \varepsilon \leq \inf\{a_n \mid n \geq N\} \leq a_n \leq \sup\{a_n \mid n \geq N\} \leq L + \varepsilon \text{ para todo } n \geq N$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon \leq \inf\{a_n \mid n \geq N\} \Rightarrow L + \varepsilon \leq \inf\{a_n \mid n \geq N\} + 2\varepsilon$$

Por transitividad en $a_n \leq \sup\{a_n \mid n \geq N\} \leq L + \varepsilon$,

$$\sup\{a_n \mid n \geq N\} \leq \inf\{a_n \mid n \geq N\} + 2\varepsilon \text{ para todo } n \geq N, \text{ para todo } \varepsilon = \varepsilon(N) > 0$$

Por definición de las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$y_N \leq x_N + 2\varepsilon \text{ para todo } n \geq N, \text{ para todo } \varepsilon = \varepsilon(N) > 0$$

En particular sea $\varepsilon(N) = \frac{1}{N}$, si $N \rightarrow \infty$ y como el límite conserva desigualdades

$$\lim_{N \rightarrow \infty} y_N \leq \lim_{N \rightarrow \infty} x_N + 2\varepsilon$$

Por definición de límite superior e inferior se tiene que.

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} a_N \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} a_N$$

$$\therefore \limsup_{N \rightarrow \infty} a_N = \liminf_{N \rightarrow \infty} a_N$$

$\Leftrightarrow$) Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ por definición $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$

Sea $\varepsilon > 0$, conforme a la definición formal del límite, resulta que:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |y_n - L| = |\sup\{a_n \mid n \geq N_1\} - L| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_1$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |x_n - L| = |\inf\{a_n \mid n \geq N_2\} - L| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N_2$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ se tiene que para todo $n \geq N$,

$$L - \varepsilon < \sup\{a_n : n \geq N\} < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \inf\{a_n : n \geq N\} < L + \varepsilon$$

Además, se sabe por definición de ínfimo, supremo y las dos desigualdades anteriores,

$$L - \varepsilon < \inf\{a_n \mid n \geq N\} \leq a_n \leq \sup\{a_n \mid n \geq N\} < L + \varepsilon \text{ para todo } n \geq N$$

$$\text{entonces } L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \text{ entonces } |a_n - L| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

g) Para todo par de subconjuntos **A, B** de $[0, +\infty[$ se verifica la identidad:

$$\sup(AB) = \sup(A) \sup(B)$$

$\Rightarrow$) se sabe que $a \leq \sup(A)$ y $b \leq \sup(B)$, como $a, b \geq 0$

entonces $ab \leq \sup(A)\sup(B)$, tomando supremo se tiene que:

$$\sup(AB) \leq \sup(A)\sup(B)$$

$\Leftrightarrow$) Definamos M como el supremo de AB . Al ser M una cota superior de $A \cdot B$ entonces $ab \leq \sup(AB) = M$.

Sí $a = 0$ o $b = 0$ la demostración es trivial. Sí $a > 0$, para todo $b \in B$, entonces $b \leq \frac{M}{a}$.

$\frac{M}{a}$ es cota superior de B , así $\sup(B) \leq \frac{M}{a}$ entonces $a \leq \frac{M}{\sup(B)}$, por lo que $\frac{M}{\sup(B)}$ es cota

superior de A entonces, $\sup(A) \leq \frac{M}{\sup(B)}$ se tiene que, $\sup(A)\sup(B) \leq M = \sup(AB)$.

Por lo tanto, para todo $A, B \subseteq [0, +\infty[$ se tiene lo siguiente:

$$\sup(AB) = \sup(A) \sup(B)$$

Se deja al lector interesado la demostración de c), d) y e).

2.4 Funciones, Continuidad y monotonía

Definición 2.18 (Funciones):

Se entiende por función f una colección de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento (Apostol, 1967).

Definición 2.19 (Continuidad):

Se entiende por función f continua en p si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ siempre que $|x - p| < \delta$ (Apostol, 1967).

Definición 2.20 (Funciones crecientes y decrecientes):

Sea una función f definida en X , y sean x_1, x_2 dos puntos pertenecientes a X .

- a) Si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, se dice que f es creciente en X .
- b) Si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_1 < x_2$, se dice que f es decreciente en X .
- c) Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, se dice que f es no decreciente en X .
- d) Si $f(x_2) \leq f(x_1)$ siempre que $x_1 < x_2$, se dice que f es no creciente en X (Adams, 2001).

Nota. -

En la definición 2.20, cuando $x_1 = x_2$, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$. Luego

- a) Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$, se dice que f es creciente en X .
- b) Si $f(x_2) \leq f(x_1)$ siempre que $x_1 \leq x_2$, se dice que f es decreciente en X .
- c) Si $f(x_1) \leq f(x_2)$ siempre que $x_1 \leq x_2$, se dice que f es no decreciente en X .
- d) Si $f(x_2) \leq f(x_1)$ siempre que $x_1 \leq x_2$, se dice que f es no creciente en X .

2.5 Espacio métrico generalizado y propiedades

Se define el concepto de espacio b-métrico y se denota por [EbM] el cual tendrá tres propiedades importantes que se denotan por [EbM1], [EbM2] y [EbM3].

Definición 2.21 (Espacio b-métrico):

Sea X un conjunto no vacío, $b \geq 1$ un número real dado, y sea $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty[$ una función tal que para todo $x, y, z \in X$, d es llamada b-métrica si:

$$[EbM1] \quad d(x, y) = 0 \text{ si y solo si } x = y$$

$$[EbM2] \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$[EbM3] \quad d(x, y) \leq b \cdot [d(x, z) + d(z, y)] \text{ (Rossafi et al. , 2022).}$$

Observación:

1- La propiedad de no negatividad de un espacio b-métrico resulta de [bEM1] y [bEM3] pues en [bM3] consideramos $z=y$ entonces $d(x, y) \leq b \cdot [d(x, y) + d(y, y)]$. Luego por [bEM1] se tiene la desigualdad $d(x, y) \leq b \cdot d(x, y)$ entonces $0 \leq (b - 1)d(x, y)$ como $b \geq 1$ entonces $d(x, y) \geq 0$.

2-La propiedad [bEM2] se conoce como simetría y es la misma que en un espacio métrico.

3-La propiedad [bEM3] se conoce como desigualdad b-triangular. Es esta la propiedad que generaliza al espacio métrico.

4- (X, d, b) se denomina un espacio b-métrico, con coeficiente “b” y métrica “d”.

Ejemplos:

Ejemplo 1.-

Sea $\mathbf{X} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ y $\mathbf{d}: \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow [0, +\infty[$ definida por, $\mathbf{d}(\mathbf{0}, \mathbf{2}) = \mathbf{d}(\mathbf{2}, \mathbf{0}) = \mathbf{m} \geq 2$,

$$\mathbf{d}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{d}(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = \mathbf{d}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \mathbf{d}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}, \mathbf{d}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{d}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{d}(\mathbf{2}, \mathbf{2}) = \mathbf{0}.$$

Luego $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una b-métrica sobre $\mathbf{X}$ con coeficiente $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{m}}{2}$.Ejemplo 2.- Sea $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$ y la aplicación $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|)^2$

Se verifica que d no es una métrica sino es una b-métrica con b=2.

1ero: d no es una métrica pues sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{1}, \mathbf{z} = \mathbf{2}$ en $\mathbf{X} = \mathbb{R}$, la desigualdad triangular falla.

$$\mathbf{d}(\mathbf{0}, \mathbf{2}) = \left(\sum_{i=1}^1 |\mathbf{0} - \mathbf{2}| \right)^2 \not\leq \mathbf{d}(\mathbf{0}, \mathbf{1}) + \mathbf{d}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) = \left(\sum_{i=1}^1 |\mathbf{0} - \mathbf{1}| \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^1 |\mathbf{1} - \mathbf{2}| \right)^2$$

$$\mathbf{4} \not\leq \mathbf{1} + \mathbf{1}$$

$$\mathbf{4} \not\leq \mathbf{2}$$

2do: d es una b-métrica con b=2

[EbM1] $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ $(\Rightarrow) \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|)^2 = \mathbf{0}$, entonces $|x_i - y_i| = \mathbf{0}$. Así $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ $(\Leftarrow) \mathbf{x} = \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^n |x_i - x_i|)^2 = (\sum_{i=1}^n \mathbf{0})^2 = \mathbf{0}$. Así $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ [EbM2] $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pues $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|)^2 = (\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|)^2 = \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ [EbM3] $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \mathbf{b} \cdot [\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z})]$ con b=2Sea $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$, $\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n |y_i - z_i|$.Se sabe que $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$, para cada $i \in I_n$ entonces $\sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i|$

$$\mathbf{0} \leq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \leq \mathbf{p} + \mathbf{q}$$

$$0 \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \right)^2 \leq (p + q)^2$$

Se recuerda que $(p - q)^2 \geq 0$ entonces $p^2 + q^2 \geq 2pq$

$$0 \leq d(x, z) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \right)^2 \leq (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \leq 2(p^2 + q^2)$$

Así $d(x, z) \leq 2[d(x, y) + d(y, z)]$

Por lo tanto, d es una b -métrica con $b=2$.

Ejemplo 3.- $(C([0, T], \mathbb{R}), d, 2)$ el espacio de funciones continuas en $[0, T]$ es un espacio b -métrico con coeficiente $b=2$. Donde la métrica está definida por:

$$d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^2$$

$$\text{y } C([0, T], \mathbb{R}) := \{f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua en } [0, T]\}$$

Prueba. -

[EbM1] $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$

$(\Rightarrow) d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^2 = 0$, entonces $|x(t) - y(t)|^2 \leq 0$. Así $x(t) = y(t)$ para

todo $t \in [0, T]$. Por lo tanto $x=y$.

$(\Leftarrow) x = y$, entonces $d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - x(t)|^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} |0(t)|^2 = 0$. Así $d(x, y) = 0$

[EbM2] $d(x, y) = d(y, x)$ pues $d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^2 = \sup_{0 \leq t \leq T} |y(t) - x(t)|^2 =$

$d(y, x)$

[EbM3] $d(x, y) \leq b \cdot [d(x, z) + d(z, y)]$ con $b=2$

Se sabe que $(m + n)^2 \leq 2(m^2 + n^2)$ pues $(m - n)^2 \geq 0$ lo que implica $m^2 + n^2 \geq 2mn$

sumando $m^2 + n^2$ se tiene que $2(m^2 + n^2) \geq m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2$, para todo m ,

n número real.

Se sabe por desigualdad triangular,

$|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})| = |\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t}) + \mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})| \leq |\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})| + |\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|$, para cada $\mathbf{t} \in [0, \mathbf{T}]$. Entonces $|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|^2 \leq (|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})| + |\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|)^2$

Sea $\mathbf{m} = |\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})|$, $\mathbf{n} = |\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|$ entonces

$$|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|^2 \leq (|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})| + |\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|)^2 \leq 2\{(|\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})|)^2 + (|\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|)^2\}$$

Por propiedades del supremo:

$$\sup_{0 \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{T}} |\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|^2 \leq 2 \left\{ \sup_{0 \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{T}} |\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})|^2 + \sup_{0 \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{T}} |\mathbf{y}(\mathbf{t}) - \mathbf{z}(\mathbf{t})|^2 \right\}$$

$$\text{Así } \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 2[\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{z})]$$

Por lo tanto, $\mathbf{d}$ es una $\mathbf{b}$ -métrica con $\mathbf{b}=2$.

Se define la convergencia y sucesión de Cauchy en el espacio $\mathbf{b}$ -métrico, de la misma manera que en un espacio métrico usual, solo cambia la métrica por la $\mathbf{b}$ -métrica.

Definición 2.22 (Convergencia de una Sucesión en espacios $\mathbf{b}$ -métricos):

Consideremos $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$ como espacio $\mathbf{b}$ -métrico, la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ de elementos en $\mathbf{X}$ con $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. La sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ es llamada convergente en $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$ y converge a $\mathbf{x}$, Sí, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un índice $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\mathbf{n} \geq \mathbf{n}_0$ se cumple $\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon$ y este hecho es denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ o $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ cuando $\mathbf{n} \rightarrow \infty$. (Romero Martín, 1983)

Teorema 2.23 (Unicidad del límite en espacios $\mathbf{b}$ -métricos):

Consideremos $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$ como espacio $\mathbf{b}$ -métrico. Sí la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$ en $\mathbf{X}$ converge a $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y también converge a $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Prueba. -

Supongamos que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{y}$. Es decir:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ y } \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \rightarrow 0 \text{ cuando } \mathbf{n} \rightarrow \infty$$

Afirmación: $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$

Aplicando la condición $\mathbf{b}$ -triangular, se obtiene que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b}\{\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y})\}$$

Esta desigualdad es válida para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

Tomamos límite cuando $\mathbf{n} \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b}\{\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}}) + \lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}, \mathbf{y})\}$$

Pero $\mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$ y $\mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{0}$. Por lo tanto: $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b}\{\mathbf{0} + \mathbf{0}\}$

Como la distancia es no negativa, se tiene $\mathbf{0} \leq \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{0}$, lo que implica:

$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Definición 2.24 (Sucesión b-Cauchy):

Consideremos $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$ como espacio b-métrico y $\{\mathbf{x}_{\mathbf{n}}\}$ una sucesión en $\mathbf{X}$. Se denomina sucesión b-Cauchy $\{\mathbf{x}_{\mathbf{n}}\}$ en $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$. Sí, dado cualquier $\varepsilon > \mathbf{0}$ existe $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_{\mathbf{m}}) < \varepsilon$ para todo $\mathbf{n}, \mathbf{m} \geq \mathbf{n}_0$.

O equivalentemente, si $\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}+\mathbf{p}})$ es $\mathbf{0}$ para todo $\mathbf{p} \in \mathbb{N}$ (Romero Martín, 1983).

Definición 2.25 (Espacio b-métrico completo):

Consideremos $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$ un espacio b-métrico y $\{\mathbf{x}_{\mathbf{n}}\}$ una sucesión en $\mathbf{X}$. El espacio métrico $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$ se denomina espacio métrico completo. Cuando toda sucesión de b-Cauchy en $\mathbf{X}$ es convergente (Herrero, 2010).

2.6 Contracciones

Definición 2.26 (Contracción):

Consideramos $(\mathbf{X}, \mathbf{d})$ como espacio métrico. Una aplicación $\mathbf{T}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ recibe el nombre de contracción si se puede hallar un número real $\alpha \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$ con la propiedad de que $\mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) \leq \alpha \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ (Ivorra Castillo, 2002).

Nota. -La aplicación $\mathbf{T}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ también es llamada α – **contracción**.

La siguiente definición fue introducida por Jleli.

Definición 2.27 (Familia Θ):

Sea Θ la familia de todas las funciones $\theta:]\mathbf{0}, +\infty[\rightarrow]\mathbf{1}, +\infty[$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(Θ_1) θ es no decreciente.

(Θ_2) Para toda sucesión $(x_n) \subset]0, +\infty[$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ si y solo si } \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) = 1$$

(Θ_3) θ es continua en $]0, +\infty[$ (Jleli & Samet, 2014).

Nota. -

$$\Theta := \{ \theta:]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[: \theta \text{ cumple } \Theta_1, \Theta_2 \text{ y } \Theta_3 \}$$

Definición 2.28 (Familia Φ):

Sea Φ la familia de todas las funciones $\phi: [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(Φ_1) ϕ es no decreciente.

(Φ_2) Para cada $t \in]1, +\infty[$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 1 \text{ donde } \phi^n(t) = (\phi \circ \phi \circ \phi \circ \dots \circ \phi)_{(t)}, n \text{ veces.}$$

(Φ_3) La función ϕ es continua en $[1, +\infty[$ (Rossafi, Kari, Park, & Lee, 2022).

Nota. - $\Phi := \{ \phi: [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[: \phi \text{ cumple } \Phi_1, \Phi_2 \text{ y } \Phi_3 \}$

Definición 2.29 (θ - ϕ -contracción en espacios métricos):

Consideremos (X, d) como espacio métrico y sea $T: X \rightarrow X$ una aplicación entonces T recibe el nombre de $\theta - \phi - \text{contracción}$ si puedo encontrar $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$,

$$\text{siempre que } d(Tx, Ty) > 0, \text{ entonces } \theta[d(Tx, Ty)] \leq \phi(\theta[N(x, y)])$$

donde:

El término $N(x, y)$ corresponde al máximo de las distancias $d(x, y)$, $d(x, Tx)$, $d(y, Ty)$

Esta definición fue introducida por (Zheng, Cai, & Wang, 2017).

A partir de esta definición, se establece una generalización para espacios b-métricos.

Definición 2.30 (θ - ϕ -contracción en espacios b-métricos):

Consideremos (X, d, b) como espacio b-métrico con coeficiente $b \geq 1$ y sea $T: X \rightarrow X$ una aplicación, T recibe el nombre de **$\theta - \phi$ - contracción** si existen $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ tal que para todo $x, y \in X$ se tiene que

$$0 < d(Tx, Ty) \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi(\theta[M(x, y)])$$

El término $M(x, y)$ corresponde al máximo de $d(x, y)$, $d(x, Tx)$, $d(y, Ty)$ y $\frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}$

Esta definición fue propuesta por (Rossafi, Kari, Park, & Lee, 2022).

Definición 2.31 (θ - contracción en espacios b-métricos):

Sea (X, d, b) un espacio b-métrico con coeficiente $b \geq 1$ y sea $T: X \rightarrow X$ una aplicación. T recibe el nombre de **θ - contracción** si existen $\theta \in \Theta$ y $r \in]0, 1[$ tal que para cualquier $x, y \in X$ se tiene que:

$$0 < d(Tx, Ty) \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq (\theta[M(x, y)])^r$$

El término $M(x, y)$ corresponde al máximo de $d(x, y)$, $d(x, Tx)$, $d(y, Ty)$ y $\frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}$

(Rossafi, Kari, Park, & Lee, 2022).

Definición 2.32 (θ - ϕ contracción de tipo Kannan en espacios b-métricos):

Consideremos (X, d, b) como espacio b-métrico con coeficiente $b \geq 1$ entonces $T: X \rightarrow X$ recibe el nombre de θ - ϕ contracción de tipo Kannan si existen $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ dado cualquier $x, y \in X$ se tiene que:

$$0 < d(Tx, Ty) \text{ entonces } \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi(\theta[M(x, y)])$$

El término $M(x, y) = \frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2}$ (Rossafi, 2022).

Definición 2.33 (θ - ϕ contracción de tipo Reich en espacios b-métricos):

Consideramos (X, d, b) como espacio b-métrico con coeficiente $b \geq 1$ y sea $T: X \rightarrow X$ recibe el nombre de θ - ϕ contracción de tipo Reich si existen $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ tal que para cualquier $x, y \in X$ se tiene que

$$0 < d(Tx, Ty) \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi(\theta[M(x, y)])$$

El término $M(x, y) = \frac{d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Ty)}{3}$ (Rossafi, Kari, Park, & Lee, 2022).

Tomando como base las generalizaciones propuestas por (Rossafi et al. , 2022), se introduce la siguiente definición:

Definición 2.34 (θ - ϕ contracción de tipo Rocha en espacios b-métricos):

Consideramos (X, d, b) como espacio b-métrico con coeficiente $b \geq 1$ y sea $T: X \rightarrow X$ recibe el nombre de θ - ϕ contracción de tipo Rocha si existen $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ tal que para cualquier $x, y \in X$ se tiene que

$$0 < d(Tx, Ty) \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi(\theta[M(x, y)])$$

donde el término $M(x, y) = \frac{d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Ty) + \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}}{4}$

2.7 Teoremas y lemas:

Lema 2.35

Sea (X, d, b) un espacio b-métrico con coeficiente $b \geq 1$, y suponga que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones b-convergentes a x e y , entonces:

$$\frac{1}{b^2} d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b^2 d(x, y) \dots (2.1)$$

De forma particular, si $x=y$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \dots (2.2)$

Además, para cualquier $z \in X$ se cumple que:

$$\frac{1}{b} d(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq b d(x, z) \dots (2.3)$$

para todo $x \in X$. (Aghajani et al., 2014)

Prueba. -

Usando la desigualdad b-triangular en un espacio b-métrico es cierto que:

Afirmación1:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \dots (2.4)$$

En efecto: por la desigualdad b-triangular

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \}$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \dots (2.5)$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \}$$

Como $\mathbf{b} \geq 1$ entonces $\mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \dots (2.6)$

Por transitividad de (2.6) en (2.5)

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \dots (2.4)$$

Afirmación2:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_n) \dots (2.7)$$

En efecto: por la desigualdad b-triangular

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq \mathbf{b} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) \}$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) \dots (2.8)$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) \leq \mathbf{b} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_n) \}$$

Como $\mathbf{b} \geq 1$ entonces $\mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) \leq \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_n) \dots (2.9)$

Por transitividad de (2.9) en (2.8)

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{b}^2 \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_n) \dots (2.7)$$

Ahora utilizaremos nuestra hipótesis, $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ e $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$ si $\mathbf{n} \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = 0 = \liminf_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = \limsup_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})$$

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) = 0 = \liminf_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) = \limsup_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y})$$

Tomando límite inferior en (2.4)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{b d(x, x_n) + b^2 d(x_n, y_n) + b^2 d(y_n, y)\}$$

por Lema del límite inferior, se cumple la relación:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{b d(x, x_n)\} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \{b^2 d(x_n, y_n)\} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \{b^2 d(y_n, y)\}$$

Como $1 \leq b$ se tiene que,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, y) \leq b \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) + b^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + b^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y)$$

por hipótesis:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, y) \leq b \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) + b^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + b^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} d(y_n, y)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, y) \leq b (0) + b^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) + b^2 (0)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, y) \leq b^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

Como $b \geq 1$ y $d(x, y)$ no depende de n ,

$$d(x, y) \leq b^2 \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

Así tenemos la primera desigualdad de (2.1)

$$\frac{1}{b^2} d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \dots (2.10)$$

Tomando límite superior en (2.7)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{b d(x_n, x) + b^2 d(x, y) + b^2 d(y, y_n)\}$$

por Lema del límite superior,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{b d(x_n, x)\} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \{b^2 d(x, y)\} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \{b^2 d(y, y_n)\}$$

como $b \geq 1$ se tiene que,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) + b^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, y) + b^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(y, y_n)$$

por hipótesis

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) + b^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, y) + b^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(y, y_n)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b (0) + b^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, y) + b^2 (0)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b^2 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x, y)$$

Como $d(x, y)$ no depende de n . Así tenemos la segunda desigualdad de (2.1). La relación establece que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b^2 d(x, y) \dots (2.11)$$

Por lema del límite superior e inferior se tiene que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

De (2.10) y (2.11) en la desigualdad anterior se tiene (2.1)

$$\frac{1}{b^2} d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b^2 d(x, y) \dots (2.1)$$

Ahora demostremos (2.2).

En particular si $x = y$ entonces $d(x, y) = 0$. Luego en (2.1) se tiene que,

$$\frac{1}{b^2} (0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq b^2 (0)$$

Por teorema del sándwich,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Como los límites superior e inferior existen y son iguales entonces el límite existe y es 0,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \dots (2.2)$$

Ahora demostremos la relación (2.3)

Sea $z \in X$ por la desigualdad b-triangular se tiene,

$$d(x, z) \leq b \{d(x, x_n) + d(x_n, z)\} = b d(x, x_n) + b d(x_n, z)$$

$$d(x_n, z) \leq b \{d(x_n, x) + d(x, z)\} = b d(x_n, x) + b d(x, z)$$

Tomando límite inferior y límite superior respectivamente a las b-desigualdades,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{b d(x, x_n) + b d(x_n, z)\}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{b d(x_n, x) + b d(x, z)\}$$

Utilizando el lema del límite inferior y límite superior se tiene:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \{b d(x, x_n)\} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \{b d(x_n, z)\}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \{b d(x_n, x)\} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \{b d(x, z)\}$$

Como $d(x, y)$ no depende de n y por hipotesis se tiene que,

$$d(x, z) \leq b \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) + b \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z)$$

$$d(x, z) \leq s(0) + b \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z)$$

Como $b \geq 1$ se tiene que,

$$\frac{1}{b} d(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \dots (2.12)$$

Como $d(x, y)$ no depende de n , entonces por hipótesis

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq b \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) + b d(x, z)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq b(0) + b d(x, z)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq b d(x, z) \dots (2.13)$$

Por lema del límite superior e inferior,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z)$$

De (2.13) y (2.12) en la anterior desigualdad se tiene (2.3).

$$\frac{1}{b} d(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) \leq b d(x, z) \dots (2.3)$$

Lema 2.36

Consideremos (X, d, b) como espacio b -métrico con coeficiente $b \geq 1$, y sea $\{x_n\}$ una sucesión en X donde $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \dots (3.1)$

Sí $\{x_n\}$ no es una sucesión b -Cauchy, entonces se puede encontrar $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones $\{m(k)\}$ y $\{n(k)\}$ de enteros positivos tales que para las cuatro sucesiones:

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \text{ y } d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \text{ se tiene,}$$

$$[L1] \varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \varepsilon$$

$$[L2] \quad \frac{\varepsilon}{b} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^2 \varepsilon$$

$$[L3] \quad \frac{\varepsilon}{b} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b^2 \varepsilon$$

$$[L4] \quad \frac{\varepsilon}{b^2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq b^3 \varepsilon$$

(Rezaei Roshana, Parvaneh, & Kadelburg, 2019).

Prueba. -

Supongamos que, $\{x_n\}$ no es una sucesión de Cauchy. Luego existen $\varepsilon > 0$ y sucesiones

$\{m(k)\}$ y $\{n(k)\}$ de enteros positivos tales que $n(k) > m(k) \geq k$, se

tiene que $d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon$ y $d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N} \dots$ (3.2)

Ahora de (3.2) y usando la b-desigualdad triangular se tiene, el siguiente resultado:

$$\varepsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b[d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)})]$$

como $d(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}) < \varepsilon$ de (3.2), se tiene que:

$$\varepsilon \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) < b \varepsilon + b d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \dots (3.3)$$

Tomando límite superior y límite inferior cuando $k \rightarrow +\infty$ en (3.3)

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \\ &< b \varepsilon + b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) \end{aligned}$$

Por hipótesis (3.1) como $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1})$ entonces

$$\varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) < b \varepsilon + b (0)$$

Así se tiene:

$$[L1] \quad \varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \varepsilon \dots (3.4)$$

Usando la b-desigualdad triangular de nuevo se tiene que,

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b[d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)})] \dots (3.5)$$

Además $d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b[d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})]$ entonces,

$$b d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^2 d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + b^2 d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) \dots (3.6)$$

Tomando límite inferior en (3.5)

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)})$$

Por hipótesis (3.1) como $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1})$ entonces

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + b(0)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})$$

Luego de (3.4)

$$\varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})$$

entonces $\varepsilon \leq b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \dots (3.7)$

Tomando límite superior en (3.6)

$$b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^2 \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) + b^2 \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})$$

De (1.4) y por hipótesis (3.1)

$$b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^2(b\varepsilon) + b^2 0 = b^3 \varepsilon$$

$$b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^3 \varepsilon \dots (1.8)$$

Por la propiedad $\liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})$ en (3.7) y (3.8),

entonces $\varepsilon \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^3 \varepsilon$

Como $b \geq 1$ se tiene el siguiente resultado:

$$[L2] \quad \frac{\varepsilon}{b} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^2 \varepsilon$$

Usando la b-desigualdad triangular de nuevo se tiene

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b[d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)})] \dots (3.9)$$

Tomando límite inferior en (3.9) se tiene,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)})$$

Por hipótesis (3.1) $\liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b 0 + b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)})$

De (3.4) $\varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \dots$ (3.10)

Además $d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b[d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)})]$

entonces $b d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b^2 d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}) + b^2 d(x_{m(k)}, x_{n(k)})$

Tomando límite superior si tiene que,

$$b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b^2 \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}) + b^2 \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)})$$

Por hipótesis (3.1) y de (3.4) $\limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b \varepsilon$ se tiene lo siguiente,

$$b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b^2 (0) + b^2 \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b^3 \varepsilon$$

entonces $b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b^3 \varepsilon \dots$ (3.11)

De (3.10) y (3.11) por transitividad se tiene que,

$$\varepsilon \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b^3 \varepsilon$$

como $b \geq 1$ se tiene,

[L3] $\frac{\varepsilon}{b} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b^2 \varepsilon \dots$ (3.12)

Usando la b-desigualdad triangular.

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b[d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)})]$$

Tomando límite inferior, considerando (3.12) y (3.1),

$$\frac{\varepsilon}{b} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) \leq b \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) + b (0)$$

Como $b \geq 1$ se tiene, $\frac{\varepsilon}{b^2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \dots$ (3.13)

Además, por la b-desigualdad triangular se tiene que,

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq b[d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})]$$

Tomando límite superior y considerando (3.1)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq b(0) + b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \dots$$
 (3.14)

Por [L2], se tiene que $\limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^2 \varepsilon$ entonces:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq b(0) + b \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) \leq b^3 \varepsilon \dots (3.15)$$

De (3.13) y (3.15) se tiene que,

$$[L4] \quad \frac{\varepsilon}{b^2} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq b^3 \varepsilon$$

Lema 2.37

Sí $\phi \in \Phi$, entonces se tiene que: $\phi(1) = 1$ y $\phi(t) < t$, para todo $t \in]1, +\infty[$.

(Zheng et al., 2017)

Prueba. -

Afirmación 1: $\phi(t) < t$, para todo $t \in]1, +\infty[$

Procedamos por contradicción. Existe $t_0 \in]1, +\infty[$ tal que $\phi(t_0) \geq t_0$.

Observemos que por definición de ϕ se tiene que $\phi(t_0) \in [1, +\infty[$.

La monotonía de ϕ implica $t_0 \leq \phi(t_0) \leq \phi(\phi(t_0)) \leq \dots \leq \phi^{(n)}(t_0)$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

entonces por transitividad $t_0 \leq \phi^{(n)}(t_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(t_0)$, pero como $t_0 > 1$

Sin embargo, por la propiedad (Φ_3) , $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)}(t_0) = 1$ ($\Rightarrow \Leftarrow$).

Por tanto $\phi(t) < t$, para todo $t \in]1, +\infty[$.

Afirmación 2: $\phi(1) = 1$

En efecto: por definición del contradominio de ϕ se tiene,

$1 \leq \phi(1) \leq \phi(t)$ por la monotonía de ϕ cuando $t \rightarrow 1^+ (t > 1)$ de la afirmación 1,

$$1 \leq \phi(1) \leq \phi(t) < t$$

Tomando el límite cuando $t \rightarrow 1^+$ entonces $1 \leq \phi(1) \leq 1$.

$$\therefore \phi(1) = 1$$

Teorema 2.38 [Del Punto Fijo para $\theta - \phi$ – contracciones en espacios métricos completos]

Consideremos (X, d) como espacio métrico completo y sea $T: X \rightarrow X$ una $\theta - \phi -$ **contracción**, esto implica que T tiene un único punto fijo (Zheng, Cai, et Wang, 2017).

Teorema 2.39 [Teorema del punto fijo para $\theta -$ **contracciones** en espacios b-métricos completos]

Sea (X, d, b) un espacio b-métrico completo con coeficiente $b \geq 1$ y sea $T: X \rightarrow X$ una $\theta -$ **contracción**. Es decir, existen $\theta \in \Theta$ y una constante $r \in]0, 1[$ tales que para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que:

$$0 < d(Tx, Ty) < \theta [b^3 d(Tx, Ty)] \leq (\theta [M(x, y)])^r$$

donde $M(x, y)$ es el máximo de $d(x, y)$, $d(x, Tx)$, $d(y, Ty)$ y $\frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}$

entonces T admite un único punto fijo (Rossafi et al. , 2022).

Teorema 2.40

Sea $X = C[0, T]$ el espacio de funciones continuas en $[0, T]$. Se define la métrica:

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t) - g(t)|$$

entonces (X, d_{∞}, b) es completo.

Prueba. -

Sea $\{f_n\} \subset C[0, T]$ una sucesión de Cauchy. Por definición:

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que cada $m, n \geq N$ se tiene que:

$$d_{\infty}(f_n, f_m) = \sup_{0 \leq t \leq T} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

En particular, para todo $t \in [0, T]$ fijo, se cumple:

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sup_{0 \leq t \leq T} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$$

Por lo tanto, para todo $t \in [0, T]$, la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ es completo, para todo $t \in [0, T]$, existe un real $f(t)$ tal que, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$

Se prueba que f_n converge uniformemente en $[0, T]$.

Por ser $\{f_n\}$ de Cauchy, sea $\varepsilon > 0$, tomamos $n \geq N$ fijo y hacemos que $m \rightarrow \infty$. Para todo $t \in [0, T]$ se tiene que $|f_n(t) - f(t)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$

Esta desigualdad se cumple para todo $t \in [0, T]$. Por lo tanto:

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{0 \leq t \leq T} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \text{ para todo } t \in [0, T]$$

Esto demuestra que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $[0, T]$.

Como cada f_n es continua en $[0, T]$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en $[0, T]$.

Cuando una familia de funciones continuas converge de manera uniforme, el límite obtenido es igualmente continuo.

Por lo tanto $f \in C[0, T] = X$ y (X, d_∞, b) es un completo.

Teorema 2.41

Consideremos $X = C[0, T]$, espacio de funciones continuas en $[0, T]$. Se define la métrica:

$$d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)|^2$$

entonces $(X, d, 2)$ es un espacio b-métrico completo.

Prueba. -

Sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión en Cauchy en $(X, d, 2)$. Entonces para todo $\varepsilon^2 > 0$ existe N tal

que para todo $m, n \geq N$, $d(x_m, x_n) = \sup_{0 \leq t \leq T} |x_m(t) - x_n(t)|^2 = \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x_m(t) - x_n(t)| \right)^2 =$

$(d_\infty(x_m, x_n))^2 < \varepsilon^2$, donde d_∞ es la métrica del supremo. Tomando raíz cuadrada:

$$d_\infty(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Luego $\{x_m\}$ es de Cauchy en $(X, d_\infty, 2)$, como este espacio es completo, existe $x \in X$ tal que $x_m \rightarrow x$. Por lo tanto $(X, d, 2)$ es completo.

III. MÉTODO

3.1. Tipo de investigación

En referencia a Arias (2012), la presente investigación corresponde a la categoría de investigación pura, con un diseño documental mediante el enfoque deductivo.

3.2. Ámbito temporal y espacial

El estudio se llevó a cabo entre los meses de febrero del 2024 y febrero del 2026. No se necesitó de un ámbito espacial concretó, ya que para la investigación se utilizaron fuentes bibliográficas en versiones digitales.

3.3. Variables

Debido a que la investigación pertenece al área de la matemática pura, no se manipulan variables experimentales. No obstante, se consideran las siguientes variables.

Variable independiente:

Aplicaciones $\theta - \phi$ contractivas en espacios b-métricos completos.

Variable dependiente:

El Teorema del punto fijo.

3.4. Población y muestra

Por la naturaleza de investigación pura y con diseño documental entonces no se requiere delimitar población ni muestra en el sentido estadístico.

3.5. Instrumentos

La investigación se apoyó en materiales bibliográficos como artículos científicos y textos especializados que contribuyó a la solidez del trabajo.

3.6. Procedimiento

La investigación se desarrolló en las siguientes etapas.

1) Se estudió la generalización del espacio métrico, reemplazando la desigualdad triangular clásica por una b-desigualdad triangular, obteniendo la estructura del espacio b-métrico.

2) Se introdujo la definición de la aplicación $\theta - \phi$ contractiva en espacios b-métricos y se analiza

3) Se demostró la existencia de la propiedad del teorema de punto fijo para aplicaciones θ contractivas y $\theta - \phi$ contractivas en espacios b-métricos completos.

3.1) Se construyó una sucesión por recursividad con la aplicación $\theta - \phi$ contractiva.

3.2) Se demostró que el límite de la b-métrica de los términos consecutivos en la sucesión creada por recursividad es cero.

3.3) Se probó que esa sucesión por recursividad es de b-Cauchy con la ayuda de (3.2).

3.4) Se utilizó la completitud de un espacio b-métrico en la sucesión de b-Cauchy creada por recursividad en (3.1). Así esta converge a un punto del espacio b-métrico.

3.5) Se probó la existencia del punto fijo.

3.6) Se probó la unicidad del punto fijo.

4) Se aplicó el teorema del punto fijo a ecuaciones no lineales de integrales.

3.7. Análisis de datos

Debido al carácter teórico y documental de la presente investigación, no se llevó a cabo un análisis de datos sobre mediciones empíricas o muestras estadísticas, sino sobre conceptos, definiciones, propiedades matemáticas y demostraciones extraídas de textos especializados y artículos científicos.

3.8. Consideraciones éticas

La investigación es de tipo teórica y documental, por lo que no involucra experimentos con seres humanos, animales ni datos sensibles. Se respetó la propiedad intelectual citando y referenciando todas las fuentes consultadas. Se actuó con honestidad académica, presentando los resultados de manera objetiva y transparente. Además, las fuentes digitales fueron obtenidas legalmente a través de repositorios y bases de datos académicas autorizadas. Por lo tanto, la investigación cumple con los estándares éticos exigidos.

IV. RESULTADOS

4.1 Teorema Principal [Punto fijo en espacios b-métricos completos]

Consideremos (X, d, b) como espacio b-métrico completo con coeficiente $b \geq 1$ y $T: X \rightarrow X$ una $\theta - \phi$ - **contracción**, es decir, existen $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene,

$$0 < d(Tx, Ty) \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi[\theta(M(x, y))]\dots\dots (4.1)$$

El término $M(x, y)$ es el máximo de $d(x, y)$, $d(x, Tx)$, $d(y, Ty)$ y $\frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}$

entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba. -

Sea $x_0 \in X$ un punto en X , se construye la siguiente sucesión:

$$x_1 = T(x_0)$$

$$x_2 = T(x_1) \text{ entonces } x_2 = T(x_1) = T(T(x_0)) = T^2(x_0)$$

$$x_3 = T(x_2) \text{ entonces } x_3 = T(x_2) = T(T^2(x_0)) = T^3(x_0)$$

.
.
.

$$x_{n+1} = T(x_n) \text{ entonces } x_{n+1} = T(x_n) = T(T^n(x_0)) = T^{n+1}(x_0). \text{ Para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así definimos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por recursividad.

Primero se mostrará la existencia del punto fijo. Se tiene 2 casos.

Caso1: $d(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = 0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

entonces por definición y recursividad, se tiene $x_{n_0} = x_{n_0+1} = T(x_{n_0})$.

Por lo tanto, existe un punto fijo x_{n_0} , pues $T(x_{n_0}) = x_{n_0}$.

Caso2: $d(x_n, x_{n+1}) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por recursividad se tiene $d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) > 0$

Como $\mathbf{T}$ es una $\theta - \phi$ - **contracción**, entonces considerando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{n-1}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}_n$ en (4.1) se tiene que,

$$\theta[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \leq \phi[\theta(\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))] \text{ para todo } \mathbf{n} \in \mathbb{N}. \dots (4.2)$$

$$\text{donde } \mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{T}\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{T}\mathbf{x}_n), \frac{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{T}\mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)}{2\mathbf{b}^2} \}$$

por definición de la sucesión recursiva $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y las propiedades [bEM1], [bEM2], [bEM3].

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}), \frac{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)}{2\mathbf{b}^2} \}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}), \frac{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) + 0}{2\mathbf{b}^2} \}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}), \frac{1}{2\mathbf{b}^2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) \}$$

$$\text{Afirmación 1: } \mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \}$$

Usando la desigualdad b-triangular.

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \mathbf{b}(\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1})) \dots (4.3)$$

como $\mathbf{b} \geq 1$ entonces $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2\mathbf{b}}$. Multiplicando $\frac{1}{2\mathbf{b}^2}$ en (4.3).

$$\frac{1}{2\mathbf{b}^2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \frac{1}{2\mathbf{b}^2} \mathbf{b}(\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}))$$

$$\frac{1}{2\mathbf{b}^2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \frac{1}{2\mathbf{b}} (\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1})) \leq \frac{1}{2} (\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}))$$

Por transitividad se tiene,

$$\frac{1}{2\mathbf{b}^2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \frac{1}{2} (\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}))$$

Además, por definición del máximo.

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \leq \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \} \text{ y } \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \}$$

$$\frac{1}{2\mathbf{b}^2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \frac{1}{2} \left(\max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \} + \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \} \right)$$

$$\frac{1}{2\mathbf{b}^2} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n+1}) \leq \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \}$$

Así se obtiene que $\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \max_{x,y \in X} \{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1})\}$. Para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

Afirmación 2: $\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$

Supongamos que $\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)) > \mathbf{0}$ (por caso 2) y como

$\mathbf{T}$ es $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\phi}$ – **contracción** se tiene:

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \leq \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))] = \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)))] \dots (4.4)$$

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \leq \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)))] \dots (4.5)$$

Como $\mathbf{b} \geq \mathbf{1}$ entonces $\mathbf{b}^3 \geq \mathbf{1}$. Así $\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)) \geq \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))$

Se sabe que $\boldsymbol{\theta}$ es no decreciente y esta bien definida en $]0; +\infty[$ por lo que,

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \geq \boldsymbol{\theta}[\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \dots (4.6)$$

de (4.5) y (4.6), por transitividad se tiene,

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \leq \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)))] \dots (4.7)$$

Sea $\mathbf{t} = \boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)))$ y por el lema 2.37 en (4.7) se tiene que,

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \leq \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)))] < \boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n)))$$

Por transitividad se tiene una contradicción,

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] < \boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))) (\Rightarrow \Leftarrow)$$

Así $\mathbf{M}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$. Para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N} \dots (4.8)$

Reemplazando (8) en la definición de $\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\phi}$ – **contracción** se tiene que,

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_{n-1}), \mathbf{T}(\mathbf{x}_n))] \leq \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))]\dots (4.9)$$

Por recursividad tenemos,

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1})] \leq \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))], \text{ para todo } \mathbf{n} \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathbf{b}^3 \geq \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{\theta}$ es no decreciente.

$$\boldsymbol{\theta}[\mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1})] \leq \boldsymbol{\theta}[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1})] \leq \boldsymbol{\phi}[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n))], \text{ para todo } \mathbf{n} \in \mathbb{N}.$$

$$\theta[d(x_n, x_{n+1})] \leq \phi[\theta(d(x_{n-1}, x_n))], \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \dots (4.10)$$

Ahora se tratará de manera análoga al principio de contracción de Banach.

Se define la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} d_1 &= d(x_0, x_1) \\ d_2 &= d(x_1, x_2) \\ d_3 &= d(x_2, x_3) \\ &\vdots \\ d_n &= d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Como se está en el caso (2) $d_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq]0, +\infty[\dots (4.11)$

Así reemplazando la sucesión $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en (10),

$$\theta[d_{n+1}] \leq \phi[\theta(d_n)], \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \dots (4.12)$$

Ya que (10) se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular $n=1$.

$$\theta[d_2] \leq \phi[\theta(d_1)] \dots (4.13.1)$$

De manera análoga para $n=2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n$

$$\theta[d_3] \leq \phi[\theta(d_2)] \dots (4.13.2)$$

$$\theta[d_4] \leq \phi[\theta(d_3)] \dots (4.13.3)$$

$\vdots$

$$\theta[d_{n-1}] \leq \phi[\theta(d_{n-2})] \dots (4.13.n-2)$$

$$\theta[d_n] \leq \phi[\theta(d_{n-1})] \dots (4.13.n-1)$$

$$\theta[d_{n+1}] \leq \phi[\theta(d_n)] \dots (4.13.n-0)$$

Como ϕ es no decreciente entonces

$$\text{De (4.13.n-0) } \theta[d_{n+1}] \leq \phi[\theta(d_n)]$$

$$\text{Evaluando } \phi \text{ en (4.13.n-1) } \phi(\theta[d_n]) \leq \phi^2[\theta(d_{n-1})]$$

$$\text{Evaluando } \phi^2 \text{ en (4.13.n-2) } \phi^2(\theta[d_{n-1}]) \leq \phi^3[\theta(d_{n-2})]$$

$\vdots$

$$\text{Tener en cuenta } 3 = n - (n - 3)$$

Evalutando Φ^{n-3} en (4.13.3) $\Phi^{n-3}(\theta[d_4]) \leq \Phi^{n-2}[\theta(d_3)]$

Evalutando Φ^{n-2} en (4.13.2) $\Phi^{n-2}(\theta[d_3]) \leq \Phi^{n-1}[\theta(d_2)]$

Evalutando Φ^{n-1} en (4.13.1) $\Phi^{n-1}(\theta[d_2]) \leq \Phi^n[\theta(d_1)]$

Por transitividad se tiene que,

$$\theta[d_{n+1}] \leq \Phi[\theta(d_n)] \leq \Phi^2[\theta(d_{n-1})] \leq \Phi^3[\theta(d_{n-2})] \leq \dots \leq \Phi^{n-3}(\theta[d_4]) \leq \Phi^{n-2}[\theta(d_3)] \leq \Phi^{n-1}[\theta(d_2)] \leq \Phi^n[\theta(d_1)] \dots (4.14)$$

se tiene de la parte izquierda de (4.14) $\theta[d_{n+1}] \leq \Phi[\theta(d_n)] \dots (4.15)$

como $\theta:]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$ y $d_n > 0$ entonces $\theta[d_n] > 1$

por lema (2.37) $\Phi(t) < t$, para todo $t > 1$.

entonces $\theta[d_{n+1}] \leq \Phi[\theta(d_n)] < \theta(d_n)$ y por transitividad $\theta[d_{n+1}] < \theta(d_n)$

ya que θ es no decreciente entonces $d_{n+1} < d_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \dots (4.16)$

Luego se tiene una sucesión $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente de números reales positivos

$$d_{n+1} < d_n \text{ cuando } n < n+1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \dots (4.17)$$

NOTA. - Toda sucesión acotada inferiormente y monótona es convergente.

como $d_n \in]0, +\infty[$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n \in \overline{]0, +\infty[} = [0, +\infty[$. Así $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n < d_n$

Afirmación 3: $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$

Supongamos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n > 0$,

ya que $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1} < d_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N} \dots (4.18)$

como θ es no decreciente entonces $\theta\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1}\right) < \theta(d_{n+1})$

por definición de θ y (14).

$$1 < \theta\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1}\right) < \theta(d_{n+1}) < \Phi(\theta(d_n)) \leq \dots \leq \Phi^n[\theta(d_1)]$$

Sí $n \rightarrow \infty$ y por (Φ_2) pues $\theta(d_1) > 1$, entonces $1 < \theta\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1}\right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi^n[\theta(d_1)] = 1$

Lo que es una contradicción $1 < \theta\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{n+1}\right) < 1 \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$

Así $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{d}_n = \mathbf{0}$ y se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{d}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \dots (4.19)$

Luego, se ha logrado ver que el límite de las métricas de los términos consecutivos de la sucesión construida por recursividad es cero.

A continuación, se demuestra que $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión b-Cauchy, es decir,

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) = \mathbf{0}.$$

Supongamos que $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es una sucesión b-Cauchy.

por Lema 2.36, ya que se cumple (4.19) entonces, existen $\varepsilon > \mathbf{0}$ y dos sucesiones $(\mathbf{m}(\mathbf{k}))_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}}$

y $(\mathbf{n}(\mathbf{k}))_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}}$ de enteros positivos tales que:

$$\varepsilon \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \inf \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) \leq \mathbf{b}\varepsilon \dots (4.19.1)$$

$$\frac{\varepsilon}{\mathbf{b}} \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \inf \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1}) \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1}) \leq \mathbf{b}^2\varepsilon \dots (4.19.2)$$

$$\frac{\varepsilon}{\mathbf{b}} \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \inf \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) \leq \mathbf{b}^2\varepsilon \dots (4.19.3)$$

$$\frac{\varepsilon}{\mathbf{b}^2} \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \inf \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1}) \leq \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \sup \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1}) \leq \mathbf{b}^3\varepsilon \dots (4.19.4)$$

De la definición de $\theta - \phi - \text{contracción}$ (4.1) y tomando $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}$ e $\mathbf{y}=\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}$ se tiene,

$$\theta[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{T}\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})})] = \theta[\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1})] \leq \phi[\theta(\mathbf{M}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}))] \dots (4.20)$$

Donde:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) = \max\{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{T}\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}), \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}, \mathbf{T}\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}), \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}), \frac{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{T}\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}, \mathbf{T}\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})})}{2\mathbf{b}^2}\}$$

Por recursividad se tiene que,

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) = \max\{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1}), \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1}), \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}), \frac{\mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1}) + \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1})}{2\mathbf{b}^2}\}$$

Si $\mathbf{k} \rightarrow \infty$ entonces

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \mathbf{M}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}) = \max\{\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{m}(\mathbf{k})+1}), \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \mathbf{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})}, \mathbf{x}_{\mathbf{n}(\mathbf{k})+1}),$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1})}{2b^2} \}$$

Por (4.19) se tiene que $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) = 0$ y $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) = 0$

De (4.19.1) y completitud de $\mathbb{R}$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b\varepsilon$

De (4.19.2) y (4.19.3) y completitud de $\mathbb{R}$, se tiene que,

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1})}{2b^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \frac{d(x_{m(k)}, x_{n(k)+1})}{2b^2} + \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \frac{d(x_{n(k)}, x_{m(k)+1})}{2b^2} \leq \frac{b^2\varepsilon + b^2\varepsilon}{2b^2} \\ &\leq \frac{b^2\varepsilon + b^2\varepsilon}{2b^2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Como $b \geq 1$ entonces $\varepsilon b \geq \varepsilon$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq b\varepsilon \dots (4.21)$$

Tomando límite cuando $k \rightarrow \infty$ en (4.20) y por la continuidad de θ y ϕ se tiene,

$$\theta \left[b^3 \lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \right] \leq \phi \left[\theta \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \right) \right] \dots (4.22)$$

$$\text{Por (18.4)} \quad \frac{\varepsilon}{b^2} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \dots (4.23)$$

Como $b \geq 1$ entonces $b^3 \geq 1$. Así se multiplica por b^3 a (4.23) preservando la desigualdad.

$$b^3 \frac{\varepsilon}{b^2} \leq b^3 \lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1})$$

$$b\varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} b^3 d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1})$$

ya que θ es no decreciente entonces

$$\theta(b\varepsilon) \leq \theta \left[\lim_{k \rightarrow +\infty} b^3 d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \right] \dots (4.24)$$

Por transitividad de (4.22) y (4.24).

$$\theta(b\varepsilon) \leq \phi \left[\theta \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \right) \right] \dots (4.25)$$

Como θ y ϕ son no decrecientes en (4.21),

$$\Phi \left[\theta \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \right) \right] \leq \Phi[\theta(b\varepsilon)] \dots (4.26)$$

Entonces por transitividad de (4.25) y (4.26) se tiene, $\theta(b\varepsilon) \leq \Phi[\theta(b\varepsilon)] \dots (4.27)$

Se sabe que $\theta(b\varepsilon) > 1$ por contradominio de θ y por lema 2.37 $\Phi(t) < t, \forall t > 1$

$$\Phi[\theta(b\varepsilon)] < \theta(b\varepsilon) \dots (4.28)$$

Por transitividad de (4.27) y (4.28)

$$\theta(b\varepsilon) \leq \Phi[\theta(b\varepsilon)] < \theta(b\varepsilon) \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Así $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de b-Cauchy en X.

Se ha logrado probar que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de b-Cauchy.

Por hipótesis se está trabajando en un espacio b-métrico completo entonces,

Existe algún $z \in X$ tal que $x_n \rightarrow z$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) = 0$

Para la existencia se debe probar $d(T(z), z) = 0$

Afirmación 3: $d(T(z), z) = 0$

Por contradicción supongamos que $d(T(z), z) > 0$, es decir, $T(z) \neq z$

Se utiliza el lema 2.35, considerando:

- $\overline{x_n} = T(x_n)$
- $\overline{y_n} = T(z)$ (sucesión constante)
- $x = z$ (límite de $\overline{x_n}$)
- $y = T(z)$ (límite de $\overline{y_n}$)

Entonces, como $T(x_n) \rightarrow z$ y $Tz \rightarrow Tz$, por el lema 2.36:

$$\frac{1}{b^2} d(z, Tz) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(x_n), T(z)) \leq b^2 d(z, Tz) \dots (4.29)$$

Aplicando la condición de la contracción.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, consideramos dos casos:

Caso 2.1: Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(Tx_{n_0}, Tz) = 0$, Entonces:

$$Tx_{n_0} = T(z) \text{ entonces recursividad, } Tx_{n_0} = x_{n_0+1} = T(z)$$

Aplicando T a ambos lados de $\mathbf{x}_{n_0+1} = T(\mathbf{z})$:

$$\mathbf{x}_{n_0+2} = T(\mathbf{x}_{n_0+1}) = T(T\mathbf{z})$$

También se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{n_0+2} = T(\mathbf{x}_{n_0+1}) = T^2(\mathbf{z})$$

Aplicando T a ambos lados

$$\mathbf{x}_{n_0+3} = T(\mathbf{x}_{n_0+2}) = T^3(\mathbf{z})$$

De manera análoga (m veces):

$$\mathbf{x}_{n_0+m} = T(\mathbf{x}_{n_0+m-1}) = T^m(\mathbf{z})$$

Se sabe que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{z}$. En particular para un m suficientemente grande:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{n_0+m} = \mathbf{z}$$

Para cualquier $m \geq 1$, se tiene por la desigualdad b-triangular

$$d(T\mathbf{z}, \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}_{n_0+1}, \mathbf{z}) \leq b\{d(\mathbf{x}_{n_0+1}, \mathbf{x}_{n_0+1+m}) + d(\mathbf{x}_{n_0+1+m}, \mathbf{z})\}$$

Tomando límite cuando $m \rightarrow \infty$

$$d(T\mathbf{z}, \mathbf{z}) \leq b\{\lim_{m \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_{n_0+1}, \mathbf{x}_{n_0+1+m}) + \lim_{m \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_{n_0+1+m}, \mathbf{z})\}$$

Como $\{\mathbf{x}_n\}$ es de b-Cauchy entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_{n_0+1}, \mathbf{x}_{n_0+1+m}) = 0$ y $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{z}$ entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}_{n_0+1+m}, \mathbf{z}) = 0. \text{ Así se tiene que } d(T\mathbf{z}, \mathbf{z}) \leq b\{0 + 0\} = 0.$$

Como toda métrica es no negativa se tiene que $d(T\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0$ ($\Rightarrow \Leftarrow$)

Lo cual es una contradicción de suponer que $d(T\mathbf{z}, \mathbf{z}) > 0$. Existe el punto fijo.

Caso 2.2: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $d(T\mathbf{x}_n, T\mathbf{z}) > 0$

En este caso se aplica la definición de T que es $\theta - \phi$ - contracción.

Ahora sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ e $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ en la definición de T que es $\theta - \phi$ - contracción ,

Así $d(T(\mathbf{x}_n), T(\mathbf{z})) > 0$ entonces:

$$\Rightarrow \theta[b^3 d(T\mathbf{x}_n, T\mathbf{z})] \leq \phi[\theta(M(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}))], \forall n \in \mathbb{N} \dots (4.30)$$

$$\text{Donde } M(x_n, z) = \max\{d(x_n, z), d(x_n, Tx_n), d(z, Tz), \frac{d(x_n, Tz) + d(Tx_n, z)}{2b^2}\}$$

Tomando límite superior de $M(x_n, z)$

Se sabe que:

Primer término: $d(x_n, z) \rightarrow 0$

Segundo término: $d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ (límite de términos consecutivos es 0)

Tercer término: $d(z, Tz)$ es constante.

Cuarto término: como $d(z, x_{n+1}) \rightarrow 0$

$$\frac{d(z, Tx_n) + d(x_n, Tz)}{2b^2} = \frac{d(z, x_{n+1}) + d(x_n, Tz)}{2b^2} \rightarrow \frac{0 + d(x_n, Tz)}{2b^2} = \frac{d(x_n, Tz)}{2b^2}$$

Como el primer término y segundo tienden a cero, se analiza el tercer y cuarto término.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M(x_n, z) = \max\{d(z, Tz), \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, Tz)}{2b^2}\}$$

usando la b-desigualdad triangular: $d(x_n, Tz) \leq b\{d(x_n, z) + d(z, Tz)\}$

$$\frac{d(x_n, Tz)}{2b^2} \leq \frac{b}{2b^2} \{d(x_n, z) + d(z, Tz)\} = \frac{1}{2b} \{d(x_n, z) + d(z, Tz)\}$$

$$\text{se sabe que } x_n \rightarrow z, \text{ entonces: } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, Tz)}{2b^2} \leq 0 + \frac{d(z, Tz)}{2b} = \frac{d(z, Tz)}{2b}$$

$$\text{como } b \geq 1, \text{ se tiene que: } \frac{d(z, Tz)}{2b} \leq d(z, Tz) \text{ entonces: } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x_n, Tz)}{2b^2} \leq d(z, Tz)$$

$$\text{Por lo que } \limsup_{n \rightarrow \infty} M(x_n, z) = d(z, Tz) \dots (4.31)$$

Se toma límite superior cuando $n \rightarrow \infty$ en (4.30) la definición de $\theta - \phi$ – **contracción**.

Además, por la continuidad de θ y ϕ

$$\theta \left[b^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, Tz) \right] \leq \phi[\theta(d(z, Tz))], \forall n \in \mathbf{N} \dots (4.32)$$

Usando la cota inferior del lema 2.35

$$\frac{1}{b^2} d(z, Tz) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(x_n), T(z))$$

Se multiplica por $b^3 \geq 1$

$$\frac{b^3}{b^2} d(z, Tz) \leq b^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} d(T(x_n), T(z)) \dots (4.33)$$

De (4.33) y como $b \geq 1$

$$\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}) \leq \mathbf{b} \mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}) \leq \mathbf{b}^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_n), \mathbf{T}(\mathbf{z}))$$

θ es no decreciente y continua, se tiene que:

$$\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})) \leq \theta(\mathbf{b}^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_n), \mathbf{T}(\mathbf{z}))) \dots (4.34)$$

Por transitividad de (4.34) y (4.32), como $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}) = \mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})$

$$\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})) \leq \theta(\mathbf{b}^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_n), \mathbf{T}(\mathbf{z}))) \leq \phi \left[\theta \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\mathbf{x}_n, \mathbf{z}) \right) \right]$$

$$\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})) \leq \theta(\mathbf{b}^3 \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{d}(\mathbf{T}(\mathbf{x}_n), \mathbf{T}(\mathbf{z}))) \leq \phi[\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}))] \dots (4.35)$$

$$\text{Así } \theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})) \leq \phi[\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}))] \dots (4.36)$$

Estamos en la suposición que $\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}) > \mathbf{0}$

Por definición de θ : $\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}))$

Por lema 2.37: $\phi[\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}))] < \theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})) \dots (4.37)$

De (4.36) y (4.37) por transitividad:

$$\text{Así } \theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})) \leq \phi[\theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}))] < \theta(\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz})) (\Rightarrow \Leftarrow)$$

La contradicción proviene de suponer que $\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}) > \mathbf{0}$. Por lo tanto:

$$\mathbf{d}(\mathbf{z}, \mathbf{Tz}) = \mathbf{0}$$

Es decir, $\mathbf{z} = \mathbf{Tz}$. Existe el punto fijo.

Demostración de la unicidad:

Supongamos que existen dos puntos fijos distintos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}$ tales que:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{v}$$

Entonces $\mathbf{d}(\mathbf{Tu}, \mathbf{Tv}) = \mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > \mathbf{0}$

Se aplica la condición de que $\mathbf{T}$ es $\theta - \phi - \text{contracción}$.

Como $\mathbf{d}(\mathbf{Tu}, \mathbf{Tv}) > \mathbf{0}$ podemos aplicar la definición con $\mathbf{x} = \mathbf{u}, \mathbf{y} = \mathbf{v}$:

$$\theta(\mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{Tu}, \mathbf{Tv})) \leq \phi(\theta(\mathbf{M}(\mathbf{u}, \mathbf{v})))$$

Reemplazando $Tu = u$ y $Tv = v$ se tiene que

$$\theta(b^3 d(u, v)) \leq \phi(\theta(M(u, v))) \dots (4.38)$$

Se calcula el máximo $M(u, v) = \max_{x, y \in X} \{d(u, v), d(u, Tu), d(v, Tv), \frac{d(u, Tv) + d(Tu, v)}{2b^2}\}$

Primer término: $d(u, v)$

Segundo término: $d(u, Tu) = d(u, u) = 0$

Tercer término: $d(v, Tv) = d(v, v) = 0$

Cuarto término: $\frac{d(u, Tv) + d(Tu, v)}{2b^2} = \frac{d(u, v) + d(u, v)}{2b^2} = \frac{d(u, v)}{b^2}$

Así se tiene que:

$$M(u, v) = \max_{x, y \in X} \{d(u, v), 0, 0, \frac{d(u, v)}{b^2}\}$$

Como $b \geq 1$, entonces $b^2 \geq 1$. Además, como $d(u, v) > 0$, se tiene que

$$0 < \frac{d(u, v)}{b^2} \leq d(u, v)$$

Por lo tanto: $M(u, v) = d(u, v)$

Sustituyendo en la desigualdad (4.38)

$$\theta(b^3 d(u, v)) \leq \phi(\theta(d(u, v))) \dots (4.39)$$

Como $b \geq 1$, entonces $b^3 \geq 1$. Además, como $d(u, v) \geq 0$, se tiene que

$$d(u, v) \leq b^3 d(u, v)$$

Por la propiedad Θ_1 , que indica que θ es no decreciente

$$\theta(d(u, v)) \leq \theta(b^3 d(u, v)) \dots (4.40)$$

Por transitividad de (4.39 y (4.40) se tiene

$$\theta(d(u, v)) \leq \theta(b^3 d(u, v)) \leq \phi(\theta(d(u, v)))$$

Es decir:

$$\theta(d(u, v)) \leq \phi(\theta(d(u, v))) \dots (4.41)$$

Por lema 2.37 de la familia de Φ :

$$\phi(t) < t \text{ para todo } t > 1$$

Como $u \neq v$, se tiene que $d(u, v) > 0$. Por definición de $\theta:]0, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$,

$$\theta(t) > 1 \text{ para todo } t = d(u, v) > 0. \text{ Por lo tanto}$$

$$\theta(d(u, v)) > 1$$

Aplicando el lema 2.37 de la familia de Φ :

$$\phi(\theta(d(u, v))) < \theta(d(u, v)) \dots (4.42)$$

Por transitividad de (4.41) y (4.42):

$$\theta(d(u, v)) \leq \phi(\theta(d(u, v))) < \theta(d(u, v))$$

Esto implica:

$$\theta(d(u, v)) < \theta(d(u, v)) (\Rightarrow \Leftarrow)$$

Lo cual es una contradicción de suponer que existen dos puntos fijos distintos $u \neq v$. No pueden existir 2 puntos fijos diferentes. El punto fijo es único.

4.2 Aplicaciones: Uso del teorema del punto fijo para $\theta - \phi$ – contracciones en espacios b-métricos a una ecuación integral de volterra lineal

4.2.1 Problema del valor inicial lineal

Considere el siguiente Problema de valor inicial.

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{4}x(t), & t \in [0, 1] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

4.2.2 Ecuación integral lineal de Volterra equivalente:

Integrando a ambos lados de 0 a t y considerando el valor inicial, se obtiene la ecuación integral de Volterra equivalente:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t x(s) \, ds, \quad t \in [0, 1]$$

Resolver el problema de valor inicial es equivalente a encontrar una solución de la ecuación integral.

4.2.3 Espacio b-métrico completo:

Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio de todas las funciones continuas en el marco teórico se prueba como ejemplo que es un espacio b-métrico con coeficiente $b=2$ y métrica $d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|^2$. Por teorema 2.41 el espacio es completo.

4.2.4 Operador T:

Se introduce el operador $T: X \rightarrow X$ por:

$$T(x(t)) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t x(s) \, ds, \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

Los puntos fijos de T son soluciones de la ecuación integral lineal y, por tanto, del problema de valor inicial.

4.2.5 Funciones Φ y Θ :

Sean las funciones $\Theta(t) = e^t$ para todo $t \in]0, +\infty[$ y $\Phi(t) = t^{1/2}$ para todo $t \in [1, +\infty[$.

Afirmación: $\Phi \in \Phi$ y $\Theta \in \Theta$

En efecto: Φ cumple las 3 propiedades (Φ_1) , (Φ_2) y (Φ_3) .

$$\Phi: [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

(Φ_1) Φ es no decreciente.

Por el criterio de la primera derivada se tiene que:

$\Phi'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} > 0$ para todo $t \in [1, +\infty[$. Por lo tanto Φ es no decreciente.

(Φ_2) Para todo $t \in [1, +\infty[$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(t) = 1$

$$\Phi^1(t) = t^{1/2}$$

$$\Phi^2(t) = \Phi(\Phi(t)) = \Phi\left(t^{1/2}\right) = \left(t^{1/2}\right)^{1/2} = t^{(1/2)^2}$$

$$\begin{aligned}\phi^3(t) &= \phi(\phi^2(t)) = \phi\left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

y en general.

$$\phi^n(t) = \phi(\phi^{n-1}(t)) = \phi\left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right) = \left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Por la continuidad de la función exponencial.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = t^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Notemos que la sucesión $\{(\frac{1}{2})^n\}$ es decreciente. Además, la sucesión esta acotada

inferiormemente por 0. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = t^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n} = t^0 = 1$$

(Φ_3) ϕ es continua en $[1, +\infty[$

$\phi(t) = t^{\frac{1}{2}}$ es continua en $[1, +\infty[$ pues $\lim_{t \rightarrow a} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow a} t^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

$$\theta(t) = e^t$$

$$\theta: [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

(Θ_1) $\theta(t) = e^t$ es no decreciente.

Por el criterio de la primera derivada se tiene que:

$\theta'(t) = e^t > 0$ para todo $t \in [1, +\infty[$.

(Θ_2) Para toda sucesión $(x_n) \subset]0, +\infty[$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ si y solo si } \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) = 1$$

$(\Rightarrow)$ Sí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = e^0 = 1$

($\Leftarrow$) Sí $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = 1$, ya que la función exponencial es continua $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = e^0$

Por cálculo I, la función exponencial es inyectiva $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

(Θ_3) $\theta(t) = e^t$ es continua en $]0, +\infty[$ por ser función exponencial.

4.2.6 T es $\theta - \phi$ contracción:

En efecto: Para todo $x, y \in C[0, 1]$ con $T(x(t)) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t x(s) ds$, para todo $t \in [0, 1]$.

Como la función identidad es integrable (x, y son continuas), usaremos la desigualdad del valor absoluto de una integral.

$$|Tx(t) - Ty(t)| = \left| \frac{1}{4} \int_0^t x(s) - y(s) ds \right| \leq \frac{1}{4} \int_0^t |x(s) - y(s)| ds$$

Se sabe que $|x(s) - y(s)| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)|$

$$\frac{1}{4} \int_0^t |x(s) - y(s)| ds \leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)| \int_0^t ds = \frac{1}{4} t \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)|$$

Se tiene entonces:

$$|Tx(t) - Ty(t)| \leq \frac{1}{4} t \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)|$$

Elevamos al cuadrado,

$$|Tx(t) - Ty(t)|^2 \leq \frac{1}{16} t^2 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)| \right)^2$$

Tomando supremo en $0 \leq t \leq 1$, además se sabe que el supremo es creciente, entonces:

$$d(Tx, Ty) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |Tx(t) - Ty(t)|^2 \leq \frac{1}{16} 1^2 \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |x(s) - y(s)| \right)^2$$

Por análisis real se sabe que $\sup(AB) = \sup(A) \sup(B)$ para todo $A, B \subseteq [0, +\infty[$. Así:

$$\frac{1}{16} 1^2 \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |x(s) - y(s)| \right)^2 = \frac{1}{16} \sup_{0 \leq s \leq 1} |x(s) - y(s)|^2 = \frac{1}{16} d(x, y)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{16} d(x, y)$$

como la constante b-métrica $b=2$, $\theta(t) = e^t$ para todo $t \in]0, +\infty[$ y $\phi(t) = t^{1/2}$ para todo $t \in [1, +\infty[$.

$$8 d(Tx, Ty) = b^3 d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$$

Como la función exponencial es no decreciente:

$$e^{b^3 d(Tx, Ty)} \leq e^{\frac{1}{2} d(x, y)} = (e^{d(x, y)})^{\frac{1}{2}}$$

Del máximo y como $\theta(t) = e^t$, $\phi(t) = t^{1/2}$ son no decrecientes:

$$M(x, y) = \max_{x, y \in X} \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}\}$$

$$d(x, y) \leq M(x, y) \text{ entonces } \theta(b^3 d(Tx, Ty)) \leq \phi[\theta(d(x, y))] \leq \phi[\theta(M(x, y))]$$

Por lo tanto, se ha demostrado que T es $\theta - \phi$ contracción.

4.2.7 Aplicación del teorema

Dado que se cumplen todas las condiciones del Teorema del punto fijo en espacios b-métricos completos, concluimos que T posee un único punto fijo $x^* \in C[0, 1]$. En consecuencia, la ecuación integral lineal de Volterra:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t x(s) ds, t \in [0, 1]$$

Posee una única solución continua en $[0, 1]$, y por tanto el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{1}{4} x(t), & t \in [0, 1] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Tiene una única solución.

4.2.8 Solución exacta:

Si bien la solución exacta puede expresarse mediante una fórmula exacta:

$$x(t) = e^{t/4}, t \in [0, 1]$$

El interés del ejemplo se centra en ilustrar la aplicabilidad del teorema, sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación.

4.3 Uso del teorema del punto fijo para $\theta - \phi$ – contracciones en espacios b-métricos a una ecuación integral de Volterra no lineal

4.3.1 Problema del valor inicial no lineal

Considere el siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(\mathbf{t}) = \frac{1}{4} \mathbf{sen}(\mathbf{x}(\mathbf{t})), & \mathbf{t} \in [0, 1] \\ \mathbf{x}(0) = 1 \end{cases}$$

4.3.2 Ecuación integral no lineal de Volterra equivalente:

Integrando a ambos lados de 0 a t y considerando el valor inicial, se obtiene la ecuación integral de volterra equivalente:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t \mathbf{sen}(\mathbf{x}(\mathbf{s})) \, d\mathbf{s}, \mathbf{t} \in [0, 1]$$

4.3.3 Espacio b-métrico completo:

Consideremos $X = C([0, 1], \mathbb{R})$, conjunto de todas funciones continuas en el marco teórico se prueba como ejemplo que es un espacio b-métrico con coeficiente $b=2$ y métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{y}(\mathbf{t})|^2$. Por teorema 2.41 el espacio es completo.

4.3.4 Operador T:

Se define el operador $T: X \rightarrow X$ por:

$$T(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t \mathbf{sen}(\mathbf{x}(\mathbf{s})) \, d\mathbf{s}, \text{ para todo } \mathbf{t} \in [0, 1]$$

Los puntos fijos de T son soluciones de la ecuación integral no lineal y, por tanto, del problema de valor inicial.

4.3.5 Funciones ϕ y θ :

Sean las funciones $\theta(\mathbf{t}) = e^t$ para todo $\mathbf{t} \in]0, +\infty[$ y $\phi(\mathbf{t}) = t^{1/2}$ para todo $\mathbf{t} \in [1, +\infty[$.

Afirmación: $\phi \in \Phi$ y $\theta \in \Theta$

En efecto: ϕ cumple las 3 propiedades (Φ_1) , (Φ_2) y (Φ_3) .

$$\phi: [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

(Φ_1) ϕ es no decreciente.

Por el criterio de la primera derivada se tiene que:

$$\phi'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{ para todo } t \in [1, +\infty[.$$

(Φ_2) Para todo $t \in]1, +\infty[$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 1$

$$\phi^1(t) = t^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi^2(t) = \phi(\phi(t)) = \phi\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\phi^3(t) = \phi(\phi^2(t)) = \phi\left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

.

.

.

$$\phi^n(t) = \phi(\phi^{n-1}(t)) = \phi\left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right) = \left(t^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Por la continuidad de la función exponencial.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = t^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Notemos que la sucesión $\{(1/2)^n\}$ es decreciente.

Además, la sucesión esta acotada inferiormente por 0. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = t^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n} = t^0 = 1$$

(Φ_3) ϕ es continua en $[1, +\infty[$

$$\phi(t) = t^{\frac{1}{2}} \text{ es continua en } [1, +\infty[\text{ pues } \lim_{t \rightarrow a} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow a} t^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$$\theta(t) = e^t$$

$$\theta: [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

(Θ_1) $\theta(t) = e^t$ es no decreciente.

Por el criterio de la primera derivada se tiene que:

$\theta'(t) = e^t > 0$ para todo $t \in [1, +\infty[$.

(Θ_2) Para toda sucesión $(x_n) \subset]0, +\infty[$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ si y solo si } \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) = 1$$

($\Rightarrow$) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = e^0 = 1$

($\Leftarrow$) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = 1$, ya que la función exponencial es continua $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = e^0$

Por cálculo I, la función exponencial es inyectiva $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

(Θ_3) $\theta(t) = e^t$ es continua en $]0, +\infty[$ por ser función exponencial.

4.3.6 T es $\theta - \phi$ contracción:

En efecto:

Para todo $x, y \in C[0, 1]$ con $T(x(t)) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t \text{sen}(x(s)) ds$, para todo $t \in [0, 1]$:

Como la función seno es integrable (x, y son continuas), usaremos la desigualdad del valor absoluto de una integral,

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Ty(t)| &= \left| \frac{1}{4} \int_0^t \text{sen}(x(s)) - \text{sen}(y(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^t |\text{sen}(x(s)) - \text{sen}(y(s))| ds \end{aligned}$$

En desigualdad se sabe que la función seno es Lipchitz con constante 1.

$$\leq \frac{1}{4} \int_0^t |\text{sen}(x(s)) - \text{sen}(y(s))| ds \leq \frac{1}{4} \int_0^t |x(s) - y(s)| ds$$

Se sabe que $|x(s) - y(s)| \leq \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)|$

$$\frac{1}{4} \int_0^t |x(s) - y(s)| ds \leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)| \int_0^t ds = \frac{1}{4} t \sup_{0 \leq s \leq t} |x(s) - y(s)|$$

Se tiene entonces:

$$|\mathbf{T} \mathbf{x}(t) - \mathbf{T} \mathbf{y}(t)| \leq \frac{1}{4} t \sup_{0 \leq s \leq t} |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)|$$

Elevamos al cuadrado,

$$|\mathbf{T} \mathbf{x}(t) - \mathbf{T} \mathbf{y}(t)|^2 \leq \frac{1}{16} t^2 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| \right)^2$$

Tomando supremo en $0 \leq t \leq 1$, además se sabe que el supremo es creciente, entonces:

$$\mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbf{T} \mathbf{x}(t) - \mathbf{T} \mathbf{y}(t)|^2 \leq \frac{1}{16} 1^2 \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| \right)^2$$

Por análisis real se sabe que $\sup(\mathbf{AB}) = \sup(\mathbf{A}) \sup(\mathbf{B})$ para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq [0, +\infty[$. Así:

$$\frac{1}{16} 1^2 \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| \right)^2 = \frac{1}{16} \sup_{0 \leq s \leq 1} |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)|^2 = \frac{1}{16} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) \leq \frac{1}{16} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

como la constante b-métrica $b=2$, $\theta(t) = e^t$ para todo $t \in]0, +\infty[$ y $\phi(t) = t^{1/2}$ para todo $t \in [1, +\infty[$.

$$8 \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) = b^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) \leq \frac{1}{2} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

Como la función exponencial es no decreciente:

$$e^{b^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y})} \leq e^{\frac{1}{2} \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = (e^{\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})})^{\frac{1}{2}}$$

Del máximo y como $\theta(t) = e^t$, $\phi(t) = t^{1/2}$ son no decrecientes:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}} \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{x}), \mathbf{d}(\mathbf{y}, \mathbf{T}\mathbf{y}), \frac{\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) + \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2b^2} \}$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ entonces } \theta(b^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y})) \leq \phi[\theta(\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))] \leq \phi[\theta(\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))]$$

Por lo tanto, se ha demostrado que $\mathbf{T}$ es $\theta - \phi$ contracción.

4.2.7 Aplicación del teorema

Dado que se cumplen todas las condiciones del Teorema del punto fijo en espacios b-métricos completos, concluimos que T posee un único punto fijo $\mathbf{x}^* \in \mathbf{C}[0, 1]$. En consecuencia, la ecuación integral de Volterra no lineal:

$$\mathbf{x}(t) = 1 + \frac{1}{4} \int_0^t \text{sen}(\mathbf{x}(s)) \, ds, \, t \in [0, 1]$$

Posee una única solución continua en $[0, 1]$, y por tanto el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \frac{1}{4} \text{sen}(\mathbf{x}(t)), & t \in [0, 1] \\ \mathbf{x}(0) = 1 \end{cases}$$

Tiene una única solución.

4.3.8 Solución exacta:

Si bien la solución exacta puede expresarse mediante una fórmula exacta:

$$\mathbf{x}(t) = 2 \arctan\left(\tan\left(\frac{1}{2}\right)e^{t/4}\right)$$

El interés del ejemplo se centra en ilustrar la aplicabilidad del teorema, sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación.

4.4. Corolarios (Generalizaciones)

4.4.1 Corolario [Principio del punto fijo para aplicaciones de tipo Kannan en espacios b-métricos completos]

Consideremos $(\mathbf{X}, \mathbf{d}, \mathbf{b})$ como espacio b-métrico completo con coeficiente $\mathbf{b} \geq 1$ y $\mathbf{T}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ una aplicación de tipo Kannan, es decir, existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ dado cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, se tiene que:

$$\mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) > 0 \implies \mathbf{b}^3 \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{T}\mathbf{y}) \leq \alpha \{\mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathbf{d}(\mathbf{T}\mathbf{y}, \mathbf{y})\}$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba. -

Sea $\theta(t) = e^t$ para todo $t \in]0, +\infty[$ y $\phi(t) = t^{2\alpha}$ para todo $t \in [1, +\infty[$.

Afirmación 1: $\phi \in \Phi$ y $\theta \in \Theta$

En efecto: ϕ cumple las 3 propiedades (Φ_1) , (Φ_2) y (Φ_3) .

$$\phi: [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

(Φ_1) ϕ es no decreciente.

Por el criterio de la primera derivada se tiene que:

$$\phi'(t) = 2\alpha t^{2\alpha-1} > 0 \text{ para todo } t \in [1, +\infty[\text{ y algún } \alpha \in]0, \frac{1}{2}[.$$

(Φ_2) Para todo $t \in]1, +\infty[$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 1$

$$\phi^1(t) = t^{2\alpha}$$

$$\phi^2(t) = \phi(\phi(t)) = \phi(t^{2\alpha}) = (t^{2\alpha})^{2\alpha} = t^{(2\alpha)^2}$$

$$\phi^3(t) = \phi(\phi^2(t)) = \phi(t^{(2\alpha)^2}) = (t^{(2\alpha)^2})^{2\alpha} = t^{(2\alpha)^3}$$

generalizando,

$$\phi^n(t) = \phi(\phi^{n-1}(t)) = \phi(t^{(2\alpha)^{n-1}}) = (t^{(2\alpha)^{n-1}})^{2\alpha} = t^{(2\alpha)^n}$$

Por la continuidad de la función exponencial.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t^{(2\alpha)^n} = t^{\lim_{n \rightarrow \infty} (2\alpha)^n}$$

Notemos que la sucesión $\{(2\alpha)^n\}$ es decreciente ya que

$$0 < 2\alpha < 1$$

$$0 < (2\alpha)^2 < 2\alpha < 1$$

$$0 < (2\alpha)^3 < (2\alpha)^2 < 2\alpha < 1$$

.

.

.

$$0 < (2\alpha)^n < (2\alpha)^{n-1} < \dots < 1$$

Además, la sucesión está acotada inferiormente por 0. Así $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\alpha)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = t^{\lim_{n \rightarrow \infty} (2\alpha)^n} = t^0 = 1$$

(Φ_3) ϕ es continua en $[1, +\infty[$

$\phi(t) = t^{2\alpha}$ es continua en $[1, +\infty[$ pues $\lim_{t \rightarrow a} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow a} t^{2\alpha} = a^{2\alpha}$.

$$\theta(t) = e^t$$

$$\theta: [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$$

(Θ_1) $\theta(t) = e^t$ es no decreciente.

Por el criterio de la primera derivada se tiene que:

$\theta'(t) = e^t > 0$ para todo $t \in [1, +\infty[$.

(Θ_2) Para toda sucesión $(x_n) \subset]0, +\infty[$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ si y solo si } \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(x_n) = 1$$

($\Rightarrow$) Sí $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = e^0 = 1$

($\Leftarrow$) Sí $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} = 1$, ya que la función exponencial es continua $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = e^0$

Por cálculo I, la función exponencial es inyectiva $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

(Θ_3) $\theta(t) = e^t$ es continua en $]0, +\infty[$ por ser función exponencial.

Afirmación 2: **T es una $\theta - \phi$ contracción de tipo Kannan**, es decir, existen $\theta \in$

Θ y $\phi \in \Phi$ tal que para cualquier $x, y \in X$ se tiene que

$$0 < d(Tx, Ty) \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi\left(\theta \left[\frac{d(x, Tx) + d(y, Ty)}{2} \right]\right)$$

En efecto:

$$\theta(b^3 d(Tx, Ty)) = e^{b^3 d(Tx, Ty)}$$

por la monotonía de (Θ_1) y definición de que T es aplicación de tipo Kannan.

$$\theta(b^3 d(Tx, Ty)) = e^{b^3 d(Tx, Ty)} \leq e^{\alpha\{d(Tx, x) + d(Ty, y)\}}$$

utilizando un artificio y leyes de exponentes.

$$\theta(b^3 d(Tx, Ty)) = e^{b^3 d(Tx, Ty)} \leq e^{2\alpha\left\{\frac{d(Tx, x) + d(Ty, y)}{2}\right\}} = (e^{\left\{\frac{d(Tx, x) + d(Ty, y)}{2}\right\}})^{2\alpha}$$

Por definición de $\theta(t) = e^t$ y $\phi(t) = t^{2\alpha}$

$$\theta(b^3 d(Tx, Ty)) = e^{b^3 d(Tx, Ty)} \leq \phi\left(\theta\left(\frac{d(Tx, x) + d(Ty, y)}{2}\right)\right)$$

La afirmación 2 nos muestra que T es una θ - ϕ contracción de tipo Kannan

Afirmación3: Si T es una θ - ϕ contracción de tipo Kannan entonces T es $\theta - \phi -$ contracción.

En efecto: por definición del máximo

$$M(x, y) = \max_{x, y \in X} \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}\}$$

por ser cotas inferiores, $d(x, Tx) \leq M(x, y)$ y $d(y, Ty) \leq M(x, y)$ entonces:

$$\frac{d(Tx, x) + d(Ty, y)}{2} \leq \frac{M(x, y) + M(x, y)}{2} = M(x, y)$$

Se sabe que θ y ϕ son funciones no decrecientes.

$$\theta(b^3 d(Tx, Ty)) = e^{b^3 d(Tx, Ty)} \leq \phi\left(\theta\left(\frac{d(Tx, x) + d(Ty, y)}{2}\right)\right) \leq \phi(\theta(M(x, y)))$$

Se ha demostrado que T es una aplicación θ - ϕ contracción.

Por último, del teorema principal (Punto fijo para espacios b-métricos), se concluye que T posee un único punto fijo $x \in X$.

4.4.2 Corolario [Principio del punto fijo para aplicaciones θ - ϕ contracción de tipo

Reich en espacios b-métricos completos]

Consideremos (X, d, b) como espacio b-métrico completo con coeficiente $b \geq 1$ y sea $T: X \rightarrow X$ una θ - ϕ contracción de tipo Reich, es decir, existen $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ tal que para cualquier $x, y \in X$ se tiene que,

$$d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi\left(\theta\left[\frac{d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Ty)}{3}\right]\right)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba. -

Afirmación: Si T es una θ - ϕ contracción de tipo Reich entonces T es $\theta - \phi$ - contracción.

De manera análoga a la demostración anterior, por definición del máximo.

$$M(x, y) = \max_{x, y \in X} \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}\}$$

Se tiene que, $M(x, y) \geq d(x, Tx)$, $M(x, y) \geq d(y, Ty)$ y $M(x, y) \geq d(x, y)$ entonces:

$$\frac{d(x, y) + d(Tx, x) + d(Ty, y)}{3} \leq \frac{M(x, y) + M(x, y) + M(x, y)}{3} = M(x, y)$$

Se sabe que θ y ϕ son funciones no decrecientes.

$$\theta(b^3 d(Tx, Ty)) \leq \phi\left(\theta\left(\frac{d(x, y) + d(Tx, x) + d(Ty, y)}{3}\right)\right) \leq \phi(\theta(M(x, y)))$$

Se ha demostrado que T es una aplicación θ - ϕ contracción.

Por último, del teorema principal (Punto fijo para espacios b -métricos), se concluye que T posee un único punto fijo $x \in X$.

4.4.3 Corolario [Teorema del punto fijo para aplicaciones de θ - ϕ contracción de tipo Rocha en espacios b -métricos completos]

Sea (X, d, b) un espacio b -métrico completo con coeficiente $b \geq 1$ y sea $T: X \rightarrow X$ una aplicación θ - ϕ contracción de tipo Rocha, es decir, existen $\theta \in \Theta$ y $\phi \in \Phi$ tal que para cualquier $x, y \in X$ se tiene que,

$$d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \theta[b^3 d(Tx, Ty)] \leq \phi\left(\theta\left[\frac{d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Ty) + \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}}{4}\right]\right)$$

entonces T tiene un único punto fijo.

Prueba. -

Afirmación: Si T es una θ - ϕ contracción de tipo Rocha entonces T es $\theta - \phi$ - contracción.

De manera análoga a la demostración anterior, por definición del máximo.

Se tiene que, $M(x, y) \geq d(x, Tx)$, $M(x, y) \geq d(y, Ty)$, $M(x, y) \geq d(x, y)$ y

$M(x, y) \geq \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}$ entonces:

$$\frac{d(x, y) + d(Tx, x) + d(Ty, y) + \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}}{4} \leq \frac{M(x, y) + M(x, y) + M(x, y) + M(x, y)}{4}$$

$$= M(x, y)$$

Se sabe que θ y ϕ son funciones no decrecientes.

$$\theta(b^3 d(Tx, Ty)) \leq \phi \left(\theta \left(\frac{d(x, y) + d(Tx, x) + d(Ty, y) + \frac{d(x, Ty) + d(Tx, y)}{2b^2}}{4} \right) \right)$$

$$\leq \phi(\theta(M(x, y)))$$

Se ha demostrado que T es una aplicación θ - ϕ contracción.

Por último, del teorema principal (Punto fijo para espacios b-métricos), se concluye que T posee un único punto fijo $x \in X$.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se demostró el teorema del punto fijo para θ - ϕ contracciones en espacios b-métricos completos. La demostración se dividió en probar la existencia (construcción de una sucesión b-Cauchy de manera recursiva y uso de la completitud) y unicidad (por contradicción usando la propiedad $\phi(t) < t$ para todo $t > 1$).

Luego, se aplicó el teorema a un problema de valor inicial lineal $\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{4}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{1}$, equivalente a una ecuación integral lineal de Volterra. Se verificaron las condiciones del teorema en el espacio $\mathbf{C}[0, 1]$ con la b-métrica $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2$, obteniendo existencia y unicidad de solución.

De igual manera, se aplicó el teorema a un problema de valor inicial no lineal $\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{4}\mathbf{sen}(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{1}$, equivalente a una ecuación integral no lineal de Volterra. Se verificaron las condiciones del teorema en el espacio $\mathbf{C}[0, 1]$ con la b-métrica $\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2$, obteniendo existencia y unicidad de solución. De esta manera los resultados se pueden emplear en la resolución de ecuaciones integrales lineales y no lineales.

Finalmente, se extendió el teorema a tres tipos particulares de contracciones en espacios b-métricos: tipo Kannan, Reich y Rocha. En cada una de estas demostraciones se establecen condiciones para la existencia y unicidad del punto fijo.

VI. CONCLUSIONES

Luego de desarrollar la presente investigación, se establecen las siguientes conclusiones:

- La utilización de θ - ϕ -contracciones en espacios b-métricos completos permite demostrar la existencia y unicidad del punto fijo.
- La propiedad del punto fijo para aplicaciones θ - ϕ -contractivas nos permite tratar problemas de ecuaciones integrales lineales y también de carácter no lineal. Para garantizar la existencia y unicidad de soluciones.
- La definición de una sucesión por recurrencia permitió la demostración del teorema del punto fijo en el espacio generalizado b-métrico completo utilizando θ - ϕ -contracciones. De manera análoga al principio de contracción de Banach.
- Las extensiones a contracciones de tipo Kannan, Reich y Rocha amplían aún más la aplicabilidad del teorema y nos proponen nuevos criterios para la existencia y unicidad del punto fijo.

VII. RECOMENDACIONES

A partir de los resultados de la investigación, se formulan las siguientes recomendaciones para futuros trabajos:

- Extender los resultados a otros tipos de espacios más generales, como espacios b-métricos parciales, donde la desigualdad triangular puede admitir variantes adicionales.
- Debilitar las condiciones definidas a las funciones θ y ϕ (como continuidad o monotonía) para ampliar la clase de aplicaciones contractivas que pueden ser estudiadas.
- Aplicar los teoremas demostrados a ecuaciones diferenciales fraccionarias.
- Los teoremas demostrados pueden servir como fundamento teórico para analizar la convergencia a determinados algoritmos.

VIII. REFERENCIAS

- Adams, R. A. (2001). Cálculo (6ª ed.; I. Portillo García, Trad.; J. Portillo García, Rev. téc.). Addison Wesley Longman.
- Aghajani, A., Abbas, M., & Roshan, J. (2014). Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces. *Mathematica Slovaca*, 64(4), 941-960. <https://doi.org/10.2478/s12175-014-0250-6>
- Apostol, T. M. (1967). *Calculus, Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra* (2nd ed.). Wiley.
- Bakhtin, I. A. (1989). *The contraction mapping principle in quasimetric spaces. Functional Analysis*, Gos. Ped. Inst. Ulyanovsk, 30, 26–37.
- Czerwik, S. (1993). *Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1, 5–11.
- Herrero Piñeyro, P. J. (2010). *Topología de espacios métricos*. Universidad de Murcia
- Ivorra Castillo, C. (2002). *Análisis matemático*. Universitat de València, <https://www.uv.es/~ivorra/analisis.pdf>
- Jleli, M., & Samet, B. (2014). A new generalization of the Banach contraction principle. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(1), 38. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-38>
- Lima, E. L. (2020). *Análise real – Vol. 1: Funções de uma variável*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
- Rezaei Roshana, J., Parvaneh, V., & Kadelburg, Z. (2019). Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 12(5), 793–803. <https://www.isr->

publications.com/jnsa/articles-1894-common-fixed-point-theorems-for-weakly-isotone-increasing-mappings-in-ordered-b-metric-spaces

Romero Martín, J. L. (1983). *Análisis matemático: (con problemas resueltos) I. Espacios métricos, espacios normados y continuidad*. Universidad Politécnica de Madrid. https://oa.upm.es/79234/1/AMatemJLR_I_20240207_174313.pdf

Rossafi, M., Kari, A., Park, C., & Lee, J. R. (2022). New fixed point theorems for θ - ϕ -contraction on b-metric spaces. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 29(1), 12–27. <https://doi.org/10.22436/jmcs.029.01.02>

Roshan, J. R., Parvaneh, V., & Kadelberg, Z. (2014). *Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces*. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 7(3), 229–245. <https://www.isr-publications.com/jnsa/articles-1894-common-fixed-point-theorems-for-weakly-isotone-increasing-mappings-in-ordered-b-metric-spaces>

Zheng, D., Cai, Z., & Wang, P. (2017). New fixed point theorems for θ - ϕ contraction in complete metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10(5), 2662–2670. <https://doi.org/10.22436/jnsa.010.05.32>