



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**DESIGUALDAD DE BELL: UNA PERSPECTIVA DESDE LA TEORIA DE
CONJUNTOS**

**Línea de investigación:
Física ambiental y Nuclear**

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

Autor

Tancayllo Chacca, Cosme Wilfredo

Asesor

Mejia Cordero, Bernabe Alonso

ORCID: 0000-0002-4314-1554

Jurado

Guzmán Calcina, Carmen Sandra

Lostanau Melgarejo, Marco Antonio

Nery Luján, Lidia Gumerinda

Lima - Perú

2026

RECONOCIMIENTO - NO COMERCIAL - SIN OBRA DERIVADA
(CC BY-NC-ND)



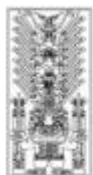
Desigualdad de Bell: Una Perspectiva desde la Teoría de Conjuntos

INFORME DE ORIGINALIDAD

11%	11%	2%	3%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	vdocumento.com Fuente de Internet	2%
2	www.scielo.br Fuente de Internet	2%
3	fdocuments.mx Fuente de Internet	1%
4	repositorio.pedagogica.edu.co Fuente de Internet	1%
5	Submitted to University of Lancaster Trabajo del estudiante	1%
6	dokumen.pub Fuente de Internet	1%
7	www.coursehero.com Fuente de Internet	<1%
8	fdocuments.in Fuente de Internet	<1%
9	www.reed.edu Fuente de Internet	<1%
10	repositorio.unfv.edu.pe Fuente de Internet	<1%
11	Submitted to Universidad Internacional de la Rioja Trabajo del estudiante	<1%



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

DESIGUALDAD DE BELL: UNA PERSPECTIVA DESDE LA TEORIA
DE CONJUNTOS

Línea de Investigación:

Física ambiental y Nuclear

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

Autor:

Tancayllo Chacca, Cosme Wilfredo

Asesor:

Mejia Cordero, Bernabe Alonso

ORCID: 0000-0002-4314-1554

Jurado

Guzmán Calcina, Carmen Sandra

Lostanau Melgarejo, Marco Antonio

Nery Luján, Lidia Gumercinda

Lima-Perú

2026

Dedicatoria

Esta tesis se la dedico especialmente a mi Padre por siempre apoyarme incondicionalmente.

A mis hermanos por siempre estar presente en las buenas y malas en cada reto que me proponga.

A mi pareja Nancy Luz y mi hijo Luca Valentino por estar ahí siempre impulsándome para que termine de realizar mi tesis y motivándome para seguir creciendo profesionalmente.

A todos los profesores de la escuela profesional de Física por darme una buena educación de calidad.

Agradecimiento

Al universo, por poner cada minúsculo detalle para que la vida pueda existir en la tierra.

A mi familia los Tancayllos.

A mi pareja Nancy Luz y a mi hijo Lucas Valentino que son el pilar de mi motivación de crecimiento profesional.

A la PhD. Sandra Guzmán, profesora de la escuela profesional de física de la facultad de ciencias naturales y matemática, por el constante apoyo, enseñanza, consejos y sobre todo por inculcarme a ser un investigador y perseguir tus sueños.

Al Mg. Bernabe Mejía, profesor de la escuela profesional de física de la facultad de ciencias naturales y matemática, por aceptar ser mi orientador, por dar una buena educación de nivel.

INDICE GENERAL

Resumen	iv
Abstract	v
I. INTRODUCCIÓN.....	6
1.1. Descripción y formulación del problema.....	6
1.2. Antecedentes.....	7
1.3. Objetivos.....	11
1.3.1. <i>Objetivos General</i>	11
1.3.2. <i>Objetivos Específicos</i>	11
1.4. Justificación.....	12
1.5. Hipótesis	12
II. MARCO TEÓRICO.....	13
2.1. Introducción de la mecánica cuántica	13
2.1.1. <i>Postulados de la mecánica cuántica</i>	13
2.1.2. <i>La medida</i>	15
2.1.3. <i>Desigualdades de Heisenberg</i>	16
2.2. Paradoja Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) y Desigualdad de Bell	16
2.2.1. <i>Paradoja Einstein-Podolsky-Rosen</i>	17
2.2.2. <i>Teorema de Bell</i>	19
III. MÉTODO.....	30
3.1. Tipo de investigación	30
3.2. Ámbito temporal y espacial	30
3.3. Variables	31
3.4. Población y Muestra.....	31
3.5. Instrumentos	31
3.6. Procedimientos.....	31
3.7. Análisis de datos.....	32
IV. RESULTADOS	33
V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	52
VI. CONCLUSIONES.....	54

VII. RECOMENDACIONES.....	55
VIII. REFERENCIAS.....	56

Resumen

La desigualdad de Bell constituye un criterio esencial para diferenciar entre teorías de variables ocultas locales y la naturaleza probabilística de la mecánica cuántica. En esta tesis, se presenta un análisis matemático de la desigualdad desde una perspectiva basada en teoría de conjuntos, acompañado por simulaciones computacionales desarrolladas en Python. Estas simulaciones modelan el comportamiento de electrones al interactuar con filtros tipo Stern–Gerlach, en contextos tanto clásicos como cuánticos. Inicialmente, se estudió un sistema clásico sin entrelazamiento utilizando muestras aleatorias y un modelo de medición fundamentado en teoría de conjuntos. En estas condiciones, la desigualdad de Bell se cumplió consistentemente, sin importar la configuración de los parámetros de medición. No obstante, al introducir un tercer filtro en la configuración experimental, se produjo una alteración en el estado del sistema que contradice las predicciones clásicas. Específicamente, con filtros orientados a 0° , 90° y 180° , se registró una probabilidad de detección del 12,5%, que no puede ser explicada mediante teorías clásicas, evidenciando la influencia de la medición sobre el sistema. Posteriormente, al analizar sistemas cuánticos con partículas entrelazadas en estado singlete, se observó que, para ciertos ángulos relativos entre filtros, las probabilidades de detección violaban la desigualdad de Bell, validando así las predicciones no locales de la mecánica cuántica. En conclusión, el estudio demuestra que la desigualdad de Bell es una herramienta poderosa para contrastar modelos clásicos y cuánticos, y que el enfoque mediante teoría de conjuntos puede ofrecer nuevas perspectivas sobre los fundamentos de los fenómenos cuánticos.

Palabras clave: Desigualdad de Bell, teoría de conjuntos, mecánica cuántica, electrones, correlaciones cuánticas.

Abstract

Bell's inequality serves as an essential criterion for distinguishing between local hidden variable theories and the probabilistic nature of quantum mechanics. This thesis presents a mathematical analysis of the inequality from a set theory-based perspective, supported by computational simulations developed in Python. These simulations model the behavior of electrons interacting with Stern–Gerlach-type filters in both classical and quantum contexts. Initially, a classical system without entanglement was studied using random samples and a measurement model based on set theory. Under these conditions, Bell's inequality was consistently satisfied, regardless of the measurement parameter configurations. However, when a third filter was introduced into the experimental setup, a state alteration was observed that contradicted classical predictions. Specifically, for filters oriented at 0° , 90° , and 180° , a detection probability of 12.5% was recorded an outcome that cannot be explained by classical theories, highlighting the influence of measurement on the system. Subsequently, when analyzing quantum systems with entangled particles in a singlet state, it was found that for certain relative filter angles, detection probabilities violated Bell's inequality, thereby confirming the nonlocal predictions of quantum mechanics. In conclusion, this study demonstrates that Bell's inequality is a powerful tool for contrasting classical and quantum models and that a set-theoretical approach can offer new insights into the mathematical foundations of quantum phenomena.

Keywords: Bell's inequality, set theory, quantum mechanics, electrons, quantum correlations.

I. INTRODUCCIÓN

1.1. Descripción y formulación del problema

La desigualdad de Bell ocupa un lugar fundamental en los cimientos de la física moderna, ya que establece un criterio matemático para distinguir entre las predicciones de las teorías de variables ocultas locales y los resultados probabilísticos propios de la mecánica cuántica. Desde su formulación por Bell (1964), ha sido objeto de un intenso estudio desde perspectivas físicas y experimentales, lo que ha dado lugar a una amplia base de evidencia empírica que confirma su violación en sistemas cuánticos entrelazados (Aspect et al., 1982). No obstante, a pesar del respaldo experimental acumulado, persiste un vacío conceptual respecto a su análisis desde marcos matemáticos más fundamentales, como la teoría de conjuntos. Estos enfoques, que sustentan los modelos deterministas tradicionales, ofrecen una vía relevante para profundizar en la comprensión de las limitaciones de las teorías clásicas frente a la estructura no clásica de la realidad cuántica.

En los modelos clásicos, se asume que los resultados de las mediciones están completamente determinados por variables ocultas preexistentes, las cuales pueden representarse dentro de un espacio muestral bien definido, estructurado mediante conjuntos y subconjuntos que satisfacen los axiomas de la probabilidad clásica (Kolmogórov, 1956). Bajo este marco, las correlaciones entre observables deben cumplir necesariamente la desigualdad de Bell. Sin embargo, tanto las predicciones teóricas de la mecánica cuántica como los resultados experimentales derivados de sistemas entrelazados indican que no es posible describir de manera coherente todos los resultados de medición utilizando una única estructura probabilística clásica. Esta incompatibilidad pone en evidencia límites fundamentales en la aplicabilidad del formalismo basado en teoría de conjuntos para describir fenómenos cuánticos.

En este contexto, el problema central de la presente investigación consiste en cuestionar en qué medida la desigualdad de Bell puede ser comprendida y formalizada desde la teoría de conjuntos, y cómo dicha formulación permite revelar las limitaciones inherentes de los modelos clásicos al intentar describir sistemas cuánticos. Asimismo, se plantea analizar cómo la introducción de nuevas configuraciones de medición, como la inclusión de filtros tipo Stern–Gerlach, modifica la estructura del espacio de eventos y las probabilidades asociadas, evidenciando el papel activo de la medición en la mecánica cuántica y reforzando la necesidad de enfoques matemáticos alternativos para su adecuada interpretación.

1.2. Antecedentes

Desde la primera publicación realizado por Albert Einstein y sus colegas cuestionando la mecánica cuántica hasta la actualidad han existido innumerables publicaciones referente al tema (Einstein et al., 1935).

Uno de los primeros trabajos teóricos que llevo lo filosófico a lo real fue el trabajo publicado por Jhon S. Bell en 1964 en donde mediante ecuaciones matemáticas podría corroborar que la MC no puede ser entendida mediante teorías de variables ocultas como Albert Einstein y sus colegas predecían (Bell, 1964).

Sin embargo, en 1969 el teorema inicialmente propuesto por Bell fue generaliza para una situación más real sin considerar la perfección por Clauser, Home, Shimony y Holt denominado desigualdad de CHSH o segunda desigualdad de Bell que actualmente es usado para corroborar trabajos experimentales debido que esta desigualdad ya cuenta con un límite numérico para su corroboración (Clauser et al., 1969).

En 1972, Freedman y Clauser, realizan un trabajo de investigación sobre la prueba experimental de las teorías locales de variables ocultas dando razón a la MC sobre que no

pueden ser explicados mediante teorías de variables ocultas y locales (Freedman y Clauser, 1972).

En 1974, Clauser y Horne, exploraron las implicaciones experimentales de las teorías locales objetivas en el contexto específico de la relatividad especial, concluyendo que la ley de la relatividad no es violada y que la mecánica cuántica no puede ser explicada mediante teorías de variables ocultas locales (Clauser y Horne, 1974).

Por otro lado, en 1975, Aspect propone un diseño experimental específico para entender si las teorías locales pueden proporcionar una explicación completa de los fenómenos cuánticos o si existen limitaciones fundamentales para el entendimiento de la MC (Aspect, 1975).

En 1976, Fry y Thompson realizaron un estudio de teorías locales de variables ocultas en la medición de la correlación de la polarización lineal entre dos fotones, obteniendo una clara violación de la desigualdad de Bell y concordando con la mecánica cuántica, de que no pueden ser explicados mediante teorías locales de variables ocultas (Fry y Thompson, 1976).

En 1978, Clauser realizó un estudio sobre las implicaciones del teorema de Bell junto a Shimony, donde discuten las cuestiones filosóficas y teóricas de estos resultados para una comprensión de la naturaleza cuántica. El trabajo realizado por los autores fue fundamental para la comprensión de la no localidad cuántica y los fenómenos de entrelazamiento cuántico (Clauser y Shimony, 1978).

En 1982, Aspect y colegas realizaron la primera prueba experimental utilizando analizadores de variación temporal, que tenía como objetivo medir las correlaciones de las polarizaciones lineales de pares de fotones. Los resultados que obtuvieron concordaron con las predicciones de la mecánica cuántica sobre las correlaciones de partículas entrelazadas,

en contraposición al argumento EPR de teorías de variables ocultas locales (Aspect et al., 1982).

Por otro lado, en 1982, Aspect y Roger, en colaboración con Grangier, realizaron un estudio sobre la correlación de la polarización lineal de pares de fotones emitidos en una cascada de calcio. Los resultados que obtuvieron concuerdan con las predicciones de la MC sobre la existencia del entrelazamiento cuántico (Aspect et al., 1982).

En 1995, John S. Bell realizó un estudio de la no localidad cuántica en el contexto de fotones generados en cascadas atómicas, con el objetivo de conciliar con las predicciones de la MC para versiones idealizadas de los experimentos en cuestión (Bell, 1995).

Un estudio realizado por Tittel y colegas demostraron que, para fotones preparados y separados por más de 10 km, existe una clara violación de la desigualdad de Bell, refutando definitivamente el argumento EPR de la posibilidad de que existan variables ocultas locales (Tittel et al., 1998).

En 1998, Weihs y colegas realizaron un estudio aplicando las ideas de los trabajos de Aspect sobre las partículas entrelazadas, confirmando la existencia de una clara violación de la desigualdad de Bell bajo las estrictas condiciones de localidad de Einstein (Weihs et al., 1998).

En 1999, Aspect, mediante varios resultados experimentales, declaró que los fotones entrelazados, separados a distancias extremadamente grandes, deben considerarse como un único objeto inseparable, sin la posibilidad de ser entendidos mediante teorías de variables ocultas (Aspect, 1999).

Por otro lado, después de la última publicación de Alain Aspect en 1999, Rowe y colegas en 2001 realizaron un estudio sobre las correlaciones de las propiedades clásicas de partículas masivas de iones de $^9\text{Be}^+$. Estas correlaciones violan la desigualdad de Bell en

un factor de 0.25 con respecto a lo máximo valor permitido por las teorías de variables locales (Rowe et al., 2001).

En 2008, Matsukevich y colegas realizaron un estudio sobre la violación de la desigualdad de Bell con dos qubits atómicos de iones de Yb^+ remotos, siendo uno de los trabajos más relevantes en el desarrollo de la computación y la comunicación cuántica (Matsukevich et al., 2008).

En 2013, Giustina y colegas corroboraron experimentalmente la desigualdad de Bell utilizando fotones entrelazados sin la suposición de muestreo justo, manifestando que las teorías realistas de variables ocultas deberían ser abandonadas definitivamente (Giustina et al., 2013).

Sin embargo, Christensen y colegas en 2013 realizaron un estudio sobre la desigualdad de Bell para fotones entrelazados, Este estudio marcó un hito al ser el primer experimento en detectar la violación de la desigualdad de Bell con una significancia estadística de más de 7 desviaciones estándar (Christensen et al., 2013).

Finalmente, en 2015, Alain Aspect publicó su último artículo titulado “*Cerrando la puerta al debate cuántico de Einstein y Bohr*”, en el que anuncia que deberíamos renunciar al realismo local ante las inmensas pruebas experimentales sobre la violación de la desigualdad de Bell y dar paso a nuevas investigaciones (Aspect, 2015).

A partir del año 2015 hasta la actualidad, se realizaron diversos estudios significativos en el campo de la física cuántica. En 2015, Abellán y colegas demostraron la generación de números aleatorios para pruebas de Bell sin brechas, mientras que Shalm y colegas presentaron una violación al realismo local utilizando fotones entrelazados (Abellán et al., 2015; Shalm et al., 2015). En 2017, Rosenfeld y colegas midieron correlaciones entre sistemas distantes, también violando el realismo local (Rosenfeld et al., 2017). En 2018,

Rauch y colegas realizaron un experimento cósmico de Bell con fotones entrelazados en polarización, hallando una violación estadísticamente significativa de la desigualdad de Bell. Por último, Li y colegas midieron la correlación de fotones entrelazados separados, refutando modelos locales de variables ocultas (Rauch et al., 2018; Li et al., 2018). Estos estudios representan avances significativos en la comprensión de la mecánica cuántica.

En 2022, Alain Aspect, John Clauser y Anton Zeilinger fueron galardonados con el premio nobel en Física, por sus investigaciones con fotones entrelazados abriendo a nuevas investigaciones basadas en tecnologías e información cuánticas (Nobel Prize Outreach AB, 2022).

Esta tesis de licenciatura tiene como objetivo analizar la información presentada por Pinochet y Líbano en su artículo de 2016, que aborda la teoría de conjuntos. Se propone aplicar esta teoría en combinación con el diagrama de Venn y con filtros tipo Stern Gerlach para explorar la violación de la desigualdad de Bell. Para ello, se realizará simulaciones utilizando el programa Python, donde nos permitirá identificar los límites y condiciones en las que dicha desigualdad de Bell es violada.

1.3. Objetivos

1.3.1. *Objetivos General*

Comprensión y análisis de la desigualdad de Bell mediante la teoría de conjuntos

1.3.2. *Objetivos Específicos*

Objetivo específico 1: Obtener la desigualdad de Bell utilizando conceptos de teoría de conjuntos.

Objetivo específico 2: Investigar la conexión conceptual entre la teoría de conjuntos y la teoría cuántica en la desigualdad de Bell.

Objetivo específico 3: Examinar el papel de la desigualdad de Bell como evidencia a favor de la mecánica cuántica mediante la teoría de conjuntos.

Objetivo específico 4: Aplicar la teoría de conjuntos para demostrar la violación de la desigualdad de Bell utilizando un filtro tipo Stern Gerlach.

1.4. Justificación

Este estudio de investigación teórica busca la comprensión de la desigualdad de Bell mediante la teoría de conjuntos, dirigido tanto a expertos como a aquellos que están interesados en entender la desigualdad de Bell desde una perspectiva conjuntista.

1.5. Hipótesis

Mediante la teoría de conjuntos es posible derivar la desigualdad de Bell, el cual bajo un sistema clásico la desigualdad se muestra como válida. No obstante, al probar con filtros tipo Stern Gerlach con configuraciones con uno, dos y tres filtros, especialmente en sistemas en estados entrelazados, se observará una violación de la desigualdad de Bell, lo que, desde la perspectiva de la teoría de conjuntos, evidencia el carácter no local de la mecánica cuántica.

II. MARCO TEÓRICO

En este capítulo, detallaremos conceptos de la mecánica cuántica y discutiremos las violaciones de las desigualdades de Bell, basados en las siguientes referencias: (Bell, 2024; Sakurai y Napolitano, 2020; Griffiths y Schroeter, 2018; Nielsen y Chuang, 2010).

2.1. Introducción de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica es una teoría fundamental para comprender el universo a nivel microscópico. En los siguientes capítulos, presentaremos los postulados de la mecánica cuántica y en donde surgen las desigualdades de Bell.

2.1.1. Postulados de la mecánica cuántica

Los postulados de la mecánica cuántica son el punto de partida para una posterior comprensión que queramos estudiar (Iza, 2012).

Primer postulado: *Cada sistema cuántico aislado está asociado a un Espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, en donde el sistema está completamente definido por un vector de estado cuántico denotado por $|\psi\rangle$.*

El estado cuántico puede ser definido de acuerdo con la notación de Dirac por $|\psi\rangle$ y para un estado de Hilbert bidimensional $\mathcal{H}_2$ puede ser escrito mediante una combinación lineal de los dos estados

$$|\psi\rangle = a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle, \quad (1)$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ son base ortonormal que $\in \mathcal{H}$, por condición de normalización podemos encontrar la siguiente relación.

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2)$$

Segundo postulado: *la evolución temporal de un sistema cuántico cerrado está gobernada por la ecuación de Schrodinger*, que describe como el vector de estado del sistema cambia con el tiempo

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle, \quad (3)$$

donde $\hbar = 1,054571628 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ y H el *hamiltoniano* del sistema cerrado.

Tercer postulado: *Las mediciones cuánticas están dadas por un conjunto de operadores denotados por $\{M_n\}$. La probabilidad antes de que el sistema colapse está dado por*

$$P_m = \langle \psi | M_n^\dagger M_n | \psi \rangle, \quad (4)$$

donde $M_n^\dagger$, es el operador de medición conjugado o hermítico de un sistema complejo.

Cuarto postulado: *El espacio de Hilbert de un sistema compuesto, es dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada subsistema físico.* A partir de este postulado podemos definir dos tipos de estados ampliamente usadas: los estados separables y los estados entrelazados.

- **Estado separable:** Estos estados se pueden descomponer mediante un producto tensorial de cada subsistema, como por ejemplo descomponiendo un estado $|\psi\rangle_{12} \in \mathcal{H}$.

$$|\psi\rangle_{12} = |\varphi\rangle_1 \otimes |\varphi\rangle_2, \quad (5)$$

donde $|\varphi\rangle_1 \in \mathcal{H}_1$, $|\varphi\rangle_2 \in \mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}$

- **Estado entrelazado:** Son aquellos estados donde no se pueden descomponer mediante un producto tensorial de dos subsistemas físicos y que dicho estado no puede escribirse de forma independiente. Por ejemplo, si tenemos el siguiente estado físico

$$|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 + |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2). \quad (6)$$

Los estados entrelazados de dos dimensiones también son conocidos como *los estados de Bell* y son 4 estados posibles (Pineda, 2012).

$$|\psi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (7)$$

$$|\psi\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (8)$$

$$|\varphi\rangle_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (9)$$

$$|\varphi\rangle_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle). \quad (10)$$

Los 4 estados de Bell tienen aplicaciones importantes en criptografía cuántica, teleportación cuántica, computación cuántica y son fundamentales para el desarrollo de tecnologías avanzadas y seguras.

2.1.2. *La medida*

El problema de la medida en la MC es uno de los más grandes misterios y debatidos en la física contemporánea. Según los postulados, la descripción del estado de un sistema se realiza mediante la función de onda de Schrodinger, que representa la probabilidad de encontrar una partícula en una determinada posición. Al realizar una medición en el sistema, su estado colapsa instantáneamente en uno de los posibles estados de medición; esto es lo que algunos denominan “*el colapso de la medición de onda*”.

Este fenómeno del colapso de la función de onda es uno de los aspectos más controversiales de la MC. Existe una variedad de científicos expertos en el área y preguntándose: *¿Por qué ocurre el colapso y por qué lo hace de manera aleatoria?* Estas preguntas llevan a diferentes interpretaciones tratando de explicar el fenómeno observado sin una respuesta clara o verídica del fenómeno observado.

La medida en la MC sigue siendo un tema abierto en debate para entender el fenómeno y entenderlo completamente podría requerir un avance tecnológico, experimental o conceptual sobre el entendimiento de la naturaleza fundamental que gobierna el universo.

2.1.3. *Desigualdades de Heisenberg*

Conocido como el principio de indeterminación de Heisenberg. Estas desigualdades establecen una relación de incertidumbre sobre ciertas cantidades físicas de una partícula subatómica

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|, \quad (11)$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (12)$$

donde A, B dos operadores arbitrarios y $\Delta x, \Delta p$ es la variación de posición y momento, estas ecuaciones demuestran que mientras más precisa sea la medición de uno de los parámetros, mayor será la incertidumbre del otro parámetro.

Esta propiedad de la desigualdad de Heisenberg tiene importantes implicaciones en la MC, desde la naturaleza de las partículas subatómicas hasta el entendimiento de fenómenos como el efecto túnel, en contra posición a la teoría clásica que las medidas no se basan en incertidumbres. Einstein no concordaba con esta teoría de que en el mundo subatómico todo era de probabilidades y menciona una famosa frase “*Dios no juega a los dados*” y nació la paradoja EPR.

2.2. Paradoja Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) y Desigualdad de Bell

La mecánica cuántica en sus inicios tenía en debate a grandes científicos sobre las implicaciones de la MC en las leyes físicas. Einstein y un grupo de científicos de renombre no aceptaban la no localidad de la MC y el principio de incertidumbre de Heisenberg, argumentando de que la función de onda que describe la MC era una onda no completa, sin

embargo, en 1964 Jhon S. Bell demostró que las teorías deterministas o locales no puedes describir el comportamiento de la MC, concluyendo que esta última ofrece una descripción completa de los fenómenos y no una teoría incompleta como planteaban muchos científicos de la época.

2.2.1. Paradoja Einstein-Podolsky-Rosen

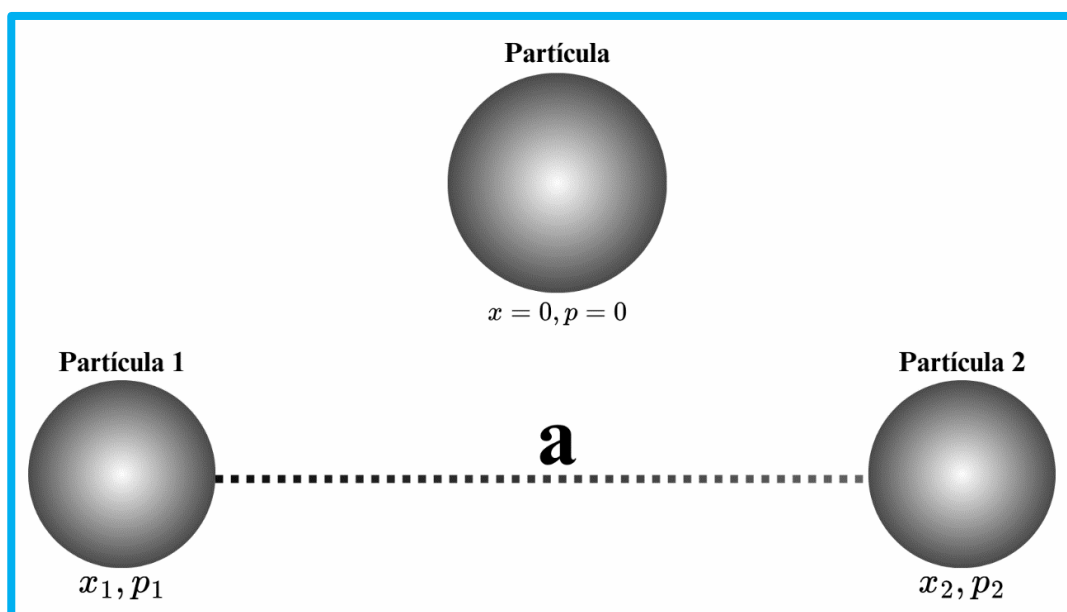
En 1935, Albert Einstein junto a Boris Podolsky y Nathan Rosen, publicaron un artículo criticando a los fundamentos de la MC llamado “*Can Quantum- Mechanical Descripcion of Reality be Considered Complete?*” (Einstein et al., 1935). Estableciendo las bases de las llamadas “teorías de variables ocultas”.

a) La descripción del argumento EPR

La descripción del argumento EPR es puramente filosófico, sim embargo en este apartado intentaremos dar una explicación matemática basado en la información experimental de una partícula para deducir las siguientes informaciones, como la posición y momento de una segunda partícula.

Figura 1

Configuración mental para describir la paradoja EPR



Nota. La siguiente Configuración mental bidimensional sirve para describir la paradoja EPR sobre el comportamiento del entrelazamiento cuántico, donde p_1 y p_2 describen el momento de cada partícula, x_1 y x_2 describe la posición de cada partícula separados una distancia “ a ” extremadamente lejos para garantizar que no existe interacción entre ellos.

Fuente: Elaborado por el Autor.

Observando la figura 1, podemos plantear las siguientes ecuaciones, considerando que el momento se conserva

$$p = p_1 + p_2, \quad (13)$$

$$x = x_1 - x_2 = a. \quad (14)$$

El criterio EPR: “*Si, en un sistema sin perturbar, podemos predecir con certeza el valor exacto de la magnitud física, por lo tanto, existe un elemento de realidad física correspondiente a dicha cantidad*”, se considera que el conmutador de la posición x y el momento p es cero ($[x, p] = 0$), por lo tanto, se le puede asignar simultáneamente elementos de realidad dado un montaje experimental.

Entonces es posible preparar un sistema con la siguiente probabilidad de medición

$$P(p = 0, x = a), \quad (15)$$

con la medida de la posición de la partícula 2 (x_2), podemos predecir con exactitud la posición de la partícula 1 (x_1), con la siguiente relación

$$x_1 = x_2 + a, \quad (16)$$

por conservación de momento, una medida del momento p_2 nos puede revelar con exactitud el momento de la partícula 1

$$p_1 = -p_2, \quad (17)$$

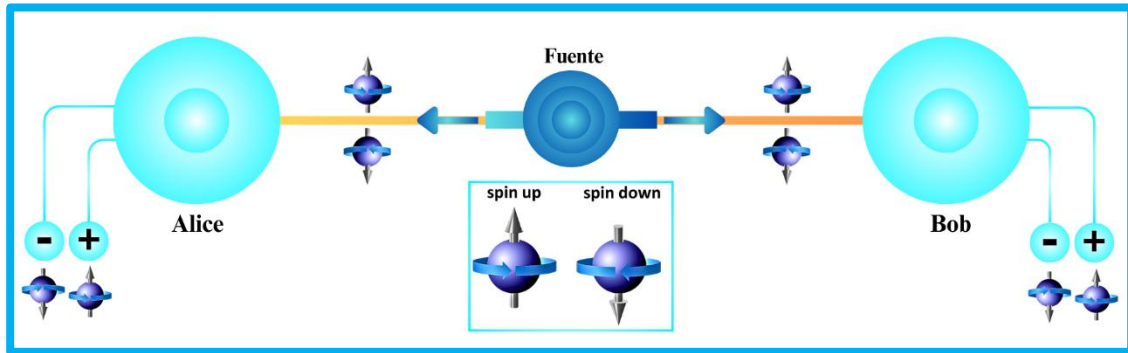
por lo tanto, podemos predecir la posición y el momento de la partícula 1 al 100% de probabilidad de encontrar el valor previsto, entonces, podemos decir que: la medida de x_2 revela la posición de x_1 y la medida de p_2 revela el momento de p_1 .

La paradoja EPR no viola la teoría de la relatividad, según la cual nada puede viajar más rápido que la velocidad de la luz, independientemente de la distancia. Esto se debe a que, aunque la correlación cuántica entre partículas entrelazadas parece permitir una comunicación instantánea, en realidad no se está transmitiendo información en el sentido clásico. Los resultados medidos en un extremo del entrelazamiento no pueden utilizarse para transmitir información de manera instantánea al otro extremo. Por lo tanto, la paradoja EPR no contradice la teoría de la relatividad especial, ya que no permite una comunicación más rápida que la luz.

Sin embargo, esta paradoja fue refutada por Jhon Bell en 1964, donde demostró matemáticamente que la teoría EPR de variables locales ocultas necesariamente entraría en conflicto con la mecánica cuántica para ciertas condiciones.

2.2.2. Teorema de Bell

Jhon Stewart Bell, Físico teórico irlandés comenzó a estudiar la no localidad para corroborar si la teoría de variables ocultas podría predecir todas las predicciones cuánticas llegando a la conclusión de que para ciertos valores es violada las predicciones clásicas y en 1964 publica un artículo matemático demostrando la no localidad de la MC (Bell, 1964).

Figura 2*Diseño experimental del teorema de Bell*

Nota. Diagrama de una fuente que emite partículas con espín $\frac{1}{2}$ en direcciones seleccionadas a dos detectores llamados Alice y Bob para ilustrar la paradoja EPR. *Fuente:* *Elaborado por el Autor.*

Los observables por los detectores Alice y Bob como es observada en la Figura 2 son los espines $\frac{1}{2}$ de cada partícula en ciertas direcciones seleccionadas fijas cuando se encuentran extremadamente lejos, fuera de cualquier posible interacción. Las proyecciones del espín para demostrar el teorema de Bell juegan un papel similar al de la posición y el momento en la teoría del EPR.

Para demostrar el teorema de Bell, consideremos un sistema de dos partículas (1 y 2) como se muestra en la Figura 2 y que forman un estado singlete que viajan en el mismo eje en sentidos opuestos

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (18)$$

denotaremos por A y B a los resultados de medir las proyecciones de los espines en direcciones específicas dadas por los vectores unitarios **a** y **b**.

Para la hipótesis de localidad consideremos que existe variables ocultas en los resultados de las proyecciones del spin de las partículas de $A(a, \lambda)$ y $B(b, \lambda)$ a lo largo de

la dirección de **a** y **b** está definida por el parámetro λ , la variable oculta y si existiera más variables ocultas, λ representa todas esas variables ocultas.

El realismo local proviene del hecho de que $A(a, \lambda)$ existe antes de la medición y no es creado por la observación definida por la MC, de forma análoga definimos $B(b, \lambda)$, por ende $A(a, \lambda)$ no depende de $B(b, \lambda)$, estableciendo la siguiente normalización

$$A(a, \lambda) = \pm 1 \text{ y } B(b, \lambda) = \pm 1. \quad (19)$$

El parámetro λ no es conocido, pero se propone que existe su función de probabilidad definido por

$$\int \rho_\lambda d\lambda = 1, \quad (20)$$

$$\rho_\lambda \in [0,1]. \quad (21)$$

Con esta distribución podemos definir la media del producto de las mediciones, dada por:

$$P(a, b) = \int \rho_\lambda A(a, \lambda) B(b, \lambda) d\lambda. \quad (22)$$

El estado singlete donde el spin total cero se satisface la siguiente igualdad

$$A(a, \lambda) = -B(a, \lambda), \quad (23)$$

entonces

$$P(a, b) = - \int \rho_\lambda A(a, \lambda) A(b, \lambda) d\lambda. \quad (24)$$

Introducimos un nuevo vector unitario **c**, entonces

$$P(a, c) = - \int \rho_\lambda A(a, \lambda) A(c, \lambda) d\lambda, \quad (25)$$

por lo tanto

$$P(a, b) - P(a, c) = \int \rho_\lambda [A(a, \lambda)A(b, \lambda) - A(a, \lambda)A(c, \lambda)]d\lambda, \quad (26)$$

donde

$$A(a, \lambda) = B(b, \lambda) = C(c, \lambda) = \pm 1, \quad (27)$$

entonces el módulo de las proyecciones está dado por

$$|A(a, \lambda)|^2 = |B(b, \lambda)|^2 = |C(c, \lambda)|^2 = 1, \quad (28)$$

por lo tanto, tenemos

$$P(a, b) - P(a, c) = - \int \rho_\lambda [1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda)]A(a, \lambda)A(b, \lambda)d\lambda, \quad (29)$$

aplicando modulo a ambos lados

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq \int |\rho_\lambda [1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda)]A(a, \lambda)A(b, \lambda)|d\lambda, \quad (30)$$

donde

$$\rho_\lambda \geq 0, \quad (31)$$

$$|A(a, \lambda)B(b, \lambda)| = 1, \quad (32)$$

$$1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda) \geq 0, \quad (33)$$

por lo tanto, podemos obtener la siguiente relación

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq \int \rho_\lambda [1 - A(b, \lambda)A(c, \lambda)]d\lambda, \quad (34)$$

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq \int \rho_\lambda d\lambda - \int A(b, \lambda)A(c, \lambda)d\lambda, \quad (35)$$

finalmente

$$|P(a, b) - P(a, c)| \leq 1 - P(b, c). \quad (36)$$

La ecuación (36) es la desigualdad de Bell que debe ser obedecida por cualquier teoría local y realista.

a) Predicciones cuánticas

La predicción cuántica debe demostrar la violación de la desigualdad de Bell obtenido en el apartado anterior mediante la determinación del valor esperado del producto de las variables de proyección de spin, tanto para la partícula 1 en la dirección **a** y para la partícula 2 en la dirección **b**.

El valor esperado de las componentes del spin en las direcciones a, b para dos partículas de espín $\frac{1}{2}$ total cero, es dado por:

$$P(a, b) = \langle \psi | (\sigma_1 \cdot \hat{a}) (\sigma_2 \cdot \hat{b}) | \psi \rangle. \quad (37)$$

El estado singlete $|0\rangle$ del spin total cero, es dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2). \quad (38)$$

En Notación de espín es posible escribir la ecuación 38 de la siguiente manera

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (39)$$

donde los subíndices 1, 2 indican los estados de las partículas 1 y 2.

La Solución de la ecuación 37 se encuentra en el Anexo 2 de la tesis doctoral de Gonzalo Abal (Gonzalo Abal, 2007; Sakurai y Napolitano, 2011) y está dada por la siguiente ecuación

$$P(a, b) = \langle \psi | (\sigma_1 \cdot \hat{a}) (\sigma_2 \cdot \hat{b}) | \psi \rangle = -\hat{a} \cdot \hat{b} = -\cos(a - b). \quad (40)$$

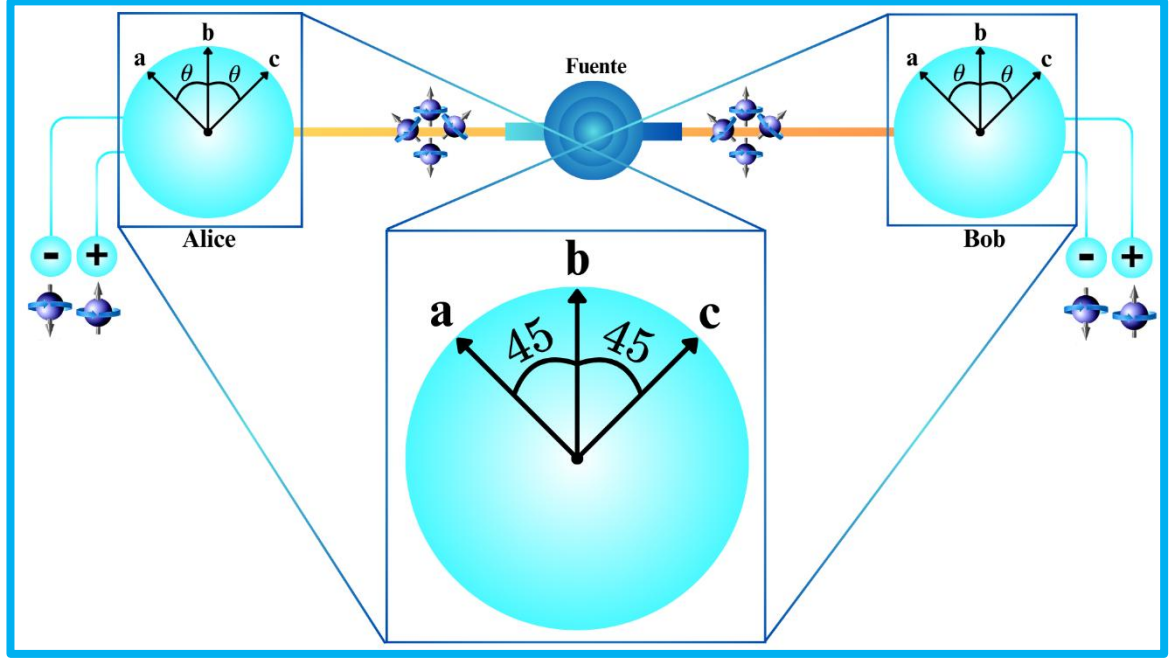
También es posible determinar la amplitud de probabilidad de una medida de encontrar espín up en las direcciones $\hat{a}$ y $\hat{b}$ y está dado por

$$P(a, b) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{a - b}{2} \right). \quad (41)$$

Según la teoría de variables ocultas la ecuación, las probabilidades de la encontradas bajo la ecuación (36) y la ecuación (37) deberían tener los mismos valores, sin embargo, para ciertos valores como es observado la Figura 3 dicha desigualdad es violada

Figura 3

Predicción cuántica para el teorema EPR



Nota. Tres proyecciones de spin en tres direcciones unitarios a, b y c con proyecciones de 45° entre ellos. *Fuente: Elaborado por el Autor.*

La predicción de la mecánica cuántica para los tres vectores unitarios observados en la figura 3, está dada por la siguiente ecuación

$$|P(a, b) - P(a, c)| = |-\hat{a} \cdot \hat{b} + \hat{a} \cdot \hat{c}| = |-\cos(90^\circ) + \cos(45^\circ)|, \quad (42)$$

$$|P(a, b) - P(a, c)| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (43)$$

La predicción de la mecánica clásica para el ejemplo mostrado en la figura 3 para los tres vectores unitarios esta dado por

$$1 + P(b, c) = 1 - \hat{b} \cdot \hat{c} = 1 - \cos(45^\circ) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (44)$$

Comparando los resultados obtenidos mediante la predicción cuántica dada por la ecuación (43) y la predicción clásica dada por la ecuación (44) y reemplazando en la ecuación (36), obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (45)$$

resolviendo la desigualdad, obtenemos el siguiente resultado

$$\sqrt{2} \leq 1, \quad (46)$$

este resultado es absurdo, con este resultado podemos afirmar que la mecánica cuántica no puede ser predichos en su totalidad por teorías de variables ocultas como fue propuesta por la mecánica clásica.

b) Generalización de la desigualdad Bell (SCSH)

La generalización de la desigualdad de Bell lo realizaron Clauser y colegas, y es denominado desigualdad de SCSH por sus iniciales y su uso es frecuente para verificar las desigualdades de Bell en los experimentos actuales (Clauser et al., 1969).

CHSH mantienen el determinismo y localidad para demostrar el teorema de Bell, sin embargo, no asumen la correlación perfecta, esto implica que las proyecciones $A(a, \lambda)$, $B(b, \lambda)$ ya no son binarias y cumplen la siguiente igualdad

$$-1 \leq A(a, \lambda) \leq 1 \quad y \quad -1 \leq B(b, \lambda) \leq 1, \quad (47)$$

por lo tanto, la media de producto de un par de medidas este dado por

$$P(a, b) = \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \quad (48)$$

Consideremos que (a,b) y (c,d) son dos orientaciones de los detectores Alice y Bob, por ende la diferencia de correlaciones está definido por

$$P(a, b) - P(a, d) = \int [A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(d, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda, \quad (49)$$

por simplicidad consideremos $A(a, \lambda) = A_a$, para escribir la siguiente identidad algebraica ampliamente utilizada en Física y matemática

$$A_a B_b - A_a B_d = A_a B_b \pm A_a B_b A_c B_d - A_a B_d \mp A_a B_b A_c B_d, \quad (50)$$

$$A_a B_b - A_a B_d = A_a B_b [1 \pm A_c B_d] - A_a B_d [1 \pm A_c B_d]. \quad (51)$$

Reemplazando la ecuación (51) en la ecuación (49), obtenemos

$$\begin{aligned} P(a, b) - P(a, d) &= \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)[1 \pm A(c, \lambda)B(d, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda \\ &\quad - \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)[1 \pm A(c, \lambda)B(d, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \quad (52)$$

El producto de la ecuación (47) este dado por $|A(a, \lambda)B(b, \lambda)| \leq 1$, por ende, $1 \pm A(a, \lambda)B(b, \lambda) \geq 0$, aplicando valor absoluto a la ecuación (52) y resolviendo, obtenemos

$$|P(a, b) - P(a, d)| \leq \int [2 \pm A(c, \lambda)B(d, \lambda) \pm A(c, \lambda)B(b, \lambda)]\rho(\lambda)d\lambda, \quad (53)$$

por condición de normalización

$$|P(a, b) - P(a, d)| \leq 2 \pm [P(c, d) + P(c, b)], \quad (54)$$

$$|P(a, b) - P(a, d)| + |P(c, d) + P(c, b)| \leq 2. \quad (55)$$

Utilizando uso de la desigualdad triangular, se puede expresar en términos del parámetro de Bell.

$$-2 \leq E \equiv P(a, b) - P(a, d) + P(c, d) + P(c, b) \leq 2 \quad (56)$$

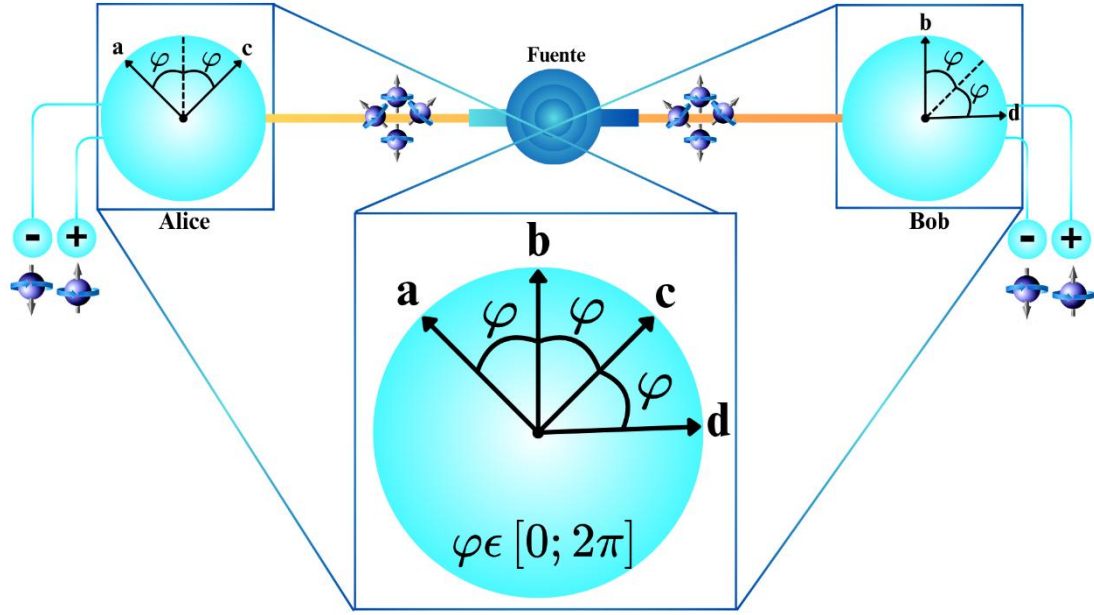
En experimentos actuales es común usar la desigualdad generaliza de Bell (CHSH) con valores de expectación.

$$S = |E_{11} + E_{12} + E_{21} - E_{22}| \leq 2 \quad (57)$$

La desigualdad CHSH predice que si $S \leq 2$, el sistema puede ser descrito mediante teorías locales y si $S > 2$, la desigualdad de Bell es violada y la teoría no podrían ser explicados mediante teorías locales, para entender el comportamiento de esta desigualdad de CHSH es planteada el siguiente ejemplo como es mostrado en la figura 4.

Figura 4

Predicción cuántica en la desigualdad CHSH



Nota. Proyección de spin en direcciones de los detectores de Alice dada por a, c y Bob dada por b, d coplanares y ortogonales entre sí y el sistema de Bob está rotando por un Angulo $\varphi \in [0; 2\pi]$ con respecto al detector de Alice. *Fuente: Elaborado por el Autor.*

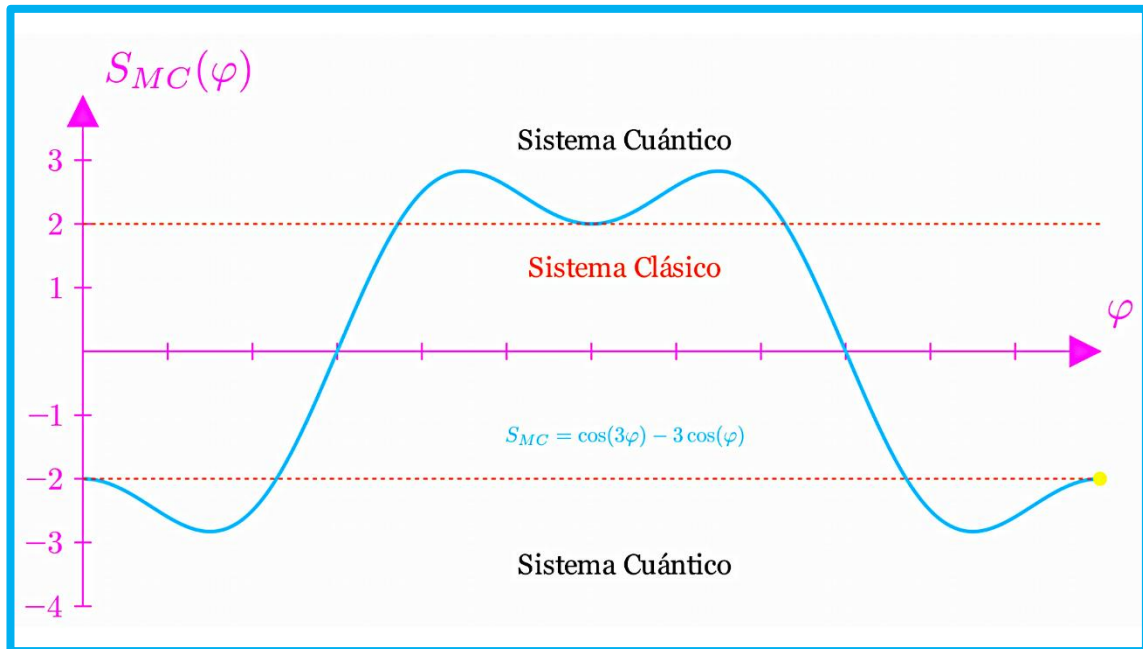
Utilizando el ejemplo mostrado de la figura 4 y realizando el uso de la correlación cuántica dada por $P(a, b) = -\cos(a - b)$, podemos desarrollar la desigualdad generalizada de Bell, obteniendo el siguiente valor en función del ángulo de rotación φ .

$$S_{MC}(\varphi) = \cos(3\varphi) - 3 \cos(\varphi), \quad (58)$$

donde la ecuación 58 puede ser graficado obteniendo el siguiente grafico (Ver figura 5)

Figura 5

Comportamiento de la desigualdad CHSH entre lo clásico y cuántico



Nota. Predicción cuántica para el teorema generalizada de Bell, las líneas rojas horizontales marcar el límite de la desigualdad entre lo clásico y lo cuántico. *Fuente: Elaborado por el Autor.*

Observando la Figura 5, podemos observar que es una generalización de la primera ecuación de Bell, con la desigualdad de CHSH se ha abandonado una correlación perfecta como inicialmente Bell lo había demostrado e incluso con la posibilidad de que los detectores Alice o Bob fallen al detectar, con esto se da pase a experimentos en laboratorios como será mencionado en el siguiente capítulo, ver programación de Python en anexo 1.

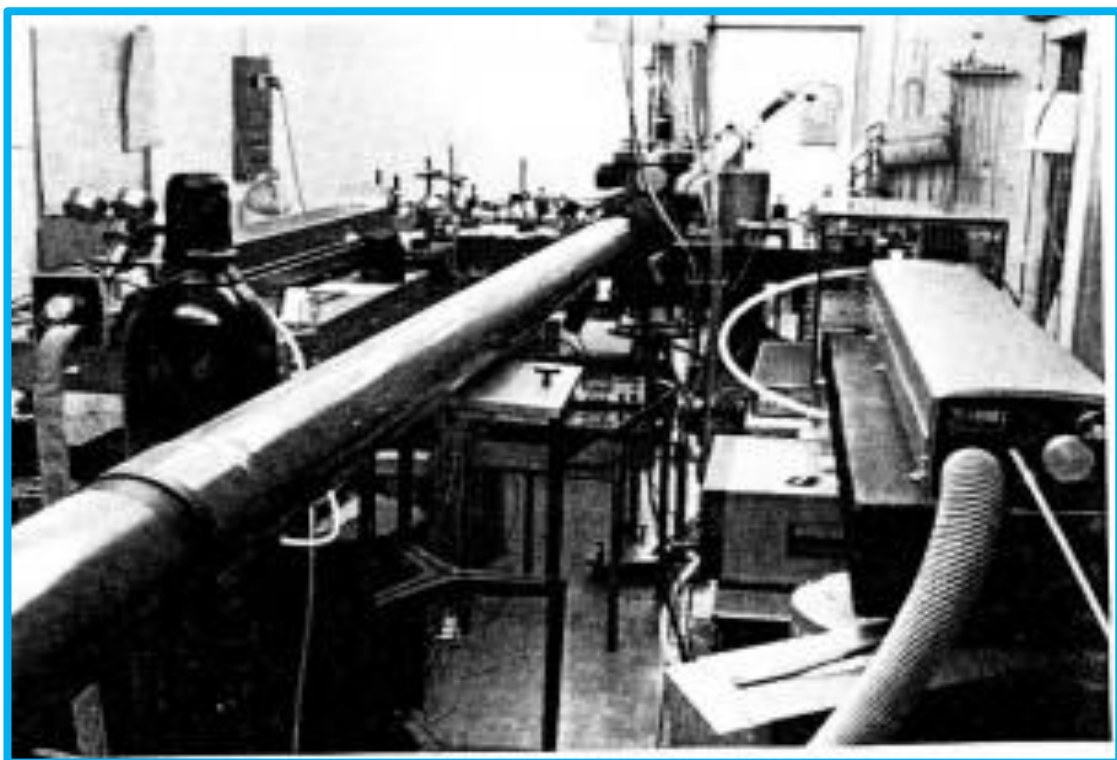
c) Veredicto experimental

Existe muchos veredictos experimentales desde la proposición de Bell en 1964, sin embargo, solo mencionaremos los experimentos desarrollados por Alain Aspect ganador del premio nobel en 2022 y colaboradores en la década de los 80, Alain Aspect tiene el mérito por haber desarrollo un experimento para medir las correlaciones de la polarización de fotones que no satisfacían las desigualdades de Bell y proporcionaron evidencias

experimentales claras sobre que la mecánica cuántica no puede ser descrito mediante teorías de variables locales, dando inicio a un sinfín de experimentos hasta la actualidad. En la figura 6 muestra el laboratorio donde Alain Aspect trabajo arduamente para demostrar que la desigualdad de Bell es violada y que las teorías de variables ocultas no podrían explicar el comportamiento de la Mecánica Cuántica.

Figura 6

Montaje experimental de Alain Aspect



Nota. Experimento de Aspect con elección retardada. **Fuente:** <https://www.fisicacuantica.es/el-experimento-de-aspect-con-eleccion-retardada/>.

III. MÉTODO

3.1. Tipo de investigación

La presente investigación es de carácter teórico, con un enfoque cuantitativo y un nivel explicativo, debido a que tiene como finalidad profundizar en la comprensión matemática de la desigualdad de Bell desde la perspectiva de la teoría de conjuntos, explicando las diferencias fundamentales entre los modelos clásicos de variables ocultas locales y las predicciones de la mecánica cuántica. En cuanto al diseño metodológico, se adopta un enfoque no experimental de tipo analítico–computacional, porque no se manipulan variables en un entorno físico real. En su lugar, se desarrollan y analizan modelos formales y simulaciones computacionales, implementadas en lenguaje Python, que permiten representar y comparar el comportamiento de sistemas clásicos y cuánticos bajo distintas configuraciones de medición.

3.2. Ámbito temporal y espacial

La presente investigación se desarrolla durante el año académico 2025, en el contexto del análisis teórico y computacional de fenómenos cuánticos desde una perspectiva interdisciplinaria. Dado su enfoque teórico y analítico–computacional, el estudio no se limita a un entorno físico o laboratorio específico, sino que se enmarca en el espacio académico de investigación universitaria, con el uso de herramientas de simulación y programación en Python para modelar distintos escenarios. En este sentido, el ámbito espacial corresponde al entorno digital y matemático desde el cual se abordan los modelos clásicos y cuánticos, permitiendo una exploración conceptual profunda de la desigualdad de Bell y su relación con la teoría de conjuntos.

3.3. Variables

Las principales variables de esta investigación teórica son:

- Configuración del sistema de medición cuántico
- Cumplimiento o violación de la desigualdad de Bell

3.4. Población y Muestra

En esta tesis de licenciatura, de carácter teórico y computacional, no considera una población conformada por sujetos humanos, dado que su objeto de estudio se centra en el análisis matemático de la desigualdad de Bell. La muestra corresponde a un subconjunto intencional y no probabilístico de dichas configuraciones, el cual incluye escenarios representativos utilizados en el estudio de la desigualdad de Bell, tales como configuraciones con dos y tres orientaciones de medición mediante filtros tipo Stern–Gerlach.

3.5. Instrumentos

Los principales instrumentos utilizados en esta investigación teórica son: La teoría de conjuntos, algebra de conjuntos, la teoría de la media del producto de dos variables, revisión bibliográfica, análisis crítico de la literatura existente, la utilización de programa de Python, para la realización de las gráficas de la simulación y finalmente una computadora para realizar dicho trabajo de investigación.

3.6. Procedimientos

El procedimiento de investigación estará dado principalmente por:

- Revisión literaria de la desigualdad de Bell.
- Revisión matemática de la teoría de conjuntos.
- Desarrollo de un marco teórico que incorpore la desigualdad de Bell en las

predicciones cuánticas y las teorías locales.

- Demostración la violación de la desigualdad de Bell mediante la teoría de conjuntos.
- Resultados y Conclusión del trabajo

3.7.Análisis de datos

El análisis de datos en esta investigación teórica tiene un enfoque en el tratamiento en los conceptos matemáticos y físicos utilizando la teoría de conjuntos, ofreciendo un enfoque matemático conceptualmente claro y para el estudio de la desigualdad de Bell.

IV. RESULTADOS

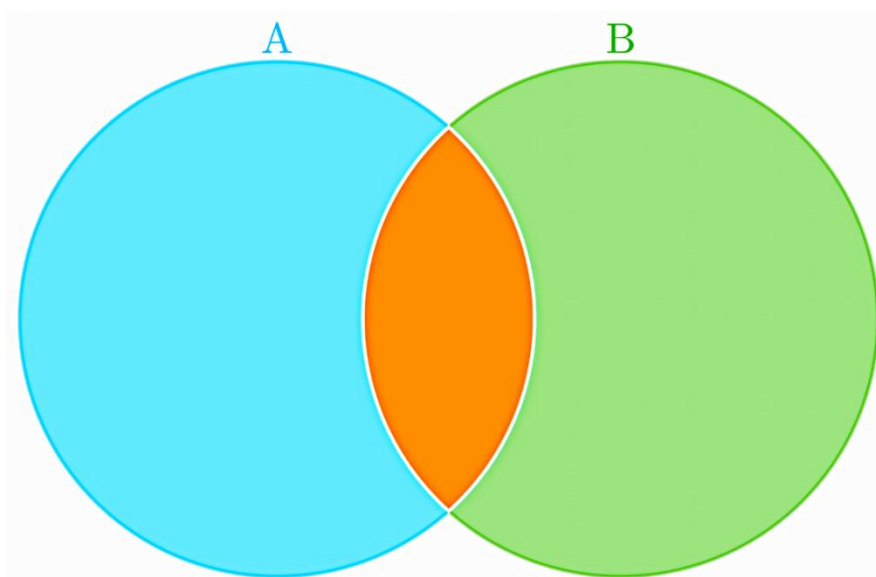
En este apartado será descrito la desigualdad de Bell mediante a partir de la teoría de conjuntos partiendo del diagrama de Venn.

a) *Diagrama de Venn*

El diagrama de Venn, es una representación gráfica que se utiliza para mostrar las relaciones entre dos o más conjuntos como es observado en la siguiente figura 7. Consiste en la superposición de completa o parcial de círculos (Cervantes y Montaña, 2016). El diagrama de Venn tiene infinidad de aplicaciones en las áreas científicas y no científicas, sin embargo, en esta tesis será implementado para comprender el comportamiento de la desigualdad de Bell.

Figura 7

Diagrama de Venn



Nota. Diagrama de Venn de dos conjuntos. *Fuente:* Elaborado por el autor.

b) *Demostración de la desigualdad de Bell*

Para poder demostrar la desigualdad de Bell utilizando la teoría de conjuntos es necesario considerar el siguiente escenario ideal.

En el año 2025, Imaginemos que un grupo de estudiantes ha ingresado a la escuela profesional de física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática como es observado en la figura 8. Estos estudiantes se encuentran en un auditorio, recibiendo por parte de los profesores una cálida bienvenida y después de una gran bienvenida realizada, los estudiantes deben salir del auditorio en forma ordenada.

Figura 8

Escenario ideal para para determinar la desigualdad de Bell



Fuente: Elaborado por el autor

En la salida de la puerta del auditorio se encuentra una bella profesional, quien será el encargado de medir la estatura (L), Cintura (C) y masa (M) solo a los estudiantes sin tomar en cuenta a los docentes presentes en el auditorio, para luego clasificarlo, mediante las siguientes características que será crucial para obtener la desigualdad de Bell.

$$L: \text{Estatura} \begin{cases} L^+; > 170 \text{ cm} \\ L^-; \leq 170 \text{ cm} \end{cases}$$

$$C: \text{Cintura} \begin{cases} C^+; > 87 \text{ cm} \\ C^-; \leq 87 \text{ cm} \end{cases}$$

$$M: \text{Masa} \begin{cases} M^+; > 80 \text{ kg} \\ M^-; \leq 80 \text{ kg} \end{cases}$$

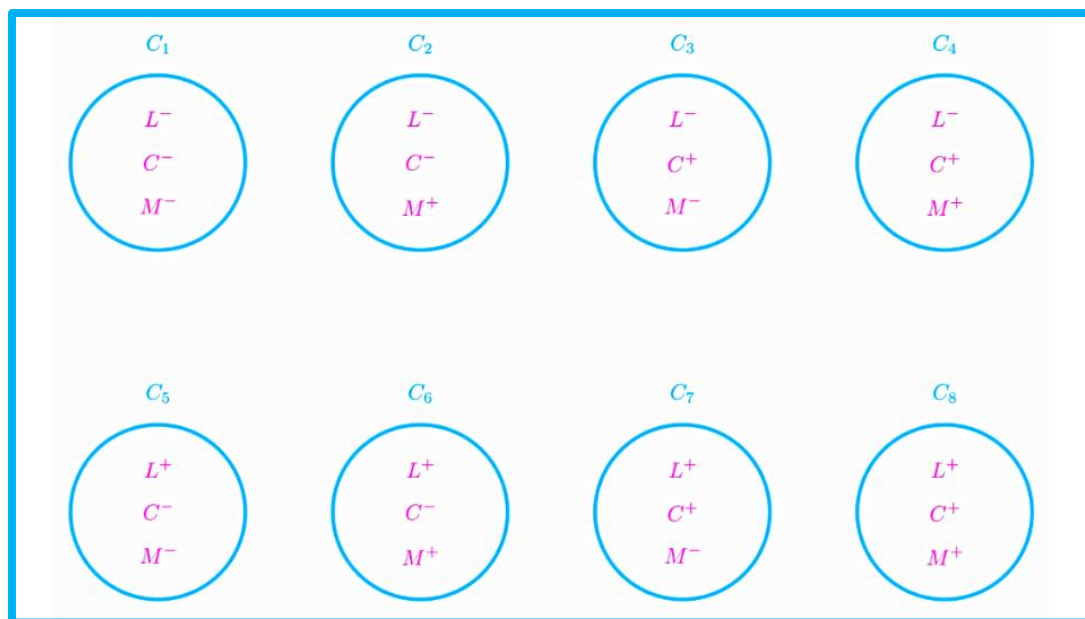
Nuestro objetivo es utilizar este escenario ideal para formular y demostrar la desigualdad de Bell empleando la teoría de conjuntos para sistemas clásicos y para sistemas cuánticos. Sin embargo, mientras el estudiante se encuentra en el auditorio se encuentra en un estado de doble posibilidad al mismo tiempo hasta no ser medido por el profesional y clasificarlos de acuerdo con su medida.

Con las medidas tomadas por el profesional encargado, el estudiante solo puede tomar un valor de cada variable por ejemplo L^+ , C^+ , M^- ó L^- , C^- , M^+ pero nunca puede tomar los dos valores al mismo tiempo después de ser medido por el profesional encargado.

Con esta información obtenida por el profesional, es posible agrupar a los alumnos en 8 conjuntos según sus características como es observado en la Figura 9.

Figura 9

Los 8 conjuntos que agrupan todas las posibles características de los estudiantes.



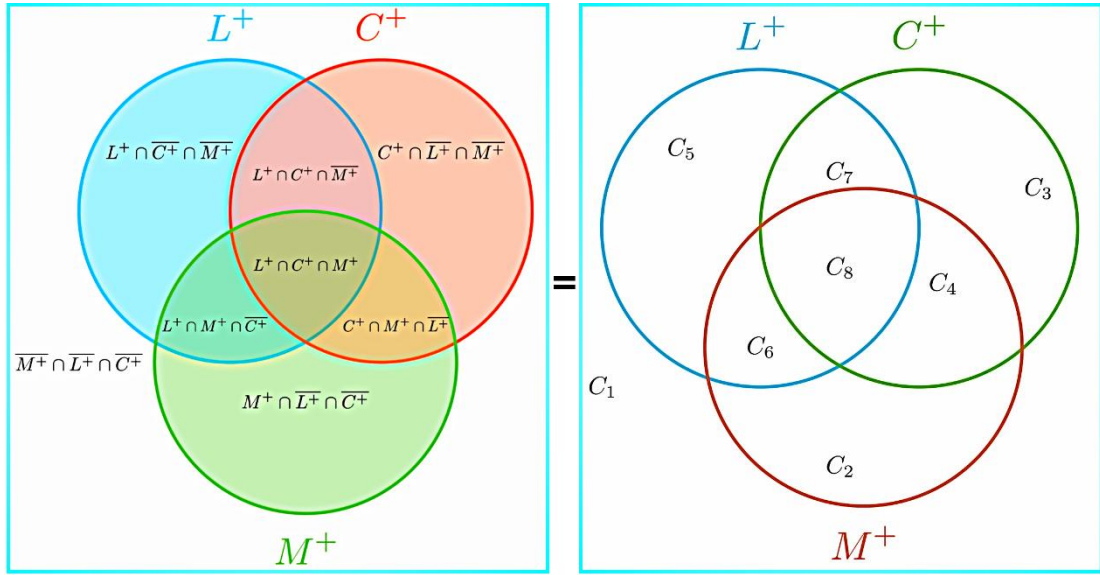
Nota. Las componentes L, C y M representa las características de cada estudiante y cada estudiante solo puede tomar un valor predeterminado definido por (+) o (-). *F uente:*

Elaborado por el autor.

De los 8 conjuntos mostrados en la figura 9, podemos generar dos diagramas de Venn con los valores positivos (+) y otra con los valores negativos (-). En esta tesis solo consideramos los valores (+) para obtener una desigualdad de Bell mediante la teoría de conjuntos utilizando el diagrama de Venn de tres conjuntos, como se muestra en la figura 10.

Figura 10

Diagrama de Venn para las proposiciones de las características positivas de los estudiantes.



Fuente: Elaborado por el autor

Al observar la figura 10, mediante el diagrama de Venn es posible agrupar los 8 conjuntos obtenidos en la figura 9, agrupando de manera independiente los datos con rasgos (+) y de manera análoga es posible agrupar los rasgos (-) mediante la teoría de conjuntos. Por ende, es posible hallar las siguientes ecuaciones para el caso de los datos positivos a partir de la Figura 10

$$\#(L^+, \overline{C^+}) = \#(L^+ \cap \overline{C^+} \cap \overline{M^+}) + \#(L^+ \cap M^+ \cap \overline{C^+}), \quad (59)$$

$$\#(C^+, \overline{M^+}) = \#(C^+ \cap \overline{L^+} \cap \overline{M^+}) + \#(L^+ \cap C^+ \cap \overline{M^+}), \quad (60)$$

$$\#(L^+, \overline{M^+}) = \#(L^+ \cap \overline{C^+} \cap \overline{M^+}) + \#(L^+ \cap C^+ \cap \overline{M^+}). \quad (61)$$

Sumando la ecuación 59 y 60, restando la ecuación 61 obtenemos la siguiente expresión

$$\#(L^+, \overline{C^+}) + \#(C^+, \overline{M^+}) - \#(L^+, \overline{M^+}) = \#(L^+ \cap M^+ \cap \overline{C^+}) + \#(C^+ \cap \overline{L^+} \cap \overline{M^+}), \quad (62)$$

donde podemos afirmar al 100% de que el número de medición de $\#(L^+ \cap M^+ \cap \overline{C^+}) + \#(C^+ \cap \overline{L^+} \cap \overline{M^+})$, puede tener cierta cantidad de alumnos o ninguna, por ende, siempre resultara ser mayor o igual a cero, entonces podemos afirmar lo siguiente

$$\#(L^+, \overline{C^+}) + \#(C^+, \overline{M^+}) - \#(L^+, \overline{M^+}) \geq 0, \quad (63)$$

despejando

$$\#(L^+, \overline{C^+}) + \#(C^+, \overline{M^+}) \geq \#(L^+, \overline{M^+}). \quad (64)$$

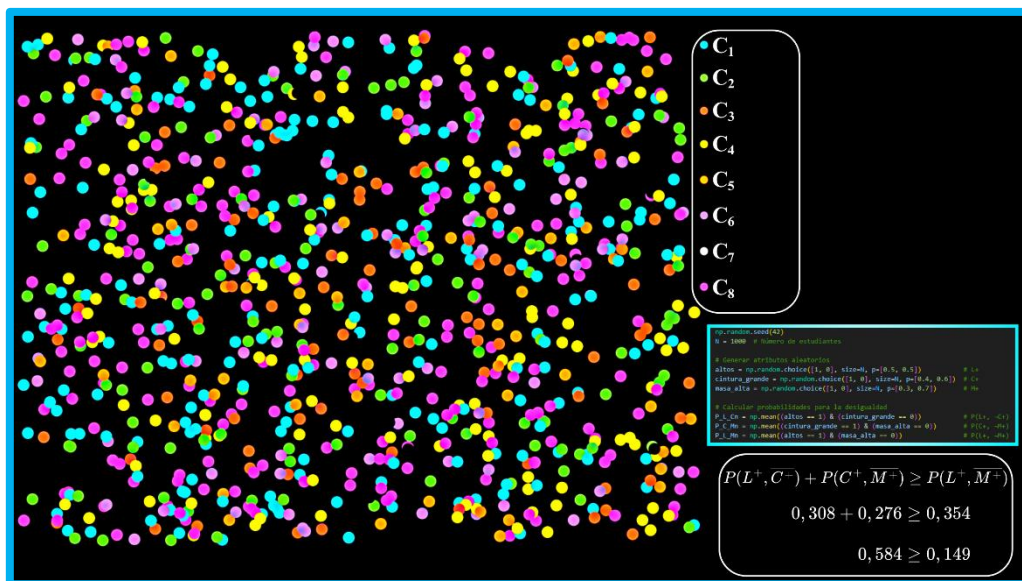
La desigualdad obtenida en la ecuación 64 representa el número de mediciones positivas realizadas a los estudiantes según sus características tomadas por el profesional. Si deseamos expresar en términos de probabilidades, dividimos entre el número total de alumnos medidos por el profesional y obteniendo la siguiente expresión

$$P(L^+, \overline{C^+}) + P(C^+, \overline{M^+}) \geq P(L^+, \overline{M^+}), \quad (65)$$

la ecuación 65 es válida para toda medición realizada en un sistema clásico. Para demostrar que se cumple en todo sistema clásico, se presenta una simulación realizada en Python, la cual generará una muestra random de 1000 alumnos que, de manera aleatoria, tomarán las características mencionadas anteriormente, como es observado en la Figura 11.

Figura 11

Simulación realizada en el programa Python para predecir que la desigualdad de Bell obtenida en la ecuación 65.



Fuente: Elaborado por el autor.

Esta simulación realizada en Python, mostrada en la Figura 11, muestra puntos de diferentes colores y que cada punto representa una característica del estudiante. Por ejemplo, si nosotros contamos los puntos celestes y dividimos entre la cantidad total de puntos obtenemos la probabilidad de obtener estudiantes solamente altos y así sucesivamente podemos obtener para el resto de las características de los estudiantes. Para una comprobación complementaria del lector, se recomienda consultar el algoritmo de Python dada en el Anexo 2. Este permite modificar los parámetros de medición y comprobar que, independientemente de los valores elegidos, la ecuación 65 se cumple consistentemente.

Sin embargo, la interrogante fundamental para el desarrollo de esta tesis es responder la siguiente pregunta: **¿satisface esta desigualdad obtenida mediante la teoría de conjuntos a los resultados predichos por la mecánica cuántica?** Para poder responder

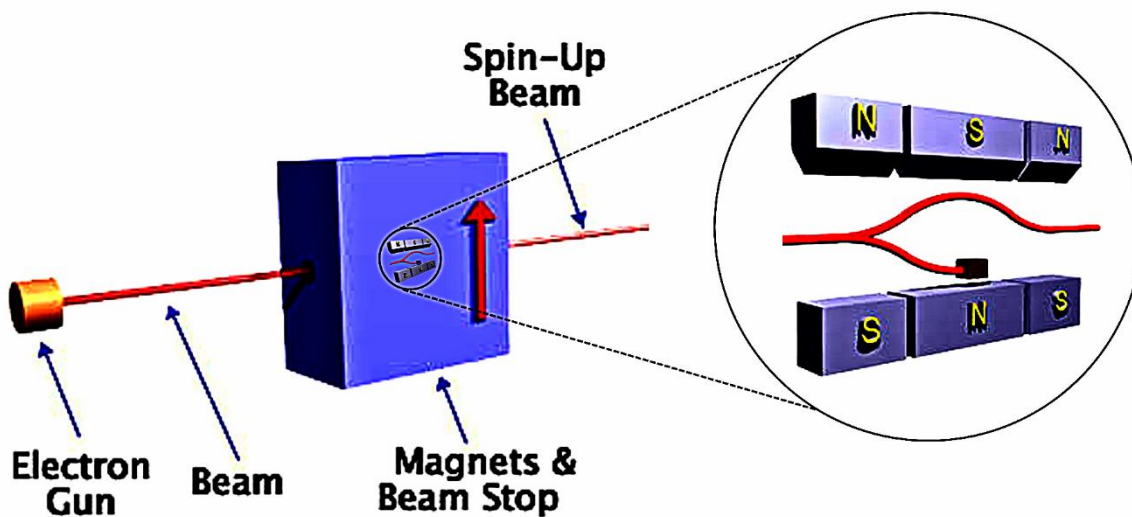
esta pregunta, se realizará un análisis utilizando un dispositivo que tendrá la función de un filtro tipo Stern-Gerlach.

c) Filtro Tipo Stern – Gerlach

En esta oportunidad, utilizaremos un dispositivo teórico que funciona como un filtro tipo Stern-Gerlach, este dispositivo se encarga de seleccionar uno de los estados del haz de electrón; específicamente, en el desarrollo de esta tesis, cumple la función de filtrar el estado del espín down. Para una comprensión más detallada del funcionamiento de este dispositivo, se recomienda al lector consultar el artículo de Harrison (2006), disponible en el sitio web de la Universidad de Toronto, este dispositivo tiene el siguiente formato propuesto por el autor como se observa en la figura 12.

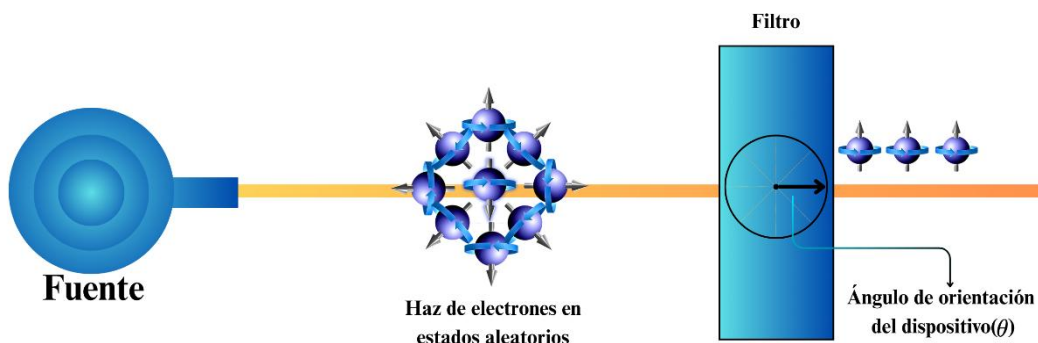
Figura 12

Modelo del dispositivo propuesto por Harrison



Fuente: Adaptado de Harrison (2006)

Sin embargo, por simplicidad en nuestra tesis vamos a considerar el siguiente formato que representaría el dispositivo propuesto por Harrison, como es observada en la siguiente Figura 13.

Figura 13*Adaptación del dispositivo de Harrison*Fuente: *Elaborado por el autor.*

La figura 13 muestra una adaptación del dispositivo propuesto por Harrison, en la cual el ángulo de inclinación se representa mediante una manecilla indicadora. Esta representación permite una mejor visualización de la orientación del filtro sin necesidad de inclinar gráficamente todo el dispositivo, facilitando así su análisis y comprensión.

Este filtro es netamente ideal, quedando su posible construcción a criterio y desarrollo de la ingeniería. En el contexto de esta tesis, se asume que dicho dispositivo cumple la función de filtrar exclusivamente el estado de espín down. El análisis correspondiente se desarrollará en el siguiente capítulo, donde se empleará este aparato teórico con el propósito de verificar la desigualdad de Bell.

d) *Predicción cuántica mediante la teoría de conjunto aplicado al spin electrónico mediante un filtro tipo Stern Gerlach*

Consideremos una situación similar al apartado anterior, sin embargo, en esta oportunidad para una fuente de electrones que emite haz de electrones con espín en direcciones aleatorias, que tiene que atravesar un dispositivo que funciona como un filtro que fue propuesto en el apartado anterior, estableciendo los siguientes parámetros L , C y M , que representa en esta oportunidad las orientaciones del filtro, para analizar el comportamiento del espín up (+) de los electrones después del filtro.

L: Filtro Orientado a 0° $\begin{cases} L^+ : \text{espín up} \\ L^- : \text{espín down} \end{cases}$

C: Filtro Orientado a 45° $\begin{cases} C^+ : \text{espín up} \\ C^- : \text{espín down} \end{cases}$

M: Filtro Orientado a 90° $\begin{cases} M^+ : \text{espín up} \\ M^- : \text{espín down} \end{cases}$

Por lo tanto, es esencial destacar que los valores de orientación del filtro propuesto para los ángulos L, C y M pueden ser modificados de manera arbitraria en función de su análisis requerido. No obstante, de acuerdo con la teoría de las variables ocultas locales, se debe cumplir la desigualdad de Bell, obtenida en la ecuación 65. En caso de que no se cumpla con dicha desigualdad, sería considerada violada, lo cual contradice los principios de esta teoría clásica. Para garantizar la consistencia de las predicciones de la mecánica cuántica y los resultados experimentales, es esencial que cada término de la desigualdad se exprese como una función de una componente asociada a cada eje de dirección. Esto es una exigencia de las reglas de la mecánica cuántica como de los resultados obtenidos mediante experimentos. Por lo tanto, al seleccionar los superíndices (+) en la ecuación 65, se obtiene la siguiente expresión, que se alinea con las predicciones esperadas y a las condiciones establecidas para el análisis de la violación de la desigualdad de Bell en el sistema cuántico.

$$P(L^+, C^+) + P(C^+, M^+) \geq P(L^+, M^+), \quad (66)$$

con el fin de analizar el comportamiento del espín electrónico y determinar si cumple o no con la desigualdad de Bell, expresada en la ecuación 66 el cual fue determinado a partir de la teoría de conjuntos, se ha elaborado un esquema experimental teórico que hace uso de dos filtros tipo Stern–Gerlach. Este esquema nos permitirá verificar si dicha desigualdad se mantiene o, por el contrario, es violada bajo las condiciones planteadas.

Sin embargo, para una evaluación detallada, se recomienda al lector consultar el libro de *Mecánica Cuántica* de Lkharev (2025), donde se presenta la expresión correspondiente a la probabilidad de encontrar el espín "up" después del segundo filtro dada por la ecuación 67.

$$P(\uparrow) = P(\theta_1, \theta_2) = \cos^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right), \quad (67)$$

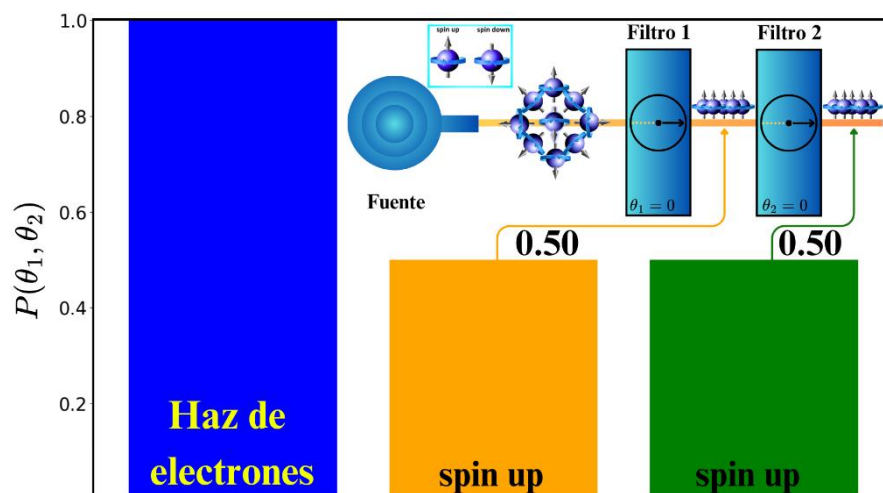
donde θ_1 es la orientación del primer filtro y θ_2 es la orientación del segundo filtro.

A continuación, se realizará un análisis de tres situaciones distintas, manteniendo en una orientación de 0° grados el primer filtro, y considerando como variable la orientación del segundo filtro, como se detalla a continuación.

Primera situación: Se insertan dos filtros en una orientación idéntica, el primer filtro y el segundo filtro orientados a 0° grados, como es ilustrado en la Figura 14. Es importante destacar que todos los electrones espín up seleccionados por el primer filtro, atraviesan sin alteraciones el segundo filtro. Este comportamiento del espín demuestra que, definido el estado de espín del primer filtro, una segunda medición en la misma orientación no proporciona información adicional ni altera la configuración cuántica del sistema.

Figura 14

Cañón de electrones con dos filtros en la misma dirección

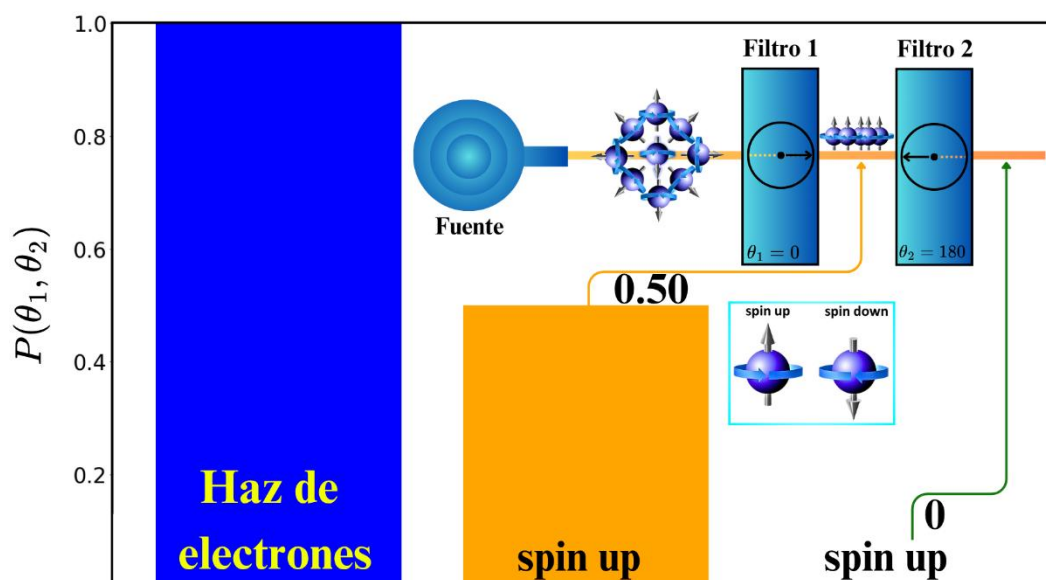


Fuente: elaborado por el autor

Segunda situación: Se insertan dos filtros en orientaciones opuestas: el primero filtro a 0° grados y el segundo filtro a 180° grados, como es observado en la Figura 15. De manera similar primer caso, el primer filtro selecciona los electrones cuyo spin está alineado con su orientación, permitiendo el paso del 50% del total emitido inicialmente. Sin embargo, al alcanzar el segundo filtro, orientado en dirección opuesta, se llega a observar que ninguno de los electrones con espín “up” logra atravesar el filtro, este resultado es coherente con las predicciones de la mecánica cuántica.

Figura 15

Cañón de electrones con dos filtros en direcciones opuestas.

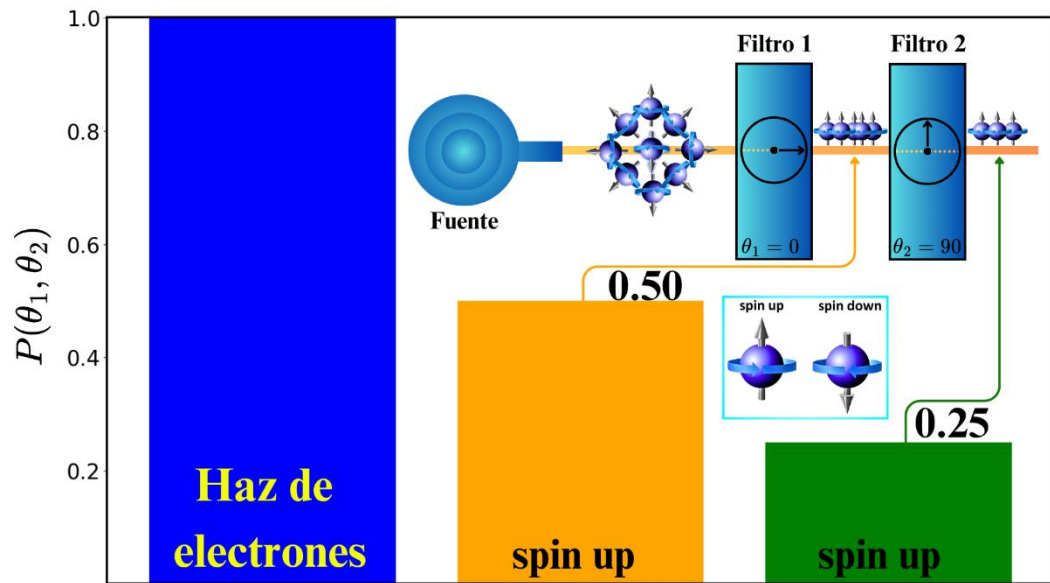


Fuente: Elaborado por el autor

Tercera situación: Se colocan dos filtros en orientación perpendicular: el primero filtro como en todas las situaciones a 0° y el segundo a 90° , como es ilustrado en la Figura 16. como en las dos situaciones anteriores mencionadas, el primer filtro selecciona el 50% de los electrones emitidos de espín “up”. Al atravesar el segundo filtro, orientado de manera perpendicular con respecto al primer filtro, se observa que solo el 25% del total inicial de electrones satisface ambas condiciones de espín “up”.

Figura 16

Cañón de electrones con dos filtros en direcciones perpendiculares.

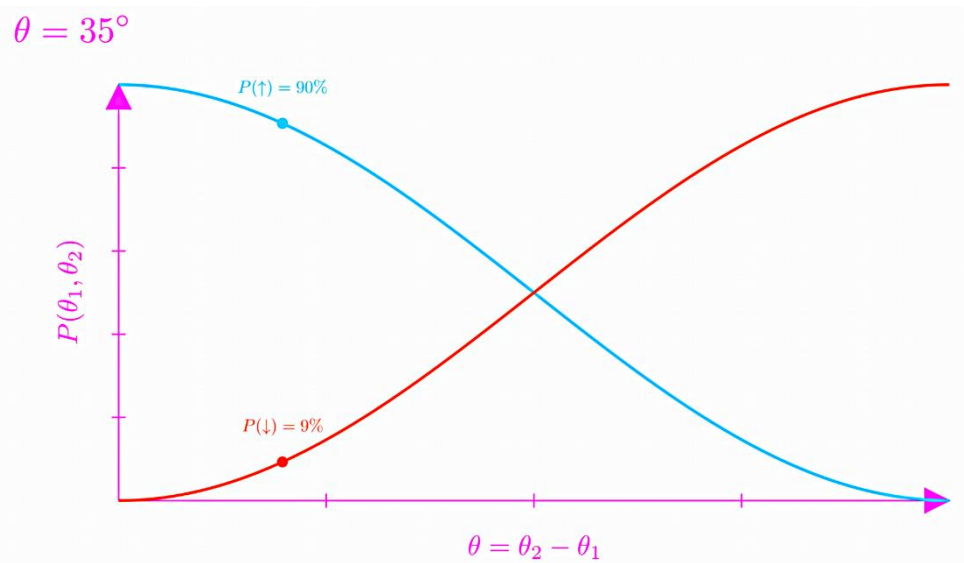


Fuente: Elaborado por el autor

A través del análisis de las tres situaciones mencionadas anteriormente, es posible generalizar y obtener el siguiente comportamiento de detección de espín “up” en la salida del segundo filtro a medida que este gire desde 0° grados a 180° grados y expresada en porcentaje (%), como es observada en la Figura 17.

Figura 17

Comportamiento para un haz de electrones con filtros tipo Stern-Gerlach



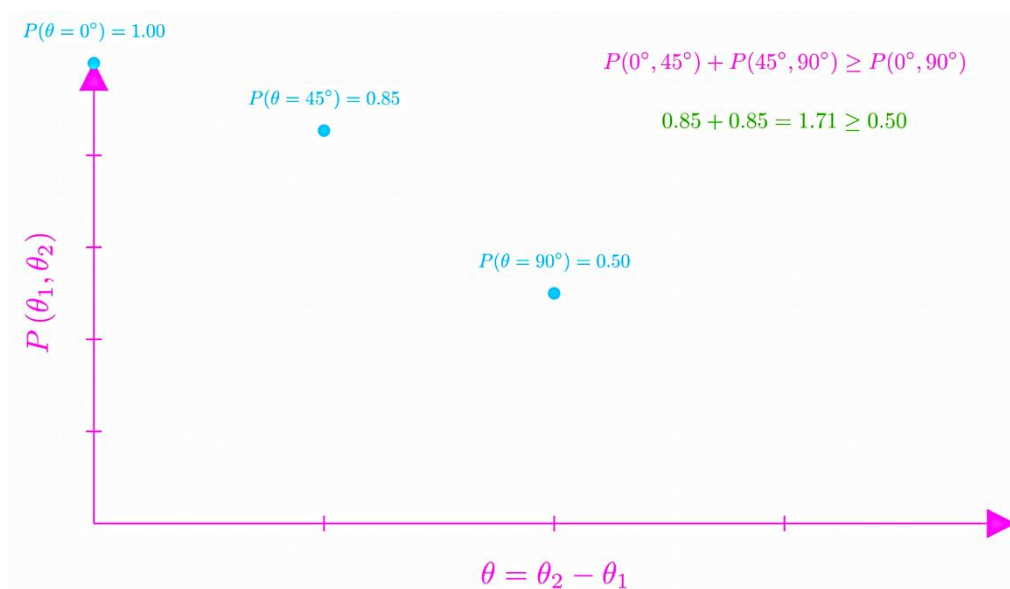
Fuente: Elaborado por el autor

Al observar la Figura 17, se puede afirmar que, a medida que el segundo filtro gira desde 0° grados a 180° grados, la probabilidad de detectar electrones con espín “up” ($P(\uparrow)$) disminuye progresivamente como podemos visualizar en la línea celeste y de manera análoga es posible determinar el comportamiento de detección del espín “down” ($P(\downarrow)$). La simulación realizada en Python (Anexo 4) nos permite comprender el comportamiento de los electrones con espín “up” medida después del segundo filtro para cualquier ángulo de orientación dada por el segundo filtro.

Para verificar si la desigualdad de Bell obtenida en la ecuación 66 mediante la teoría de conjuntos es violada, realizamos el siguiente análisis de probabilidad con los valores de orientación de ángulo relativo del filtro para 0° , 45° y 90° grados inicialmente propuestos como es observado en la Figura 18.

Figura 18

Verificación de la desigualdad de Bell



Fuente: Elaborado por el autor

Al evaluar las probabilidades obtenidas mediante simulación realizada en Python (ver anexo 5), se verifica la siguiente relación numérica:

$$1,71 \geq 0,5. \quad (68)$$

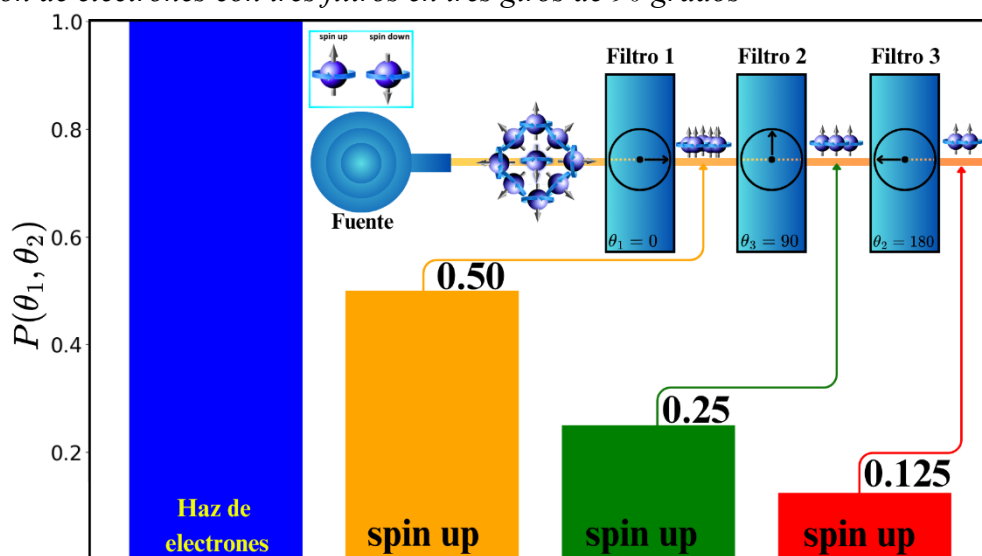
Este resultado obtenido demuestra que la desigualdad de Bell planteada en la ecuación 66 no es violada. Por el contrario, se verifica como válida, indicando que los resultados obtenidos bajo este modelo de la teoría de conjuntos son compatibles con las predicciones de la teoría clásicas. Por otro lado, se le invita al lector revisar el anexo 5 y variar los ángulos de orientación de los filtros y comprobar ello a propia investigación de corroboración.

Sin embargo, la pregunta que surge es: **¿qué ocurre si se introduce un tercer filtro? ¿El resultado permanece constante o varía significativamente?** Esta pregunta busca poner a prueba la desigualdad de Bell obtenida en la ecuación 66.

Si al introducir el tercer filtro no se observa ningún cambio en la probabilidad de detección de espín “up”, la desigualdad obtenida mediante la teoría de conjuntos se mantendría válida. No obstante, si se observa un cambio en la probabilidad de detección, implicaría una violación de la desigualdad de Bell, respaldando la interpretación dada por la mecánica cuántica. Para verificar ello se realiza la siguiente configuración teórica como es observada en la Figura 19.

Figura 19

Cañón de electrones con tres filtros en tres giros de 90 grados



Fuente: Elaborado por el autor

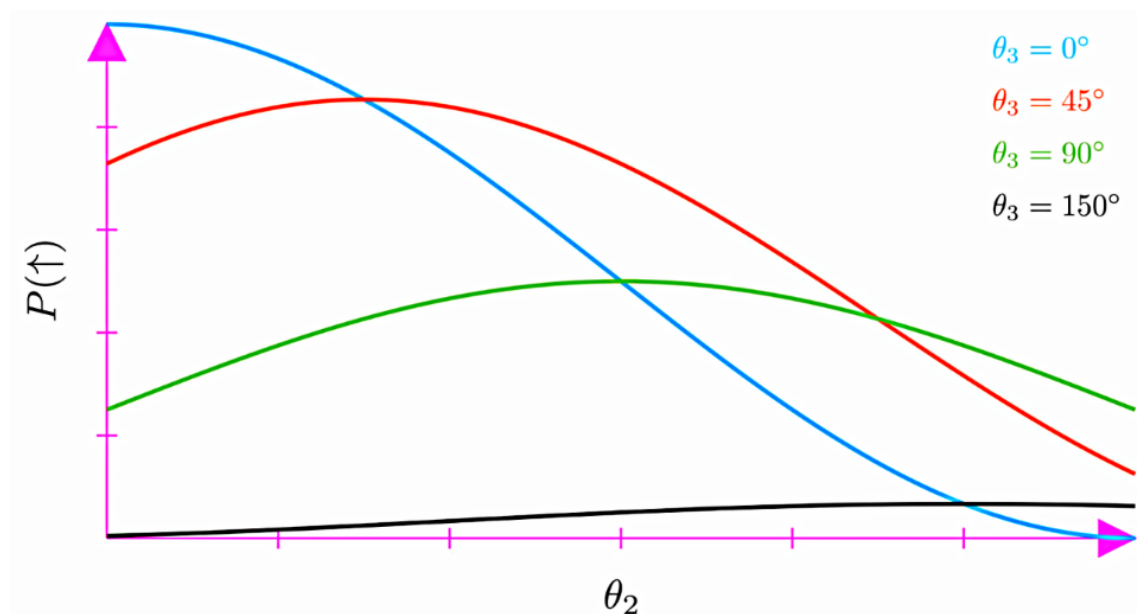
En la Figura 19, se ilustra una configuración que incorpora tres filtros colocados secuencialmente, en orientaciones de 0° , 90° y 180° grados. Esta configuración nos permite analizar la probabilidad de detección de espín “up” y compararlo con los resultados obtenidos en la Figura 15, donde se analiza el comportamiento de espín “up” para dos filtros de 0° y 180° grados, obteniendo el siguiente análisis. Al atravesar el tercer filtro, la probabilidad de detección de electrones de espín “up” es de 12,5% respecto al número inicial de electrones emitidos. Este resultado, reproducido mediante simulación realizada en Python (ver en Anexo 6), permite explorar cómo la introducción de un tercer filtro afecta la medición de probabilidad de detectar espín “up”, debido a que, si el tercer filtro orientado a 90° no estuviera, la probabilidad de detectar espín “up” sería de 0%.

Para una mejor visualización del efecto que produce la introducción de un tercer filtro, se realizó la siguiente simulación en Python y Wólffram bajo las siguientes condiciones: el primer filtro se mantiene fijo con una orientación de 0° , el tercer filtro actúa como una variable que puede tomar valores desde 0° hasta 180° , y el segundo filtro permanece estático con un valor específico. En esta simulación, se consideran tres ángulos diferentes para el tercer filtro, tal como se muestra en la figura 20 y figura 21, relacionadas por la siguiente ecuación matemática

$$P(\uparrow) = P(\theta_1, \theta_3, \theta_2) = \cos^2\left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta_2 - \theta_3}{2}\right), \quad (69)$$

Figura 20

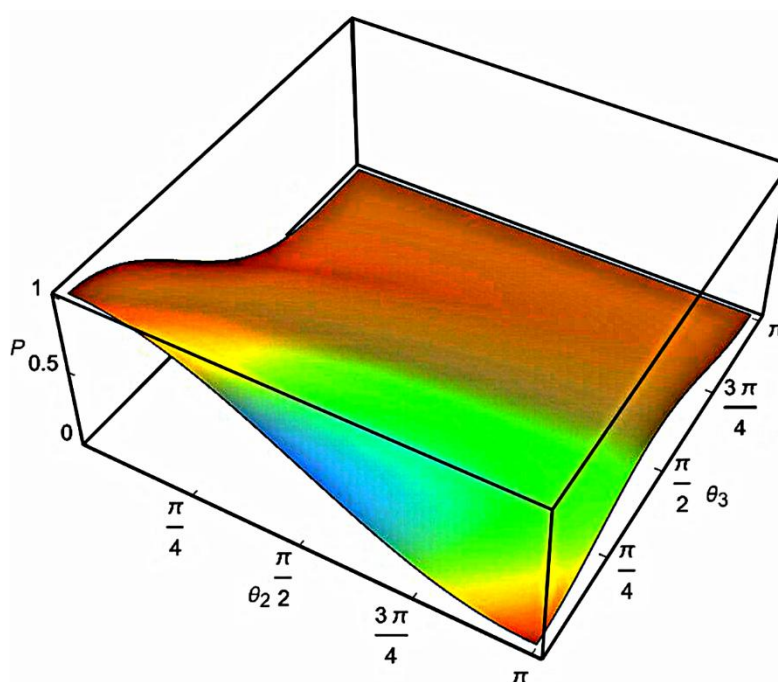
Simulación realizada en Python de cómo afecta la introducción de un tercer filtro



Nota: En la siguiente grafica se muestra una familia de curvas, donde $P(\uparrow)$ representa la probabilidad de medición del espín “up” con respecto al ángulo de giro de nuestra variable θ_2 . **Fuente:** Elaborado por el autor

Figura 21

Visualización 3D para observa el comportamiento del espín up en la salida del filtro



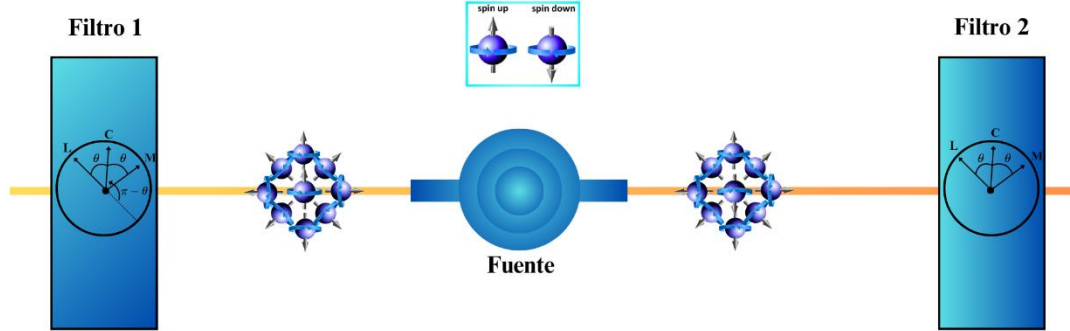
Nota: En la siguiente gráfica tridimensional se muestra el comportamiento de la probabilidad, dada por la ecuación 69, en función de los ángulos θ_2 y θ_3 (expresados en radianes), manteniendo fijo el ángulo θ_1 en 0 grados. La gráfica fue generada utilizando el programa *Wolfram Mathematica*. Fuente: *Elaborado por el autor*

Bajo estas condiciones maliciosas observadas en la figura 20 y 21, la intuición clásica es violada debido a que el filtro intermedio redefine el estado del electrón, sin embargo, no es posible aplicar directamente a la ecuación 66 esta situación de tres filtros consecutivos. Para ello realizaremos el análisis computacional para un contexto entrelazado, utilizando el mismo par de electrones EPR. En este tipo de sistema que está compuesto por dos electrones que se encuentran en una superposición perfectamente entrelazada, de modo que la medición del espín de uno de los electrones determina instantáneamente el estado del otro, independientemente de la distancia a la que se encuentren, lo que Albert Einstein lo llamo “*acción fantasmal a distancia*”.

Para verificar que la desigualdad de Bell obtenida mediante la teoría de conjuntos es violada, tomamos la condición fundamental de que los electrones emitidos por una fuente radiactiva se encuentran en un estado singlete, es decir, con espín total cero. No obstante, se introduce una variación en la configuración: cada uno de los dos filtros pueden orientarse de manera independiente en tres posibles direcciones, designadas como **L**, **C** y **M**, como pueden observar en la Figura 22.

Figura 22

Diseño teorico para estudiar el comportamiento de los electrones entrelazados utilizando dos filtros



Fuente: Elaborado por el autor

A partir de la Figura 22 es posible determinar todas las probabilidades conjuntas asociadas a la medición del espín “up”. Para un análisis más detallado y riguroso de estos resultados, se recomienda consultar el libro de Mecánica Cuántica de Likharev (2025) y la tesis de Gonzalo Abal (2007), donde se desarrollan las siguientes ecuaciones mayor profundidad

$$P(L^+, C^+) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta_{LC}}{2} \right), \quad (70)$$

$$P(C^+, M^+) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta_{CM}}{2} \right), \quad (71)$$

$$P(L^+, M^+) = \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta_{LM}}{2} \right), \quad (72)$$

donde $P(L^+, C^+)$, representa lá probabilidad de encontrar el espín “up” en la dirección unitária de **L** y **C**, respectivamente. θ_{LC} representa el angulo entre las direcciones unitárias **L** y **C**, de forma análoga, se puede definir las demás probabilidades conjuntas.

la ecuación 70, 71 y 72 remplazando en la ecuación 66, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta), \quad (73)$$

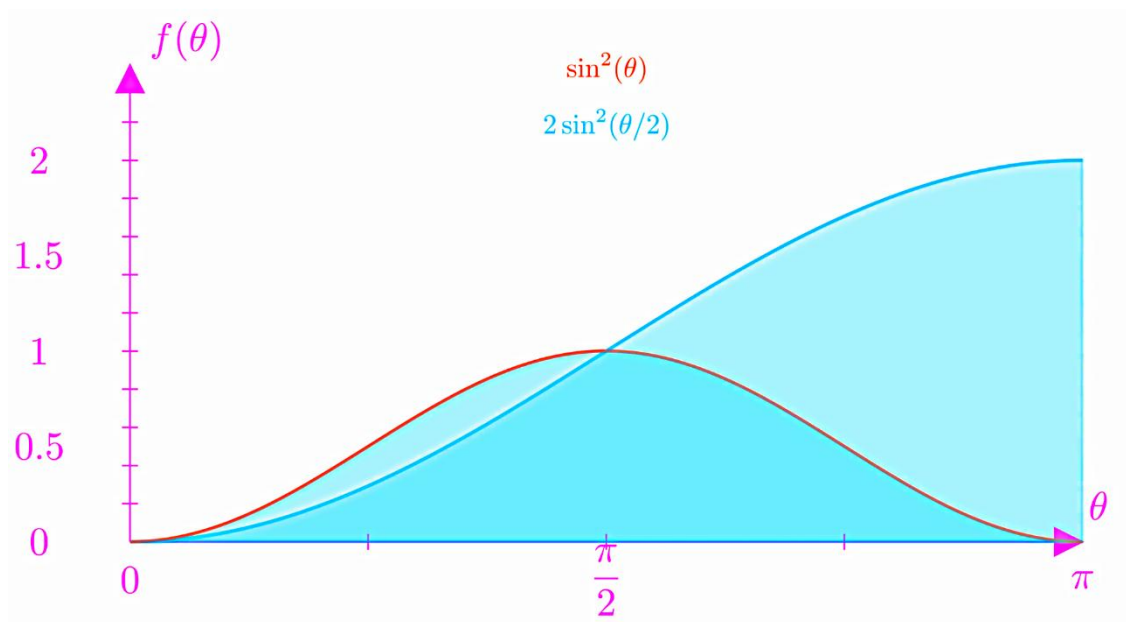
simplificando la ecuación 73 obtenemos la siguiente desigualdad

$$2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq \sin^2(\theta). \quad (74)$$

Definimos $f(\theta)$ para representar a cada una de las funciones de la desigualdad de la ecuación 74, para visualizar estas funciones utilizamos el programa Python (Ver anexo 7) como es observado en la figura 23.

Figura 23

La desigualdad de Bell es violada para ángulos relativos menor a 90°



Fuente: Elaborado por el autor

Los resultados obtenidos en la figura 23 a partir del análisis computacional muestran que la desigualdad de Bell planteada mediante la teoría de conjuntos es violada para ciertos valores específicos en un sistema cuántico. En particular, se observa una violación cuando el ángulo relativo entre las orientaciones de los filtros es menor a 90° grados. Este rango corresponde a una región donde las correlaciones cuánticas entre partículas entrelazadas superan los límites máximos establecidos por las teorías clásicas. Estos resultados refuerzan nuestra hipótesis de la tesis de que la realidad física a nivel cuántico no puede describirse completamente mediante modelos clásicos, como lo que pretendían explicar mediante su paradoja EPR, Einstein, Podolsky y Rosen.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La simulación computacional desarrollada en Python respalda el cumplimiento de la desigualdad de Bell dada por la ecuación 65 dentro de un contexto clásico. Al generar una muestra aleatoria de las características de los estudiantes, se verifica que la relación matemática se mantiene invariable, sin importar la variación de parámetros de medición. Esto sugiere que el comportamiento probabilístico observado en sistemas clásicos se ajusta a las restricciones impuestas por dicha desigualdad.

El experimento simulado, basado en la interacción de un haz de electrones con dos filtros tipo Stern–Gerlach orientados a 0° , 90° y 180° , permitió analizar la probabilidad de detección de electrones con espín “up” en función del ángulo relativo entre ambos filtros y los resultados obtenidos en la figura 18 muestran que las probabilidades encontradas no violan la desigualdad de Bell formulada en la ecuación 66. Este hallazgo es coherente con las predicciones de teorías clásicas, ya que en este escenario ideal no se han considerado estados entrelazados, los cuales son fundamentales para que se produzcan violaciones en la desigualdad de Bell.

La introducción de un tercer filtro en la configuración de nuestro sistema con filtros tipo Stern–Gerlach, orientados a 0° , 90° y 180° , revela un comportamiento que contradice la intuición clásica. Mientras que con dos filtros alineados a 0° y 180° la probabilidad de detección de espín “up” es nula, la incorporación de un filtro intermedio a 90° grados genera una probabilidad del 12,5%, demostrando que la medición intermedia redefine el estado del sistema.

Finalmente, en la Figura 22 se analiza el comportamiento de un sistema cuántico con partículas en estado entrelazado, mediante simulaciones realizadas en Python. Los resultados muestran que, para ángulos menores a 90° grados, las probabilidades obtenidas se desvían significativamente de las predicciones formuladas por teorías

clásicas. En estas condiciones, se observa una violación clara de la desigualdad de Bell planteada en la ecuación 66, lo cual constituye una evidencia a favor de la mecánica cuántica y su naturaleza no local.

VI. CONCLUSIONES

- 6.1. Utilizando la teoría de conjuntos nos permitió obtener la desigualdad de Bell bajo un marco clásico, mostrando que, en sistemas sin entrelazamiento cuántico, las correlaciones simuladas respetan dicha desigualdad.
- 6.2. Las simulaciones realizadas utilizando un haz de electrones frente a dos filtros tipo Stern–Gerlach confirmaron las predicciones clásicas, evidenciando que, sin estados entrelazados, la desigualdad de Bell permanece válida y puede interpretarse correctamente desde una perspectiva de conjuntos.
- 6.3. La introducción de un tercer filtro con orientación intermedia provocó una desviación significativa respecto a las predicciones clásicas. Este comportamiento revela que la medición intermedia redefine activamente el estado del electrón, generando efectos que no pueden ser explicados por teorías clásicas, y evidenciando el carácter contextual y no clásico de la mecánica cuántica.
- 6.4. El análisis del estado singlete de espín, también simulado en Python utilizando filtros tipo Stern Gerlach, mostró violaciones claras de la desigualdad de Bell. Estas violaciones no pueden ser justificadas por teorías clásicas, lo que constituye una evidencia sólida del carácter no local del entrelazamiento cuántico y refuerza los postulados fundamentales de la mecánica cuántica.
- 6.5. Las simulaciones desarrolladas en Python demostraron ser una herramienta eficaz para modelar, visualizar y cuantificar fenómenos cuánticos. Esta metodología no solo permitió validar los fundamentos teóricos de la física cuántica, sino que también facilitó la comprensión conceptual de fenómenos complejos como el entrelazamiento y la violación de desigualdades clásicas obtenida mediante la teoría de conjuntos.

VII. RECOMENDACIONES

Las recomendaciones necesarias para que esta tesis sea replicada para futuras investigaciones son las siguientes.

- 7.1. **Requerimientos técnicos:** Para la correcta ejecución de las simulaciones descritas en el anexo, se recomienda contar con un equipo de cómputo que disponga de al menos 4 GB de memoria RAM y una tarjeta gráfica, con el fin de evitar ralentizaciones durante el procesamiento de los algoritmos.
- 7.2. **Entorno de desarrollo:** Se sugiere realizar la implementación de los algoritmos utilizando Visual Studio Code en su versión actualizada, junto con la instalación de la librería Manim Community, debido a su facilidad de uso y versatilidad para la generación de animaciones matemáticas.
- 7.3. **Proyección de mejoras:** A partir de los algoritmos proporcionados, se recomienda que futuros investigadores desarrollen y optimicen simulaciones más avanzadas, de manera que se logren representar con mayor fidelidad escenarios relacionados con mediciones cuánticas y fenómenos asociados a la desigualdad de Bell.

VIII. REFERENCIAS

- Aspect, A. (1975). Proposed experiment to test separable hidden-variable theories. *Physics Letters A*, 54(2), 117-118. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(75\)90831-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(75)90831-2)
- Aspect, A., Grangier, P., y Roger, G. (1982). Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell's inequalities. *Physical review letters*, 49(2), 91. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.91>
- Aspect, A., Dalibard, J., y Roger, G. (1982). Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25), 1804. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.49.1804>
- Aspect, A. (1999). Bell's inequality test: more ideal than ever. *Nature*, 398(6724), 189-190. <https://doi.org/10.1038/18296>
- Aspect, A. (2015). Closing the door on Einstein and Bohr's quantum debate. *Physics*, 8, 123. <https://doi.org/10.1103/Physics.8.123>
- Abellán, C., Amaya, W., Mitrani, D., Pruneri, V., y Mitchell, M. W. (2015). Generation of fresh and pure random numbers for loophole-free Bell tests. *Physical review letters*, 115(25), 250403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250403>
- Abal, G. (2007). *Paradoja EPR y desigualdades de Bell: pruebas experimentales, estado actual del conocimiento*. [Tesis doctoral]. Universidad de la República.
- Bell, J. S. (1964). On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3), 195. <https://doi.org/10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195>
- Bell, J. S. (1995). *Atomic-cascade photons and quantum-mechanical nonlocality, High Energy Physics And Accelerators: Selected Papers Of John S Bell (With Commentary)* (pp. 782-787). https://doi.org/10.1142/9789812795854_0082

- Bell, J. S., y Aspect, A. (2004). *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics: Collected Papers on Quantum Philosophy* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511815676>
- Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., y Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 23(15), 880. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.23.880>
- Clauser, J. F., y Horne, M. A. (1974). Experimental consequences of objective local theories. *Physical review D*, 10(2), 526. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.526>
- Clauser, J. F., y Shimony, A. (1978). *Bell's theorem. Experimental tests and implications*. Reports on Progress in Physics, 41(12), 1881. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/41/12/002>
- Christensen, B. G., McCusker, K. T., Altepeter, J. B., Calkins, B., Gerrits, T., Lita, A. E., ... y Kwiat, P. G. (2013). Detection-loop-hole-free test of quantum nonlocality, and applications. *Physical review letters*, 111(13), 130406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.130406>
- d'Espagnat, B. (1979). The quantum theory and reality. *Scientific American*, 241(5), 158-181. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120650600>
- Cervantes, C. A., y Montaña, A. M. (2016). *Teoría de conjuntos: Conceptos, operaciones y propiedades*. Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales - México. <https://www.flacso.edu.mx/wp-content/uploads/2024/05/teoria-de-conjuntos.pdf>
- Einstein, A. (1916). *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. *Annalen der Physik*, 354(7), 769–822. <https://doi.org/10.1002/andp.19163540702>

- Einstein, A., Podolsky, B., y Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Physical review*, 47(10), 777.
<https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.777>
- Freedman, S. J., y Clauser, J. F. (1972). Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 28(14), 938. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.28.938>
- Fry, E. S., y Thompson, R. C. (1976). Experimental test of local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, 37(8), 465-468.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.37.465>
- Giustina, M., Mech, A., Ramelow, S., Wittmann, B., Kofler, J., Beyer, J., Lita, A., Calkins, B., Gerrits, T., Nam, S. W., Ursin, R., y Zeilinger, A. (2013). Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption. *Nature*, 497(7448), 227–230. <https://doi.org/10.1038/nature12012>
- Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to quantum mechanics* (3.^a ed.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316995433>
- Harrison, D. (2006). The Stern-Gerlach experiment, electron spin, and correlation experiments. *University of Toronto Physics Virtual Bookcase*.
<https://faraday.physics.utoronto.ca/PVB/Harrison/SternGerlach/SternGerlach.html>
- Iza, P. (2012). Mecánica cuántica: Postulados. *matemática: Una publicación del ICM – ESPOL*, 10(1).
<https://www.revistas.espol.edu.ec/index.php/matematica/article/view/517>
- Kolmogórov, A. N. (1956). *Foundations of the theory of probability*. Chelsea Publishing Company. <https://web.uni-miskolc.hu/~matgt/pdf/valseg/Kolmogorov.pdf>

- Li, M. H., Wu, C., Zhang, Y., Liu, W. Z., Bai, B., Liu, Y., ... y Pan, J. W. (2018). Test of local realism into the past without detection and locality loopholes. *Physical review letters*, 121(8), 080404. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.080404>
- Likharev, K. (2025). *Part QM: Quantum Mechanics*. En Essential Graduate Physics. Stony Brook University. <https://commons.library.stonybrook.edu/egp/4>
- Matsukevich, D. N., Maunz, P., Moehring, D. L., Olmschenk, S., y Monroe, C. (2008). Bell inequality violation with two remote atomic qubits. *Physical Review Letters*, 100(15), 150404. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.150404>
- Nielsen, M. A., y Chuang, I. L. (2010). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press. <https://pages.jh.edu/rrynasi1/HealeySeminar/literature/Nielsen+Chuang2010QuantumComputation+QuantumInformation.FirstTwoChapters.pdf>
- Nobel Prize Outreach AB. (2022). *All Nobel Prizes 2022*. NobelPrize.org. <https://www.nobelprize.org/all-nobel-prizes-2022/>
- Pinochet, J., y Rojas-Líbano, D. (2016). Una demostración simple de la desigualdad de Bell basada en la teoría elemental de conjuntos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 38, e3303. <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2016-0025>
- Pineda, L. C. M. (2012). *Principios de teleportación cuántica*. viXra. <https://vixra.org/pdf/1205.0109v1.pdf>
- Rowe, M. A., Kielpinski, D., Meyer, V., Sackett, C. A., Itano, W. M., Monroe, C., & Wineland, D. J. (2001). Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection. *Nature*, 409(6822), 791–794. <https://doi.org/10.1038/35057215>
- Reyes, L. (2005). *Mecánica cuántica, localidad y realismo: el Teorema de Bell en la filosofía de la física*. [Tesis de Maestría] Universidad Pontificia de Salamanca.

- Rosenfeld, W., Burchardt, D., Garthoff, R., Redeker, K., Ortegel, N., Rau, M., y Weinfurter, H. (2017). Event-ready Bell test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes. *Physical review letters*, 119(1), 010402. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.010402>
- Rauch, D., Handsteiner, J., Hochtainer, A., Gallicchio, J., Friedman, A. S., Leung, C., ... y Zeilinger, A. (2018). Cosmic Bell test using random measurement settings from high-redshift quasars. *Physical review letters*, 121(8), 080403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.080403>
- Shalm, L. K., Meyer-Scott, E., Christensen, B. G., Bierhorst, P., Wayne, M. A., Stevens, M. J., ... y Nam, S. W. (2015). Strong loophole-free test of local realism. *Physical review letters*, 115(25), 250402. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.115.250402>
- Sakurai, J. J., y Napolitano, J. (2011). *Modern quantum mechanics*. Cambridge University Press.
- Villegas, R. R. (2014). Entrelazamiento-Un rompecabezas cuántico para todo el mundo. *Instituto de Física, Universidad de Antioquia*.
- Weihs, G., Jennewein, T., Simon, C., Weinfurter, H., y Zeilinger, A. (1998). Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions. *Physical Review Letters*, 81(23), 5039. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5039>

IX. ANEXOS

En los siguientes anexos en formato figura se muestran los algoritmos utilizados para analizar el comportamiento de la desigualdad de Bell, frente a sistemas clásicos y cuánticos.

Anexo 1: Algoritmo de Python para para describir de forma dinámica la desigualdad de Bell generalizada CHSH.

```
from manim import *
import numpy as np

class figura5(Scene):
    def construct(self):

        # Configuración inicial de color de pantalla
        self.camera.background_color = BLACK

        # definir un color global
        color1= PINK

        # Crear ejes de coordenadas
        axes = Axes(
            x_range=[0, 2 * PI, PI / 6], # Mejor división en el eje x
            y_range=[-4, 4, 1],
            axis_config={"color": color1},
            y_axis_config={"include_numbers": True} # Numeración en el eje y
        )
        # Cambiar el color de los números del eje Y
        axes.y_axis.numbers.set_color(color1)

        #etiqueta de los ejes
        labels = axes.get_axis_labels(x_label="\varphi", y_label="S_{MC}(\varphi)").set_color(color1)

        # Definir la función a graficar
        def func(phi):
            return np.cos(3 * phi) - 3 * np.cos(phi)

        # Crear la gráfica de la función de forma animada
        graph = axes.plot(func, color=BLUE)
        graph_anim = Create(graph)

        # Crear líneas horizontales en S_{MC}(\varphi) = 2 y S_{MC}(\varphi) = -2
        line_pos = axes.get_horizontal_line(axes.c2p(2 * PI, 2), color=RED, stroke_width=2)
        line_neg = axes.get_horizontal_line(axes.c2p(2 * PI, -2), color=RED, stroke_width=2)

        # Crear un punto móvil sobre la gráficaDashedLine
        dot = Dot(color=YELLOW)
        dot.move_to(axes.c2p(0, func(0)))

        def update_dot(mob, alpha):
            phi_value = alpha * 2 * PI
            mob.move_to(axes.c2p(phi_value, func(phi_value)))

        dot_anim = UpdateFromAlphaFunc(dot, update_dot, run_time=4, rate_func=linear)

        # Etiquetas de texto
        texto_1 = Text("Sistema Cuántico", font_size=24, color=WHITE).move_to([PI/8, 2.5, 0])
        texto_2 = Text("Sistema Cuántico", font_size=24, color=WHITE).move_to([PI/8, -2.5, 0])
        texto_3 = Text("Sistema Clásico", font_size=24, color=RED).move_to([PI/8, 1, 0])
        texto_4 = MathTex(r"S_{MC}=\cos(3 \varphi) - 3 \cos(\varphi)", font_size=24, color=BLUE).move_to([PI/8, -1, 0])

        # Animaciones
        self.play(Create(axes), Write(labels))
        self.play(graph_anim)
        self.play(Create(line_pos), Create(line_neg))
        self.play(dot_anim)
        self.play(Create(texto_1), Create(texto_2), Create(texto_3), Create(texto_4))
        self.wait(2)
```

- **Anexo 2:** Algoritmo de simulación realizado para demostrar que la desigualdad obtenida en la ecuación 69 mediante las teorías de conjuntos, es satisfecha por cualquier teoría clásica.

```

from manim import *
import numpy as np

config.pixel_width = 3840
config.pixel_height = 2160
config.frame_width = 16
config.frame_height = 9

class video5(Scene):
    def construct(self):
        self.camera.background_color = BLACK

        np.random.seed(42)
        N = 1000 # Número de estudiantes

        # Generar atributos aleatorios
        altos = np.random.choice([1, 0], size=N, p=[0.5, 0.5]) # L+
        cintura_grande = np.random.choice([1, 0], size=N, p=[0.4, 0.6]) # C+
        masa_alta = np.random.choice([1, 0], size=N, p=[0.3, 0.7]) # M+

        # Calcular probabilidades para la desigualdad
        P_L_Cn = np.mean((altos == 1) & (cintura_grande == 0)) # P(L+, ~C+)
        P_C_Mn = np.mean((cintura_grande == 1) & (masa_alta == 0)) # P(C+, ~M+)
        P_L_Mn = np.mean((altos == 1) & (masa_alta == 0)) # P(L+, ~M+)

        # Crear puntos
        puntos = VGroup()
        for i in range(N):
            x = np.random.uniform(-4, 4)
            y = np.random.uniform(-2, 4)

            if altos[i] and cintura_grande[i] and masa_alta[i]:
                color = WHITE # Todas las características
            elif altos[i] and cintura_grande[i] == 0:
                color = YELLOW # Altos y sin cintura grande
            elif cintura_grande[i] and masa_alta[i] == 0:
                color = ORANGE # Cintura grande y masa normal
            elif altos[i] and masa_alta[i] == 0:
                color = PURPLE # Altos y masa normal
            elif altos[i]:
                color = BLUE # Solo altos
            elif cintura_grande[i]:
                color = GREEN # Solo cintura grande
            elif masa_alta[i]:
                color = RED # Solo masa alta
            else:
                color = PINK # Ninguna característica

            punto = Dot(point=[x, y, 0], radius=0.07, color=color)
            puntos.add(punto)

        self.play(FadeIn(puntos), run_time=3)

        # Mostrar las probabilidades en pantalla
        texto_probs = VGroup(
            MathTex(f"P(L^+, \overline{\{C^+\}}) = {P_L_Cn:.3f}", color=WHITE).shift(UP * 2.5 + LEFT * 5),
            MathTex(f"P(C^+, \overline{\{M^+\}}) = {P_C_Mn:.3f}", color=WHITE).shift(UP * 2.5),
            MathTex(f"P(L^+, \overline{\{M^+\}}) = {P_L_Mn:.3f}", color=WHITE).shift(UP * 2.5 + RIGHT * 5),
        )
        self.play(Write(texto_probs))

        # Desigualdad
        desigualdad = MathTex(
            f"{P_L_Cn:.3f} + {P_C_Mn:.3f} \geq {P_L_Mn:.3f}", color=WHITE
        ).scale(1.2).to_edge(DOWN)
        self.play(Write(desigualdad))

        self.wait(3)

        # Leyenda
        leyenda = VGroup(
            VGroup(Dot(color=BLUE), Tex("Altos", color=WHITE).next_to(Dot(color=BLUE), RIGHT, buff=0.3)),
            VGroup(Dot(color=GREEN), Tex("Cintura grande", color=WHITE).next_to(Dot(color=GREEN), RIGHT, buff=0.3)),
            VGroup(Dot(color=RED), Tex("Masa corporal alta", color=WHITE).next_to(Dot(color=RED), RIGHT, buff=0.3)),
            VGroup(Dot(color=YELLOW), Tex("Altos y sin cintura grande", color=WHITE).next_to(Dot(color=YELLOW), RIGHT, buff=0.3)),
            VGroup(Dot(color=ORANGE), Tex("Cintura grande y masa normal", color=WHITE).next_to(Dot(color=ORANGE), RIGHT, buff=0.3)),
            VGroup(Dot(color=PURPLE), Tex("Altos y masa normal", color=WHITE).next_to(Dot(color=PURPLE), RIGHT, buff=0.3)),
            VGroup(Dot(color=WHITE), Tex("Todas las características", color=WHITE).next_to(Dot(color=WHITE), RIGHT, buff=0.3)),
            VGroup(Dot(color=PINK), Tex("Ninguna característica", color=WHITE).next_to(Dot(color=PINK), RIGHT, buff=0.3)),
        ).arrange(DOWN, aligned_edge=LEFT).scale(0.6).to_corner(UR)

        self.play(FadeIn(leyenda))

```

- **Anexo 3:** Algoritmo del comportamiento del spin electrónico frente a dos polarizadores

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Probabilidad inicial
P0 = 1

# Ángulos de los filtros
angle1 = 0 # Primer filtro
angle2 = 0 # Segundo filtro (variable: 0, 90, 180)

# Probabilidad después del primer filtro
P1 = P0 / 2

# Probabilidad después del segundo filtro
P2 = P1 * np.cos(np.radians((angle2 - angle1)/2))**2

# Resultados en una grafica de barras
intensidades = [P0, P1, P2]
etiquetas = ['P0', 'spin up P1', 'spin up P2']

# Graficamos los resultados
plt.figure(figsize=(20, 12))
plt.bar(etiquetas, intensidades, color=['blue', 'orange', 'green'])
print(intensidades)

plt.ylabel('Probabilidad', fontsize=30)
plt.xticks(fontsize=25)
plt.yticks(fontsize=25)
plt.ylim(0, P0)
plt.savefig('spin_45_grados_spin_0_grados.png')
plt.show()
```

- Anexo 4: Comportamiento del filtro tipo Stern Gerlach

```

from math import *
import numpy as np

config.pixel_width = 3840 # Ancho en pixeles (4K)
config.pixel_height = 2160 # Alto en pixeles (4K)
config.frame_width = 16 # Manteniendo la relación de aspecto
config.frame_height = 9 # Manteniendo la relación de aspecto

class Figura1(Scene):
    def construct(self):
        # Configuración inicial
        self.camera.background_color = WHITE

        # Definir un color global
        color1 = BLUE

        # Gráfica del comportamiento del spin
        axes = Axes(
            x_range=[0, 100, 45],
            y_range=[0, 100, 20],
            axis_config={"color": color1},
            x_axis_config={"include_tip": True, "label_direction": DOWN},
            y_axis_config={"include_tip": True},
        )

        # Posicionar etiquetas en el centro de los ejes
        x_label = MathTex("\\theta_1(\\theta_2)\\theta_1", color=color1).scale(0.8)
        x_label.next_to(axes.c2p(50, 0), DOWN, buff=0.5)

        y_label = MathTex("\\theta_1(\\theta_2)", color=color1).scale(0.8)
        y_label.rotate(PI / 2)
        y_label.next_to(axes.c2p(0, 50), LEFT, buff=0.5)

        # Agregar todos los elementos a la escena
        self.add(axes, x_label, y_label)

        # Gráfica dinámica
        theta_values = np.linspace(0, 100, 100)
        spin_up_values = 100 * np.cos(np.radians(theta_values / 2))**2
        spin_down_values = 100 * np.sin(np.radians(theta_values / 2))**2

        spin_up_graph = axes.plot_line_graph(
            x_values=theta_values, y_values=spin_up_values, add_vertex_dots=False, line_color=BLUE
        )
        spin_down_graph = axes.plot_line_graph(
            x_values=theta_values, y_values=spin_down_values, add_vertex_dots=False, line_color=RED
        )

        # Anotaciones dinámicas para  $\theta$  y porcentajes
        theta_tracker = ValueTracker(0)
        dynamic_angle = always_redraw(lambda: MathTex(f"\\theta = {int(theta_tracker.get_value())}°", font_size=50, color=color1).to_corner(UR))
        dynamic_spin = always_redraw(lambda: MathTex(f"\\theta_1(\\theta_2) = {theta_tracker.get_value():.1f}°", font_size=50, color=color1).to_corner(UR))

        spin_up_dot = always_redraw(lambda: Dot(color=BLUE).move_to(axes.c2p(theta_tracker.get_value(), 100 * np.cos(np.radians(theta_tracker.get_value() / 2))**2)))
        spin_down_dot = always_redraw(lambda: Dot(color=RED).move_to(axes.c2p(theta_tracker.get_value(), 100 * np.sin(np.radians(theta_tracker.get_value() / 2))**2)))

        spin_up_label = always_redraw(lambda: MathTex(f"\\uparrow", font_size=30, color=BLUE).next_to(spin_up_dot, UP, buff=0.3))
        spin_down_label = always_redraw(lambda: MathTex(f"\\downarrow", font_size=30, color=RED).next_to(spin_down_dot, DOWN, buff=0.3))

        # Línea blanca cuando los dos puntos se cruzan en  $\theta = 90^\circ$ 
        crossing_line = always_redraw(lambda: DashedLine(
            start=axes.c2p(50, 0),
            end=axes.c2p(50, 100),
            color=WHITE
        ))
        if theta_tracker.get_value() >= 90 else VGroup()

        # Agregar dinámica
        self.add(dynamic_angle, spin_up_dot, spin_down_dot, spin_up_label, spin_down_label, crossing_line)

        # Animaciones
        self.play(FadeIn(spin_up_graph, spin_down_graph))
        self.play(theta_tracker.animate.set_value(100), run_time=0, rate_func=linear)
        self.wait()

```


- Anexo 5: verificación de la desigualdad de Bell

```

from manim import *
import numpy as np

config.pixel_width = 3840 # Ancho en pixeles (4K)
config.pixel_height = 2160 # Alto en pixeles (4K)
config.frame_width = 16 # Manteniendo la relación de aspecto
config.frame_height = 9 # Manteniendo la relación de aspecto

class ecuacion80(Scene):
    def construct(self):
        # Configuración inicial
        self.camera.background_color = WHITE

        # Color global
        color1=PINK

        # Ejes
        axes = Axes(
            x_range=[0, 180, 45],
            y_range=[0, 1, 0.2],
            axis_config={"color": color1},
            x_axis_config={"include_tip": True, "label_direction": DOWN},
            y_axis_config={"include_tip": True},
        )

        # Etiquetas de los ejes
        x_label = MathTex("\\theta=\\theta_2-\\theta_1", color=color1).scale(0.8)
        x_label.next_to(axes.c2p(90, 0), DOWN, buff=0.5)

        y_label = MathTex(r"P\\left( \\theta_1, \\theta_2 \\right)", color=color1).scale(0.8)
        y_label.rotate(PI / 2)
        y_label.next_to(axes.c2p(0, 0.5), LEFT, buff=0.5)

        # Agregar ejes y etiquetas
        self.add(axes, x_label, y_label)

        # Ley de Malus
        malus = lambda theta: np.cos(np.radians(theta/2))**2

        # Puntos clave
        angles = [0, 45, 90]
        probabilities = [malus(angle) for angle in angles]

        # Representación de puntos en los ángulos clave
        dots = VGroup([
            Dot(color=BLUE).move_to(axes.c2p(angle, malus(angle))) for angle in angles
        ])
        labels = VGroup([
            MathTex(f"P(\\theta={angle}\\circ)={prob:.2f}", font_size=24, color=BLUE)
            .next_to(dot, UP, buff=0.2)
            for angle, prob, dot in zip(angles, probabilities, dots)
        ])

        # Agregar puntos y etiquetas
        self.play(FadeIn(dots), Write(labels))

        # Evaluación de la desigualdad
        p_0_45 = malus(abs(0 - 45)) # Ángulo relativo entre 0° y 45°
        p_45_90 = malus(abs(45 - 90)) # Ángulo relativo entre 45° y 90°
        p_0_90 = malus(abs(0 - 90)) # Ángulo relativo entre 0° y 90°

        inequality = MathTex(
            f"P(0^\\circ, 45^\\circ) + P(45^\\circ, 90^\\circ) \\geq P(0^\\circ, 90^\\circ)",
            font_size=28,
            color=color1
        ).move_to(UP * 3+RIGHT*3)

        inequality_result = MathTex(
            f"{p_0_45:.2f} + {p_45_90:.2f} = {p_0_45 + p_45_90:.2f} \\geq {p_0_90:.2f}",
            font_size=28,
            color=GREEN if p_0_45 + p_45_90 >= p_0_90 else RED
        ).next_to(inequality, DOWN, buff=0.5)

        self.play(Write(inequality))
        self.play(Write(inequality_result))

        # Animación para verificar diferentes ángulos
        theta_1_tracker = ValueTracker(0)
        theta_2_tracker = ValueTracker(45)

        dynamic_angle = always_redraw(lambda: MathTex(
            f"\\theta_1 = {int(theta_1_tracker.get_value())}\\circ, "
            f"\\theta_2 = {int(theta_2_tracker.get_value())}\\circ",
            font_size=24, color=color1
        ).move_to(DOWN+RIGHT*3))

        def get_dynamic_inequality():
            theta_1 = theta_1_tracker.get_value()
            theta_2 = theta_2_tracker.get_value()

            p_0_dynamic = malus(theta_1 - theta_2)
            p_1_dynamic = malus(theta_2 - 90)
            p_0_90_dynamic = malus(theta_1 - 90)

            inequality_result = (
                f"P(\\theta_1, \\theta_2) + P(\\theta_2, 90^\\circ) = "
                f"{p_0_dynamic + p_1_dynamic:.2f} \\geq {p_0_90_dynamic:.2f}"
            )

            color = GREEN if p_0_dynamic + p_1_dynamic >= p_0_90_dynamic else RED
            return MathTex(inequality_result, font_size=28, color=color).next_to(dynamic_angle, DOWN, buff=0.5)

        dynamic_inequality_result = always_redraw(get_dynamic_inequality)

        self.add(dynamic_angle, dynamic_inequality_result)

        self.play(
            theta_1_tracker.animate.set_value(90),
            theta_2_tracker.animate.set_value(135),
            run_time=6,
            rate_func=linear
        )

        self.wait(2)

```

- **Anexo 6:** Comportamiento de spin electrónico frente a tres filtros tipo Stern Gerlach

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Probabilidad inicial
P0 = 1

# Ángulos de los polarizadores
angle1 = 0 # Primer filtro
angle2 = 90 # Segundo filtro
angle3 = 180 # Tercer filtro

# probabilidad después del primer filtro
P1 = (P0 / 2)

# Probabilidad después del segundo filtro
P2 = P1 * np.cos(np.radians((angle2 - angle1)/2))**2

# Probabilidad después del tercer filtro
P3 = P2 * np.cos(np.radians((angle3 - angle2)/2))**2

# Resultados de las probabilidades después de cada filtro
probabilidades = [P0, P1, P2, P3]
etiquetas = ['P0', 'spin up 1 ', 'spin up 2 ', 'spin up 3']

# Graficar los resultados
plt.figure(figsize=(20, 12))
plt.bar(etiquetas, probabilidades, color=['blue', 'orange', 'green', 'red'])

# Etiquetas de los ejes y personalización de tamaño
plt.ylabel('Probabilidad', fontsize=30)
plt.xticks(fontsize=25)
plt.yticks(fontsize=25)
plt.ylim(0, P0)

plt.savefig('spin_45_grados_spin_90_grados.png')
plt.show()

print(probabilidades)
```

- Anexo 7: La desigualdad de Bell es violada para ángulos relativos menor a 90°

```

from manim import *
import numpy as np

config.pixel_width = 3840
config.pixel_height = 2160
config.frame_width = 16
config.frame_height = 9

class ecuacion89(Scene):
    def construct(self):

        self.camera.background_color = WHITE

        # Ejes
        axes = Axes(
            x_range=[0, np.pi, np.pi/4],
            y_range=[0, 2.5, 0.2],
            axis_config={"color": PINK},
            x_axis_config={"include_tip": True, "label_direction": DOWN, "decimal_number_config": {"num_decimal_places": 0}},
            y_axis_config={"include_tip": True},
        )

        # Etiquetas del eje X (solo hasta pi)
        x_labels = VGroup(
            MathTex("0", color=PINK).move_to(axes.c2p(0, -0.2)),
            MathTex("\\frac{\\pi}{2}", color=PINK).move_to(axes.c2p(np.pi/2, -0.2)),
            MathTex("\\pi", color=PINK).move_to(axes.c2p(np.pi, -0.2))
        )

        # Etiquetas del eje Y
        y_labels = VGroup(
            MathTex("0", color=PINK).move_to(axes.c2p(-0.3, 0)),
            MathTex("0.5", color=PINK).move_to(axes.c2p(-0.3, 0.5)),
            MathTex("1", color=PINK).move_to(axes.c2p(-0.3, 1)),
            MathTex("1.5", color=PINK).move_to(axes.c2p(-0.3, 1.5)),
            MathTex("2", color=PINK).move_to(axes.c2p(-0.3, 2))
        )

        labels = axes.get_axis_labels(x_label="\\theta", y_label="f(\\theta)").set_color(PINK)

        # Gráficas
        func1 = axes.plot(lambda t: 2*np.sin(t/2)**2, x_range=[0, np.pi], color=BLUE)
        func2 = axes.plot(lambda t: np.sin(t)**2, x_range=[0, np.pi], color=RED)

        # Áreas
        intersection_area = axes.get_area(func1, [0, np.pi], bounded_graph=func2, color=BLACK, opacity=0.5)
        area_above = axes.get_area(func1, [0, np.pi], color=BLUE, opacity=0.3)
        area_below = axes.get_area(func2, [0, np.pi], color=BLUE, opacity=0.3)

        # Leyenda
        legend = VGroup(
            Tex("$2\\sin^2(\\theta/2)$", color=BLUE).scale(0.7).next_to(func1, UP),
            Tex("$\\sin^2(\\theta)$", color=RED).scale(0.7).next_to(func1, 1.2*UP, buff=0.8)
        )

        # Animaciones
        self.play(Create(axes), Write(labels))
        self.play(Create(func1), Create(func2))
        self.play(FadeIn(legend))
        self.play(FadeIn(x_labels), FadeIn(y_labels))
        self.play(FadeIn(area_above), FadeIn(area_below))
        self.play(FadeIn(intersection_area))

        self.wait(2)

```