



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**INVESTIGACIÓN DE LA CLIMATOLOGÍA DEL BOSQUE ESTACIONALMENTE
SECO EN LA COSTA NORTE DEL PERÚ UTILIZANDO DATOS IMÁGENES DE
SATÉLITES**

Línea de investigación:

Física nuclear y ambiental

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciada en Física

Autora:

Mendoza Humpire, Marili Luiza

Asesor:

Bruna Mercado, Rubén

ORCID: 0000-0002-2125-9615

Jurado:

Guzmán Calcina, Carmen Sandra

Lostaunau Melgarejo, Marco Jacinto

Velesvilla Velezvia, Twiggy Miosotty

Lima - Perú

2023



INVESTIGACIÓN DE LA CLIMATOLOGÍA DEL BOSQUE ESTACIONALMENTE SECO EN LA COSTA NORTE DEL PERÚ UTILIZANDO DATOS IMÁGENES DE SATÉLITES

INFORME DE ORIGINALIDAD

26%

INDICE DE SIMILITUD

25%

FUENTES DE INTERNET

6%

PUBLICACIONES

5%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	hdl.handle.net Fuente de Internet	4%
2	masteres.ugr.es Fuente de Internet	3%
3	mpr.aub.uni-muenchen.de Fuente de Internet	2%
4	www.dspace.espol.edu.ec Fuente de Internet	1%
5	(2-22-14) http://201.245.162.54/images/stories/articulos/series_ti Fuente de Internet	1%
6	www.coursehero.com Fuente de Internet	1%
7	repositorio.umsa.bo Fuente de Internet	1%
8	www.researchgate.net Fuente de Internet	1%



Universidad Nacional
Federico Villarreal

VRIN | VICERRECTORADO
DE INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**INVESTIGACIÓN DE LA CLIMATOLOGÍA DEL BOSQUE
ESTACIONALMENTE SECO EN LA COSTA NORTE DEL PERÚ UTILIZANDO
DATOS IMÁGENES DE SATÉLITES**

Línea de Investigación:

Física nuclear y ambiental

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciada en Física

Autora:

Mendoza Humpire, Marili Luiza

Asesor:

Bruna Mercado, Rubén

ORCID: 0000-0002-2125-9615

Jurado:

Guzmán Calcina, Carmen Sandra

Lostanau Melgarejo, Marco Jacinto

Velesvilla Velezvia, Twiggy Miosotty

Lima – Perú

2023

Dedicatoria

A Dios y a mi amada familia.

Agradecimiento

Agradezco a mi familia por apoyarme en mis estudios universitarios. Agradezco a Bruna Mercado, Rubén director de esta tesis por su diligencia al asesorarme en este proyecto. A mis amigos Michel Chocña, Jhon Guerrero y Rolando Badaracco por sus sugerencias durante el desarrollo del presente trabajo.

ÍNDICE

RESUMEN.....	1
ABSTRACT.....	2
I. INTRODUCCIÓN.....	3
1.1. Descripción y formulación del problema	3
1.2. Antecedentes	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Justificación.....	6
1.5. Hipótesis.....	7
II. MARCO TEÓRICO	8
2.1. Bases teóricas sobre el tema de investigación.....	8
2.2. Los fundamentos de la radiación electromagnética	9
2.3. El proceso de detección remota.....	10
2.4. El carácter de las ondas electromagnéticas	12
2.4.1. Definición de términos radiométricos	12
2.4.2. Albedo versus reflectancia.....	15
2.5. Espectro electromagnético: distribución de energías radiantes.....	17
2.5.1. Espectro visible.....	17
2.6. Transmisión atmosférica	19
2.6.1. Ventanas espectrales.....	21
2.6.2. Efectos atmosféricos.....	22

2.6.1.1. Dispersión atmosférica	22
2.7. Radiación solar entrante	25
2.8. Reflectancia superficial: Objetivos terrestres.....	26
2.9. Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI).....	28
2.10. Métodos multivariados.....	30
2.10.1. Espectro de potencia Lomb-Scargle	30
2.10.2. Análisis de componentes principales.....	32
2.10.3. El modelo clásico de regresión lineal	37
2.10.4. Regresión lineal multivariado.....	42
2.10.5. Modelos para series temporales estacionarias	45
2.10.5.1. Procesos Lineales Generales.	45
2.10.5.2. Procesos de media móvil.....	47
2.10.5.3. Procesos autorregresivos.	49
2.10.5.4. El modelo de media móvil autorregresiva mixta.	58
2.10.5.5. Invertibilidad.....	60
III. MÉTODO.....	62
3.1. Tipo de investigación	62
3.2. Ámbito temporal y espacial.....	63
3.3. Variables.....	64
3.4. Población y muestra	64
3.4.1. Información georreferenciada de bosques secos por el MINAM.....	65
3.5. Instrumentos	65
3.5.1. Datos de NDVI	65

3.5.2. Datos satelitales de precipitación CHIRPS	67
3.5.3. Datos in situ de precipitación SENAMHI	69
3.5.4. Datos de temperatura superficial del mar (TSM)	70
3.5.5. Reporte de sequias y eventos el Niño	71
3.6. Procedimientos	71
3.7. Análisis de datos.....	73
3.7.1. Convalidación y equiparación de los datos de precipitación in situ y satelital	73
3.7.2. Cálculo de la anomalía estandarizada de las variables	73
3.7.3. Resumen del enfoque de análisis espectral estándar	74
3.7.4. Resumen del enfoque de análisis de componentes principales	76
3.7.5. Diagrama de Hovmöller	77
3.7.6. Coeficiente de variación (CV)	77
IV: RESULTADOS.....	78
4.1. Distribución espacial promedio de NDVI.....	78
4.2. Distribución espacial promedio de precipitación	87
4.3. Relación de las series de tiempo de NDVI y precipitación en estaciones fijas.....	94
4.3.1. Precipitación in situ (SENAMHI) vs satelital (CHIRPS).....	98
4.3.2 Precipitación satelital (CHIRPS) vs NDVI (MODIS).....	99
4.3.2.1. Componente principal de NDVI y precipitación.....	104
4.4. Series de tiempo de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura superficial en la región Niño 1+2.....	106
4.4.1 Densidad espectral de potencia de NDVI del bosque seco	106
4.4.2 Densidad espectral de potencia de precipitación del bosque seco.....	107
4.4.3 Densidad espectral de temperatura superficial del mar en la región Niño 1+2.....	108

4.5. Anomalía estandarizada estacional de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura Niño 1+2	110
4.6. Modelo de regresión lineal múltiple de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura Niño 1+2	112
4.7. Correlación cruzada de NDVI, TSM y precipitación.....	114
4.8. Modelos ARIMA.....	115
4.8.1. Modelo (1)	115
4.8.2. Modelo (2)	121
4.8.3. Modelo (3)	122
4.8.4. Modelo (4)	123
V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	125
VI. CONCLUSIONES	127
VII. RECOMENDACIONES.....	129
VIII. REFERENCIAS	130
IX. ANEXOS	137
Anexo A: La región de estacionariedad para un proceso AR (2).....	138
Anexo B: La función de autocorrelación para ARMA(p,q).....	140
Anexo C: Código elaborado en GEE para la descarga y preprocesamiento del NDVI.	141
Anexo D: Código elaborado en GEE para la descarga y preprocesamiento de precipitación CHIRPS.....	145

Anexo E: Valores de NDVI, precipitación (PP) y temperatura del área Niño 1+2 (TSM) dentro de los bosques secos de la costa norte en el periodo 2003-2021.	151
---	-----

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Resumen de las ecuaciones de Maxwell en formas diferencial e integral.....	15
Tabla 2 Coordenadas de las estaciones del SENAMHI	16
Tabla 3 Correlación cruzada entre la serie de tiempo mensual de precipitación y promedio espacial de NDVI, por cada estación meteorológica (2003-2021)	17
Tabla 4 Parámetros estimados del modelo de regresión lineal múltiple con el efecto de las variables exógenas	20
Tabla 5 Correlación cruzada entre la serie de tiempo de TSM región niño 1+2, precipitación y NDVI	20
Tabla 6 Parámetros estimados del modelo (1).....	21
Tabla 7 Parámetros estimados del modelo AR(2) con el efecto de la variable exógena A_TSM.....	23
Tabla 8 Parámetros estimados del modelo AR(2) con el efecto de la variable exógena A_Precipitación	24
Tabla 9 Parámetros estimados del modelo AR(2) con el efecto de las variables exógenas. Los coeficientes β_1 y β_2 son de las variables A_TSM y A_PRE respectivamente	25

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Onda electromagnética que muestra los campos magnético y eléctrico junto con definiciones de frecuencia y longitud de onda.....	15
Figura 2 Definición de irradiancia.....	16
Figura 3 Definición de exitancia radiante.....	17
Figura 4 La definición de un ángulo sólido para la radiación entrante.....	20
Figura 5 Dispersión Lambertiana mezclada con reflexión especular.....	20
Figura 6 Espectro electromagnético.....	21
Figura 7 Espectro visible.....	23
Figura 8 Espectro de transmisión atmosférica.....	24
Figura 9 Ventanas de transmisión atmosférica y espectros de emisión solar.....	25
Figura 10 Ventanas de transmisión atmosférica (color amarillo).....	27
Figura 11 Resumen de los efectos atmosféricos sobre la radiación.....	28
Figura 12 Resumen de los mecanismos de dispersión atmosférica en función de la longitud de onda de la radiación y el parámetro de tamaño atmosférico.....	30
Figura 13 Parte superior del espectro de irradiación solar de la atmósfera fuera de la atmósfera (línea azul) en comparación con las ventanas de transmisión atmosférica (línea amarilla).....	31
Figura 14 Reflectancia de varias superficies en función de la longitud de onda.....	32
Figura 15 Espectros de reflectancia de la vegetación y del suelo.....	33

Figura 16 Índices de vegetación, basados principalmente en el contraste de reflectancia roja e infrarroja cercana de la vegetación verde.....	35
Figura 17 Región de parámetros de estacionariedad para el proceso AR(2).....	67
Figura 18 a) Mapa del vapor de agua precipitable. b) Mapa morfológico para la costa norte.....	81
Figura 19 Mapa de ubicación del bosque seco en la costa norte del Perú.....	82
Figura 20 Ubicación de las estaciones meteorológicas del SENAMHI.....	85
Figura 21 Imagen de la región Niño 1+2.....	86
Figura 22 Ubicación de las estaciones meteorológicas del SENAMHI.....	87
Figura 23 Imagen de la región Niño 1+2.....	89
Figura 24 Distribución espacial promedio de NDVI y su coeficiente de variación del bosque seco para el periodo 2003 -2021.....	98
Figura 25 Histogramas de la distribución espacial promedio estacional de NDVI en el bosque seco para el periodo 2003 -2021.....	99
Figura 26 Distribución espacial promedio estacional de NDVI del bosque seco para el periodo 2003 -2021.....	100
Figura 27 Distribución espacial promedio estacional del coeficiente de variación de NDVI del bosque seco para el periodo 2003 -2021.....	101
Figura 28 Diagrama de Hovmöller estacional del NDVI del bosque seco total para el periodo 2003 -2021.....	102

Figura 29 Diagrama de Hovmöller estacional del NDVI del bosque seco llanura para el periodo 2003 -2021.....	102
Figura 30 Diagrama de Hovmöller estacional del NDVI del bosque seco de montaña para el periodo 2003 -2021.....	103
Figura 31 Diagrama de Hovmöller interanual del NDVI del bosque seco total para el periodo 2003 -2021.....	104
Figura 32 Diagrama de Hovmöller interanual del NDVI del bosque seco de llanura para el periodo 2003 -2021.....	105
Figura 33 Diagrama de Hovmöller interanual del NDVI del bosque seco de montaña para el periodo 2003 -2021.....	106
Figura 34 Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada NDVI del bosque seco total para el periodo 2003 -2021.....	107
Figura 35 Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada NDVI del bosque seco llanura para el periodo 2003 -2021.....	108
Figura 36 Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada NDVI del bosque seco de montaña para el periodo 2003 -2021.....	109
Figura 37 Distribución espacial promedio de precipitación y su coeficiente de variación en el bosque seco para el periodo 2003 -2021.....	110
Figura 38 Distribución espacial promedio por estación de precipitación de la costa norte del Perú para el periodo 2003 -2021.....	111
Figura 39 Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021.....	112

Figura 40 Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco llanura para el periodo 2003 -2021.....	112
Figura 41 Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco de montaña para el periodo 2003 -2021.....	113
Figura 42 Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021.....	114
Figura 43 Diagramas de Hovmöller interanual de la anomalía de precipitación en el bosque seco llanura.....	114
Figura 44 Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía de precipitación en el bosque seco de montaña.....	115
Figura 45 Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021.....	116
Figura 46 Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco llanura para el periodo 2003 -2021.....	117
Figura 47 Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco de montaña para el periodo 2003 -2021.....	118
Figura 48 Serie de tiempo de precipitación de la estación meteorológica de Pizarro, Ayabaca, Lancones, Pananga, Bigote, El Tigre, Huarmaca.....	119
Figura 49 Serie de tiempo de precipitación de la estación meteorológica de Cueva Blanca, Puchaca, Jayanca, Cayalti, Reque, Lambayeque, Bernal.....	120
Figura 50 Ciclo estacional de las series de precipitación in situ ubicadas en las 14 estaciones de SENAMHI en el periodo 1981-2013.....	121

Figura 51 Ciclo estacional de las series de precipitación satelital de CHIRPS ubicadas en las 14 estaciones de SENAMHI en el periodo 1981-2013.....	121
Figura 52 Serie de tiempo del promedio mensual de las estaciones meteorológicas (azul) y serie de tiempo de promedio espacial de precipitación mensual de CHIRPS (rojo).....	122
Figura 53 Correlación de las series de tiempo de precipitación mensual de las estaciones meteorológicas y serie de tiempo de promedio espacial de precipitación mensual de CHIRPS.....	123
Figura 54 Series de tiempo de NDVI y Precipitación de la estación meteorológica de Pizarro, Ayabaca, Lancones, Pananga. Bigote, El Tigre, Huarmaca.....	125
Figura 55 Serie de tiempo de NDVI y Precipitación de la estación meteorológica de Cueva Blanca, Puchaca, Jayanca, Cayalti, Reque, Lambayeque, Bernal.....	126
Figura 56 Ciclo estacional de las series de NDVI ubicadas en las estaciones de SENAMHI en el periodo 2023-2021.....	127
Figura 57 Ciclo estacional de las series de precipitación ubicadas en las estaciones de SENAMHI en el periodo 2023-2021.....	127
Figura 58 Gráfica de la varianza explicada de las componentes principales de NDVI y precipitación.....	129
Figura 59 Series de tiempo de la primera componente principal de NDVI y Precipitación y su respectiva densidad espectral de potencia.....	130
Figura 60 Series de tiempo mensual de NDVI MODIS del bosque seco en la costa norte y sus correspondientes densidades espectrales de potencia.....	132

Figura 61 Series de tiempo mensual de precipitación satelital CHIRPS del bosque seco en la costa norte y sus correspondientes densidades espectrales de potencia.....	133
Figura 62 a) Serie de tiempo de Temperatura superficial del mar para la región Niño 1+2 y b) densidad espectral de potencia de la serie de tiempo mensual de TSM en el área Niño 1+2.....	134
Figura 63 Gráficas de anomalía estandarizada estacional de las series de tiempo mensual de NDVI en el bosque seco.....	135
Figura 64 Gráficas de anomalía estandarizada estacional de las series de tiempo mensual de precipitación en el bosque seco.....	136
Figura 65 Gráficas de anomalía estandarizada estacional de la serie de tiempo mensual de TSM en el área Niño 1+2.....	136
Figura 66 Representación de las observaciones a partir de las cuales se ha creado la superficie modelada.....	137
Figura 67 Comparación del NDVI observado y NDVI modelado mediante regresión múltiple.....	138
Figura 68 Gráfica de la correlación cruzada de serie de tiempo de anomalía estandarizada de NDVI, TSM y precipitación.....	140
Figura 69 a) ACF y b) PACF de la serie de anomalías de NDVI.....	143
Figura 70 a) Residuales estandarizados y b) ACF de los residuales.....	145
Figura 71 a) Histograma de los residuales y b) Gráfico Q-Q de los residuales. Las colas superiores están desviadas de una distribución normal.....	146

Figura 72 Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2).....	147
Figura 73 Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2) con la variable exógena de A_TSM.....	149
Figura 74 Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2) con la variable exógena de A_Precipitación.....	150
Figura 75 Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2) con las variables exógenas de precipitación y TSM.....	151
Figura 76 Gráficas de correlación entre la anomalía de NDVI observado y el NDVI simulado para los 4 modelos ARIMA.....	154

RESUMEN

El objetivo de la presente tesis es investigar y caracterizar la climatología del bosque estacionalmente seco en la costa norte del Perú, mediante el uso de datos imágenes producto NDVI del sensor MODIS a bordo del satélite TERRA y AQUA para el periodo 2003 -2021. Se usaron datos mensuales de temperatura superficial del área Niño1+2 e imágenes de precipitación y NDVI. Esta investigación es un estudio observacional retrospectivo basado en datos satelitales y datos *in-situ*. En el procesamiento se generaron mapas temáticos de distribución espacial y variabilidad temporal de NDVI y precipitación, establecemos la relación entre los parámetros NDVI, precipitación y temperatura Niño 1+2, por medio de distintos modelos (regresión múltiple, ARIMA) donde la variable dependiente es el NDVI y las variables independientes son precipitación y temperatura. Los resultados obtenidos muestran que la temperatura en la región Niño 1+ 2 tiene mayor efecto sobre la evolución del NDVI y menor efecto la precipitación en el área de bosque seco. Se estableció la mejor relación de los tres parámetros empleando la técnica de ARIMA, donde simulamos la anomalía estandarizada de NDVI (Y_t) y la anomalía de temperatura superficial del mar A(TSM) con la precipitación A(PREC) siendo el modelo autorregresivo AR(2) con variable exógena de A(TSM) ($Y_t = 0.0059 + 0.8696 * Y_{t-1} - 0.1366 * Y_{t-2} + 0.7506 * A(TSM) + e_t$) el que mejor establece la relación entre los parámetros, para el periodo 2003 -2021.

Palabras claves: Bosque seco, correlación cruzada, NDVI, precipitación, temperatura.

ABSTRACT

The objective of this thesis is to investigate and characterize the climatology of the seasonally dry forest on the northern coast of Peru, through the use of NDVI product image data from the MODIS sensor on board the TERRA and AQUA satellites for the period 2003-2021. Monthly data of surface temperature in the Niño1+2 area and images of precipitation and NDVI were used. This research is a retrospective observational study based on satellite data and in-situ data. In the processing, thematic maps of spatial distribution and temporal variability of NDVI and precipitation were generated, we established the relationship between the parameters NDVI, precipitation and temperature Child 1+2, by means of different models (multiple regression, ARIMA) where the dependent variable is the NDVI and the independent variables are precipitation and temperature. The results obtained show that temperature in the Niño 1+2 region has a greater effect on the evolution of NDVI and precipitation in the dry forest area has a lesser effect. The best relationship of the three parameters was established using the ARIMA technique, where we simulated the standardized anomaly of NDVI (Y_t) and the anomaly of sea surface temperature $A(TSM)$ with precipitation $A(PREC)$ being the autoregressive model AR(2) with exogenous variable of $A(TSM)$ ($Y_t = 0.0059 + 0.8696 * Y_{t-1} - 0.1366 * Y_{t-2} + 0.7506 * A(TSM) + e_t$) the one that best establishes the relationship between the parameters, for the period 2003-2021.

Keywords: Dry Forest, cross correlation, NDVI, precipitation, temperature.

I. INTRODUCCIÓN

El bosque seco tropical que se extiende a lo largo de la costa del Pacífico desde el suroeste de Ecuador hasta el noroeste de Perú cubre aproximadamente 64.500 km² (Bookbinder et al. 1995). Como ocurre con la mayoría de los bosques secos tropicales, la regeneración natural en la región tumbesina se ve afectada por la estacionalidad, que se caracteriza por un largo período de sequía durante 7 meses del año (Fick y Hijmans, 2017), así como por las actividades humanas, en particular el pastoreo de animales domésticos (Mendoza y Kvist, 2005). Un factor que ha demostrado determinar el establecimiento, supervivencia y desarrollo de la regeneración natural en el bosque seco es la disponibilidad de agua (Espinosa, et al., 2012; Ruthenberg, 1971), la precipitación estacional (la temporada de lluvias) tiene la mayor influencia positiva en la regeneración natural en el bosque seco (Espinosa, et al., 2012; Lieberman y Li, 1992; Cabin et al., 2000; Vieira y Scariot et al., 2006). Estos efectos se pueden atribuir a la mayor disponibilidad de agua, la descomposición acelerada de la materia orgánica (Espinosa, et al., 2012) y la mayor concentración y absorción de nutrientes que se acumulan en el suelo durante la estación seca cuando la absorción por la vegetación es menor (Roy y Singh, 1995). Es bien sabido que eventos inusuales como El Niño trae consigo grandes cambios en la atmósfera, con temperaturas que pueden superar el promedio normal en 2 °C, mientras que las precipitaciones sobre Perú y Ecuador pueden aumentar considerablemente la cobertura vegetal de las tierras secas (Trenberth, 2019).

1.1. Descripción y formulación del problema

Los bosques estacionalmente secos constituyen un ecosistema importante para el sostenimiento y desarrollo de los seres vivos en la costa norte peruana. A la fecha, no se han encontrado trabajos sobre la climatología del bosque seco para la costa norte peruana,

estudios que permitan caracterizar y determinar su comportamiento ante la variación climática.

Se cuenta con datos satelitales como el Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI) de los sistemas de adquisición de datos MODIS/TERRA y MODIS/AQUA. Esta información es fundamental para el desarrollo de la presente investigación. Por lo cual la pregunta central sería: ¿Los valores del NDVI permite establecer la climatología del bosque seco en la costa norte del Perú para el periodo 2003-2021?

1.2. Antecedentes

Los cambios en la productividad forestal se han convertido en una vía importante de los cambios forestales inducidos por el clima, según muchos estudios globales que utilizaron el NDVI se considera un indicador ecológico confiable para la salud y productividad de la vegetación (Tian et al., 2015; Yang et al., 2019). Por lo tanto, NDVI es un indicador de la salud de la vegetación ampliamente aplicado para estimar la cobertura vegetal y el verdor en todo el mundo, pero también la dinámica de la productividad de la vegetación forestal y no forestal en relación con el cambio climático (Zhao et al., 2020; Li et al., 2021).

El parámetro biofísico NDVI es de uso común para evaluar la evolución temporal de la cobertura vegetal, como el que se presenta en el Parque Nacional Cerros de Amotape y La Reserva Nacional de Tumbes (Campos y Guerrero, 2017) o en el trabajo de Gómez (2005) que evalúa las variaciones de la vegetación en toda la costa norte del Perú (Tumbes y Piura) mediante series de tiempo de NDVI y establece una relación de causalidad con el fenómeno del niño. Este fenómeno del niño tiene un alto grado de importancia sobre todo en las especies arbóreas (por ejemplo: Palo Santo y Algarrobo) del bosque seco de la costa norte del Perú, las cuales registran en los anillos de crecimiento, estos eventos del fenómeno

del niño especialmente aquellos de gran magnitud como 1982-83 y 1997-98 (Rodríguez et al., 2018). Este fenómeno del niño (por ejemplo: Niño de 1998) puede ser benéfico para el bosque seco (por ejemplo: Malinguitas-Piura) donde ha permitido una notoria aparición de cobertura vegetal en lugares donde no existía (Bravo y Rodríguez, 2003).

Los bosques secos han sufrido cambios de uso y cobertura de suelo (por ejemplo: Malinguitas-Piura) debido al incremento de la población circundante manifestándose un alto grado de disturbio de la cobertura vegetal (Bravo y Rodríguez, 2003). Otro factor de cambio distinto al antropogénico es la sequía que influye fuertemente en la actividad vegetativa de las plantas en los andes peruanos (Vega, 2019), en la costa norte la sequía afecta a todo tipo de vegetación (Rojas et al., 2008) como los bosques secos y cultivos (Melendres, 2018).

1.3. Objetivos

- *Objetivo general:*

Investigar y caracterizar la climatología del bosque estacionalmente seco en la costa norte del Perú, mediante el uso de datos imágenes producto NDVI del sensor MODIS a bordo del satélite TERRA y AQUA para el periodo 2003 -2021.

- *Objetivos específicos:*

Objetivo específico 1: Determinar el mapa climatológico provisional y de variabilidad del NDVI en la costa norte del Perú, mediante el uso de datos imágenes producto NDVI del sensor MODIS a bordo del satélite TERRA y AQUA para el periodo 2003 -2021.

Objetivo específico 2: Reducir la dimensión de los productos de NDVI manteniendo la máxima información posible y encontrar los principales patrones de variabilidad del bosque seco, mediante las componentes principales.

Objetivo específico 3: Calcular la densidad espectral de potencia (PSD) de las series de tiempo mensual de NDVI, temperatura y precipitación, mediante la Transformada de Fourier Rápida.

Objetivo específico 4: Analizar la relación entre la sequía del 2004 y el NDVI del bosque seco en la costa norte peruana para el periodo 2003 -2021.

Objetivo específico 5: Analizar la relación entre el fenómeno del niño del 2017 y el NDVI del bosque seco en la costa norte peruana para el periodo 2003 -2021.

Objetivo específico 6: Establecer la relación entre la temperatura superficial del mar en la región Niño 1+2 con la precipitación y el NDVI del bosque seco en la costa norte peruana para el periodo 2003 -2021.

1.4. Justificación

Los bosques secos han sido estudiados de forma aislada, una de otra, como se ve en los trabajos realizados por Linares Palomino (Linares, 2005), en conjunto con otros investigadores (La Torre y Linares, 2008), se basan principalmente en estudios de vegetación de los bosques estacionalmente secos en el norte peruano, así como en los trabajos actuales de (Cerna, 2021; Palacios-Ramos et al., 2022).

Esta investigación propone caracterizar la climatología del bosque estacionalmente seco en la costa norte del Perú a partir de imágenes de satélite. En este sentido, la Teledetección es una excelente herramienta que permite obtener información a distancia, a través de sensores, instrumentos susceptibles de detectar señal electromagnética que les llega de la tierra y la atmósfera para convertirla en una magnitud física que pueda ser tratada y grabada. Las imágenes de satélite ofrecen una cobertura global y periódica de la superficie terrestre con una visión panorámica y homogénea en la toma de datos (Karszenbaum, 2005).

En este contexto, sólo las imágenes satelitales constituyen una fuente potencial de datos debido a que brindan información periódica, y permiten el acceso a lugares remotos, y los datos se pueden obtener a través de la base de datos de Google Earth Engine. El uso de la información del sensoramiento remoto satelital llena el vacío de la falta de información espacio temporal ambiental, y permite estudiar el comportamiento de la vegetación mediante el NDVI como

indicador sensible a los cambios del ecosistema y a la variabilidad climática en un territorio dado. En la presente investigación se usa la información digital espacio temporal del NDVI para establecer la climatología del bosque seco en la costa norte del Perú para el periodo 2003-2021.

1.5. Hipótesis

- Hipótesis General

Puesto que varios de los satélites han registrado y continúan registrando la radiación reflejada del suelo en diferentes longitudes de onda, esto permitirá detectar cubiertas de suelo con superficie vegetal mediante el índice biofísico NDVI, para la costa norte del Perú, para un número suficiente de años continuos, es posible calcular las variaciones temporales y espaciales del bosque seco y establecer su climatología.

- Hipótesis Específica

Hipótesis específica 1: El bosque seco es afectado por eventos como sequía y el fenómeno El Niño.

Estas hipótesis son viables porque se cuenta con una base de datos digitales de imágenes satelitales, 437 imágenes satelitales producto NDVI del sensor MODIS de los satélites TERRA y AQUA, que cubre un periodo de 19 años, desde el año 2003 hasta el 2021, con una resolución espacial de 250 m x 250 m a una resolución temporal de 16 días y también con la base de datos de precipitación y temperatura superficial del mar, es posible plantear una solución al problema identificado.

II. MARCO TEÓRICO

2.1. Bases teóricas sobre el tema de investigación

James Clerk Maxwell fue el primero en postular formalmente la existencia de ondas electromagnéticas EM (*“Electromagnetic”*). Maxwell derivó una forma de onda de las ecuaciones eléctricas y magnéticas, revelando la naturaleza ondulatoria de los campos eléctricos y magnéticos y demostrando su simetría. Dado que la velocidad de las ondas EM predicha por la teoría ondulatoria coincidía con la velocidad medida de la luz, Maxwell concluyó que la luz en sí misma es una onda EM. Las ondas eléctricas y magnéticas están unidas entre sí, pero una no causa la otra. Juntos, estos campos forman una onda EM que se propaga y se desplaza hacia el espacio. Individualmente, las ecuaciones se conocen como la ley de Gauss, la ley de Gauss para el magnetismo, la ley de inducción de Faraday y la ley de Ampere con la corrección de Maxwell. Estas ecuaciones junto con la ley de fuerza de Lorentz constituyen el conjunto completo del electromagnetismo clásico. La ley de fuerza de Lorentz en realidad fue derivada por Maxwell bajo el nombre de "ecuación para la fuerza electromotriz" y fue una de un conjunto anterior de ocho ecuaciones de Maxwell. En símbolos, estas ecuaciones se dan en la Tabla 1. En 1864, Maxwell derivó la ecuación de onda EM vinculando la corriente de desplazamiento con el campo eléctrico variable en el tiempo asociado con la inducción EM, vinculando así algunas ideas anteriores. Comentó que “la luz y el magnetismo son afecciones de la misma sustancia, y que la luz es una perturbación electromagnética que se propaga a través del campo según las leyes electromagnéticas”. Hoy en día, esta teoría se ha adaptado a la propagación de la luz en el vacío, donde se pueden tener ondas estables y auto perturbables de campos eléctricos y magnéticos oscilantes que se impulsan entre sí. La velocidad calculada para la radiación EM coincide exactamente con la velocidad de la luz, ya que la luz es, de hecho, una forma de radiación EM que une los dos campos del electromagnetismo y la óptica (Emery y Camps, 2017).

Tabla 1

Resumen de las ecuaciones de Maxwell en formas diferencial e integral.

Nombre	Forma diferencial	Forma integral
Ley de Gauss	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\oiint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$ (2.1)
Ley de Gauss para el magnetismo	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$ (2.2)
Ecuación de Maxwell Faraday (ley de inducción de Faraday)	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial Q_{B,S}}{\partial t}$ (2.3)
Ley circuital de Ampere (con corrección de Maxwell)	$\nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_{E,S}}{\partial t}$ (2.4)

Nota. Tomado de (Emery y Camps, 2017)

2.2. Los fundamentos de la radiación electromagnética

La radiación EM es una forma de energía con las propiedades de una onda. Las ondas EM se propagan a través del tiempo y el espacio de una manera similar a las ondas generadas en el agua, pero (a excepción de la luz polarizada) oscilan en todas las direcciones perpendiculares a su dirección de viaje (el frente de onda de una onda transversal). Tal onda se caracteriza por dos medidas principales: longitud de onda y frecuencia (o período). La longitud de onda (λ) es la distancia entre dos crestas sucesivas de las ondas. La frecuencia (ν o f) es el número de oscilaciones (ciclos) completados por período de 1 s. El periodo (T) de la onda es $T = 1/f$ con la frecuencia f en ciclos/s. En el vacío, las ondas EM viajan a una velocidad constante c , la velocidad de la luz ($c = 299\,792\,458$ m/s), que es el producto de la frecuencia y la longitud de onda:

$$\lambda \cdot \nu \approx 300.000 \text{ km/s} \quad (2.5)$$

por lo que la frecuencia y la longitud de onda son inversamente proporcionales entre sí para una onda EM. Estas relaciones se muestran aquí en la Figura 2.1. Se observa en la Figura 2.1 que los campos eléctrico y magnético están en fase y en orientación perpendicular entre sí. Ambas son ondas transversales con la misma frecuencia de onda y longitud de onda (Emery y Camps, 2017).

2.3. El proceso de detección remota

La base subyacente para la mayoría de los métodos y sistemas de detección remota es simplemente medir los niveles variables de energía y/o frecuencia de una sola entidad, la unidad fundamental en el campo de fuerza EM conocido como fotón. Como se mostrará más adelante, las variaciones en las energías de los fotones están ligadas a la longitud de onda del parámetro o su frecuencia inversa. La radiación de partes específicas del espectro EM contiene fotones de diferentes longitudes de onda cuyos niveles de energía caen dentro de un rango discreto de valores. Cuando cualquier material objetivo es excitado por procesos internos o por la interacción con la radiación EM entrante, emite fotones de diferentes longitudes de onda cuyas cantidades radiométricas difieren en diferentes longitudes de onda de una manera que puede usarse para identificar el material. Los fotones también pueden introducirse por reflexión y absorción. La energía de los fotones recibida en los detectores se expresa comúnmente en unidades de potencia, como vatios por metro cuadrado por unidad de longitud de onda ($\text{W/m}^2 \mu\text{m}$). El gráfico de variación de la potencia con la longitud de onda da lugar a un patrón o curva específica que es la *firma espectral* de la sustancia o característica que se detecta. El fotón es la forma física de un cuanto, la partícula básica de la Mecánica Cuántica, la parte de la Física que se ocupa de lo muy pequeño, a niveles atómicos y subatómicos.

También se describe como la partícula mensajera de la fuerza EM o como el haz de luz más pequeño. Esta partícula subatómica sin masa contiene radiación reflejada, absorbida o

emitida por la materia cuando se excita térmicamente, o por procesos nucleares (fusión, fisión), o por bombardeo con otra radiación. Los fotones se mueven a la velocidad de la luz como ondas y, por lo tanto, tienen una naturaleza "*dual*". Estas ondas siguen un patrón que describimos en términos de una función sinusoidal (trigonométrica), como se muestra en dos dimensiones en la Figura 1.

Se dice que un fotón está cuantizado, en el sentido de que cualquier fotón posee una determinada cantidad de energía. Algunos otros fotones pueden tener un valor de energía diferente. Los fotones como cuantos muestran una amplia gama de energías discretas. La cantidad de energía que caracteriza a un fotón se determina utilizando la ecuación general de Planck:

$$E = h \cdot \nu \quad (2.6)$$

donde h es la constante de Planck ($h = 6.62607 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) y ν representa la frecuencia. Los fotones que viajan a frecuencias más altas son, por lo tanto, más energéticos. Si un electrón experimenta un cambio en el nivel de energía de un nivel superior E_2 a un nivel inferior E_1 , se emite un fotón a una frecuencia dada por:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = h \cdot \nu \quad (2.7)$$

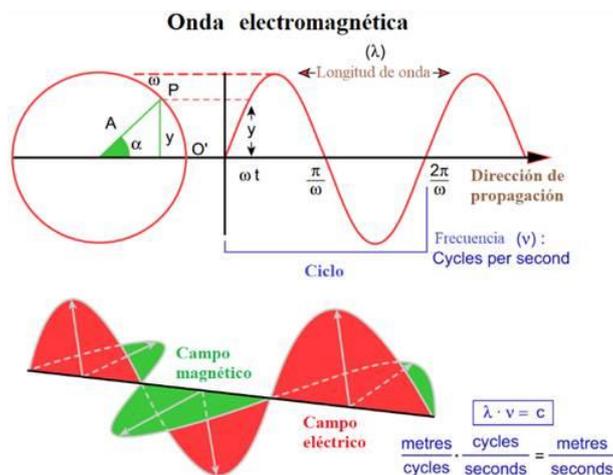
Alternativamente, el paso de un electrón de E_1 a E_2 requiere la absorción de un fotón donde ν tiene algún valor discreto determinado por $\nu_2 - \nu_1 = E_2 - E_1/h$. En otras palabras, un cambio de energía particular se caracteriza por emitir radiación (fotones) a una frecuencia específica ν y una correspondiente longitud de onda en un valor que depende de la magnitud del cambio de energía. La distribución de todas las energías de los fotones en el rango de frecuencias observadas está incluida en el término espectro (Emery y Camps, 2017).

Un fotón con algún nivel de energía específico ocupa una posición en algún lugar dentro de este rango, es decir, se encuentra en algún punto específico del espectro. La detección remota del color es un ejemplo particular del proceso de detección remota ya que estas longitudes de

onda están restringidas a la pequeña porción del espectro EM que contiene las bandas visibles (Figura 2). Toda esta radiación es radiación reflejada excitada por la radiación solar entrante como se indica en la Figura 3 (Emery y Camps, 2017).

Figura 1

Onda electromagnética que muestra los campos magnético y eléctrico junto con definiciones de frecuencia y longitud de onda.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017).

2.4. El carácter de las ondas electromagnéticas

2.4.1. Definición de términos radiométricos

La energía radiante (Q), es transferida como fotones, es emanada en ráfagas cortas (trenes de ondas) desde una fuente en un estado excitado. Esta corriente de fotones se mueve a lo largo de líneas de flujo (también llamadas rayos) como un flujo (ϕ), que se define como la velocidad temporal a la que la energía Q pasa por una referencia espacial (dQ/dt). El concepto de flujo está relacionado con el de potencia, definido como la tasa temporal de hacer trabajo o gastar energía. La naturaleza del trabajo que se puede realizar es una combinación de estos: cambios en el movimiento de partículas sobre las que actúan campos de fuerza; calefacción; cambio de estado físico o químico. Dependiendo de las circunstancias, la energía que se propaga desde una fuente puntual puede estar limitada a una dirección específica (un haz) o

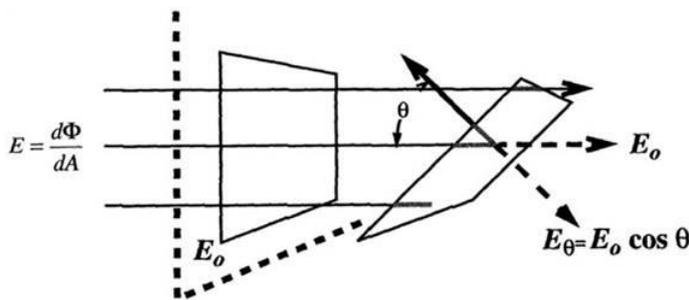
puede dispersarse en diferentes direcciones. La densidad de flujo radiante es la potencia por unidad de superficie (W/m^2), la densidad de flujo es proporcional a los cuadrados de las amplitudes de las ondas componentes. La densidad de flujo aplicada a la radiación procedente de una fuente externa a la superficie de un cuerpo se denomina irradiancia (E); si el flujo sale de ese cuerpo; su nomenclatura es exitancia (M). Matemáticamente, la irradiancia se puede escribir como (Emery y Camps, 2017):

$$E(x, y) = \frac{d\Phi}{dA} (W/m^2) \quad (2.8)$$

y representar en la Figura 2.

Figura 2

Definición de irradiancia.



Nota. Tomado de (Schott, 2007).

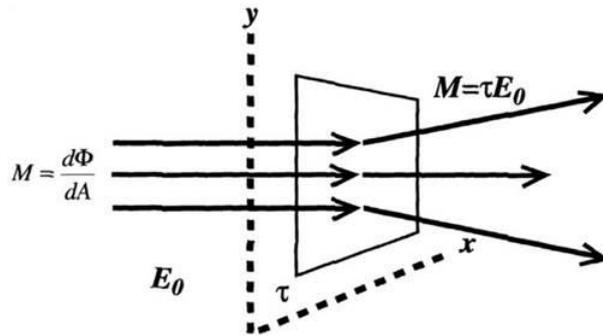
La exitancia radiante es el flujo por unidad de área radiada, transmitida o reflejada por una superficie y se puede escribir matemáticamente como

$$M(x, y) = \frac{d\Phi}{dA} (W/m^2) \quad (2.9)$$

y se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Definición de exitancia radiante.



Nota. Tomado de (Schott, 2007).

La *intensidad radiante* está definida por el flujo radiante por unidad de ángulo sólido (Figura 4) en estereorradianes (sr). Por lo tanto, la intensidad radiante es la potencia por unidad de ángulo sólido y se expresa en (W/sr) y se indica con el símbolo I . Así, para una superficie a una distancia R de una fuente puntual, la intensidad radiante I es el flujo Φ [W/m^2] que fluye a través de un cono de ángulo sólido U hacia el área A , a una distancia R , está dada por $I = \Phi/(A/R^2)$. Se tiene en cuenta que la radiación se mueve en alguna dirección o camino en relación con una línea de referencia definida por el ángulo θ . La intensidad radiante se puede escribir como:

$$I(\theta, \varphi) = \frac{d\Phi}{dA} [W/m^2] \quad (2.10)$$

y se muestra gráficamente en la Figura 4. A partir de esto, se puede derivar una entidad de radiación EM fundamental conocida como *radiancia* (comúnmente denotada " L "). La radiancia se define como el flujo radiante por unidad de ángulo sólido que sale de una fuente extendida (de área A) en una dirección dada por unidad de superficie proyectada en esa dirección [$W/(m^2 \text{ sr})$].

$$L(x, y, \theta, \varphi) = \frac{d^2\Phi}{dA \cdot d\Omega \cdot \cos\theta} = \frac{dE}{d\Omega \cdot \cos\theta} = \frac{dM}{d\Omega \cdot \cos\theta} [W/sr \text{ m}^2] \quad (2.11)$$

La radiancia está estrechamente relacionada con el concepto de brillo asociado con los cuerpos luminosos. Las magnitudes realmente medidas por los detectores de teledetección son las radiancias a diferentes longitudes de onda que dejan áreas extendidas (que pueden “reducirse” a fuentes puntuales bajo ciertas condiciones). Los flujos radiantes que salen de las

fuentes (origen interno) se denominan exitancia radiante (M) o, a veces, "emitancia" (ahora obsoleta). Los flujos radiantes que alcanzan o "brillan sobre" cualquier superficie (origen externo) se denominan irradiancia. Así, el Sol, una fuente, irradia la atmósfera y la superficie de la Tierra. Las cantidades radiométricas anteriores Q , Φ , I , E , L y M se aplican a todo el espectro EM (Emery y Camps, 2017).

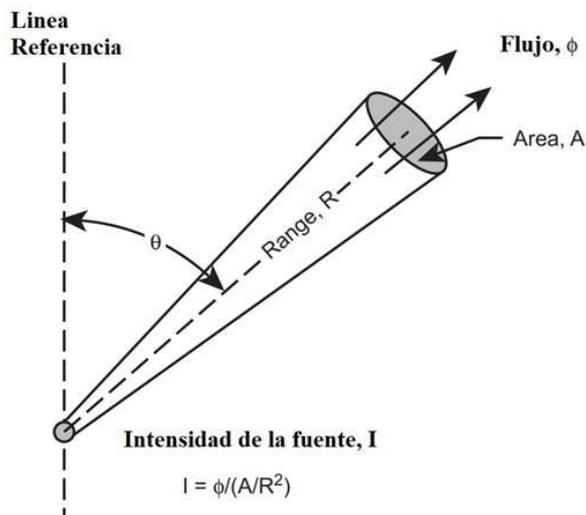
2.4.2. Albedo versus reflectancia

Es importante discriminar entre "albedo" y reflectancia. El primero se define como la relación entre la cantidad de energía EM reflejada por una superficie y la cantidad de energía que incide sobre ella. Se diferencia de la "reflectancia espectral" ya que el albedo generalmente se promedia en el rango visible del espectro EM, mientras que la reflectancia espectral se aplica sólo a una región específica del espectro EM. Originalmente, el albedo (derivado del latín albedo o blancura) se refiere a la luz solar reflejada que contiene una gama completa de longitudes de onda. Entonces, a menos que el albedo esté restringido a alguna longitud de onda en particular, se refiere a algún promedio en el rango de longitud de onda de la luz visible. El albedo también depende de la distribución direccional de la radiación incidente con la excepción de las superficies Lambertianas, que por su naturaleza dispersan la radiación en todas las direcciones y por lo tanto tienen un albedo que es independiente del ángulo de incidencia de la irradiación. Para otras superficies, es más apropiado especificar una función de distribución de reflectancia bidireccional BDRF ("*Bidirectional reflectance distribution function*") para caracterizar con precisión las propiedades de dispersión de una superficie. Sin embargo, es común usar el albedo como una primera aproximación a la dispersión. La reflectancia es la fracción de la radiación EM incidente que se refleja en una superficie. Esto contrasta con la reflectividad, que es una propiedad del propio material de la superficie. La reflectancia espectral es un gráfico de la reflectancia en función de la longitud de onda. La reflectividad es una propiedad direccional y la mayoría de las superficies se pueden dividir en

aquellas que dan reflexión especular y aquellas que dan reflexión difusa. Para una superficie especular como un vidrio o un metal, la reflectividad será casi cero para todos los ángulos excepto para los normales a la superficie. Para superficies difusas como la pintura blanca plana, la reflectividad es uniforme y la radiación se refleja en todos los ángulos por igual o casi por igual. Se dice que tales superficies son Lambertianas. Pocas superficies son únicamente lambertianas o especulares y, en cambio, tienen una combinación de estas propiedades (Figura 5) (Emery y Camps, 2017).

Figura 4

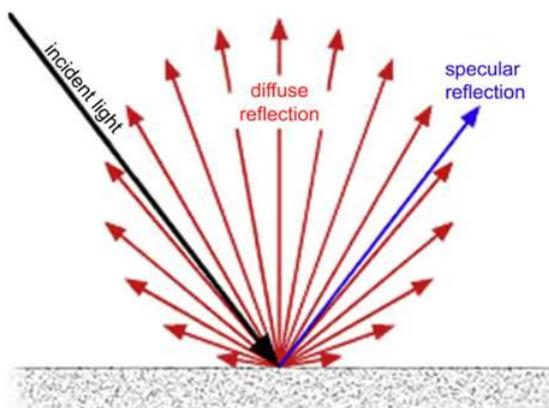
La definición de un ángulo sólido para la radiación entrante.



Nota. Adaptado de Emery y Camps (2017).

Figura 5

Dispersión Lambertiana mezclada con reflexión especular.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017).

2.5. Espectro electromagnético: distribución de energías radiantes

Como se señaló anteriormente, la radiación electromagnética EMR (*“Electromagnetic Radiation”*) se extiende sobre una amplia gama de energías y longitudes de onda (frecuencias). Un rango estrecho de EMR que se extiende de 0,4 a 0,7 μm , el intervalo detectado por el ojo humano, se conoce como región visible (también conocida como luz visible, pero los físicos a menudo usan ese término para incluir radiación más allá de lo visible). La luz blanca contiene una mezcla de todas las longitudes de onda en la región visible. La distribución continua de todas las energías radiantes se puede trazar en función de la longitud de onda o de la frecuencia en un gráfico conocido como el espectro electromagnético (Figura 6) (Emery y Camps, 2017).

El gráfico espectral EM de la Figura 6 también indica los mecanismos atómicos o moleculares para formar estos diferentes tipos de radiación; también representa los rangos espectrales cubiertos por muchos de los detectores sistemas de uso común en la actualidad. Esta figura 6 indica que la EMR, es decir, la liberación de fotones, se produce de diversas formas. La mayoría involucra acciones dentro de la estructura electrónica de los átomos o en los movimientos de los átomos dentro de las estructuras moleculares (según lo afectado por el tipo de enlace). La física fundamental implica cambiar la dirección y/o la magnitud de los campos eléctricos y magnéticos en la fuente de la EMR en intervalos de tiempo cortos. Un mecanismo común es excitar un átomo por calentamiento o por bombardeo de electrones, lo que hace que los electrones en niveles orbitales específicos se muevan momentáneamente a niveles de energía más altos; al volver al nivel original, la energía ganada se emite como radiación a frecuencias discretas dadas por la ecuación 2.9 (Emery y Camps, 2017).

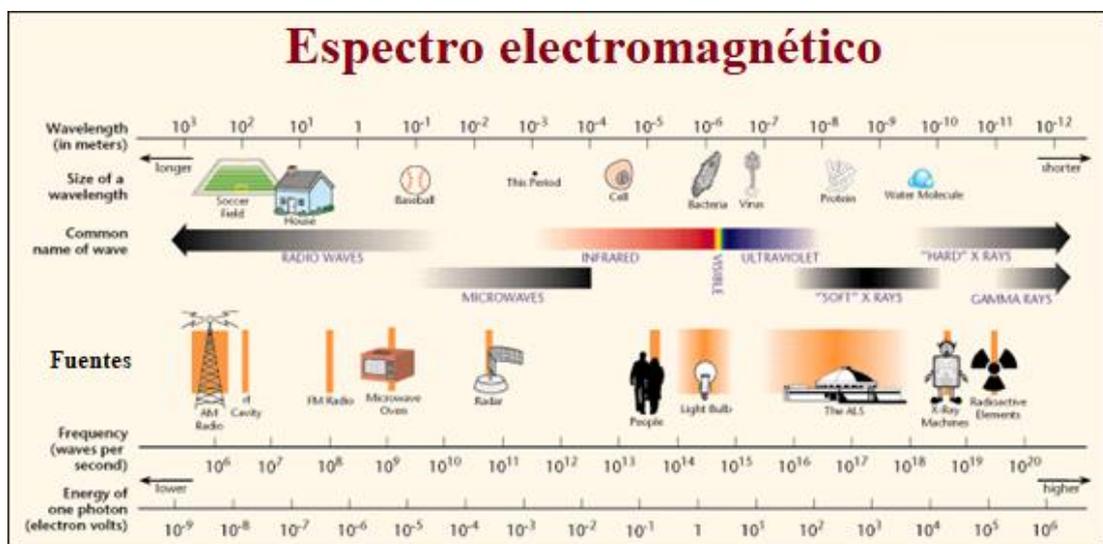
2.5.1. Espectro visible

La porción visible del espectro (Figura 7) incluye un número extremadamente limitado de longitudes de onda que son muy importantes para la teledetección, ya que son el rango de

longitudes de onda vistas por el ojo humano y, por lo tanto, la fuente de mucha información para la humanidad. Estas longitudes de onda corresponden a las de la máxima radiación proveniente del Sol, y una ventana de transmisión atmosférica, por lo que esta radiación puede llegar a la superficie de la Tierra y ser reflejada de vuelta al espacio exterior. La mayor parte de la teledetección óptica se centra en el uso de la radiación reflejada en estas relativamente pocas longitudes de onda.

Figura 6

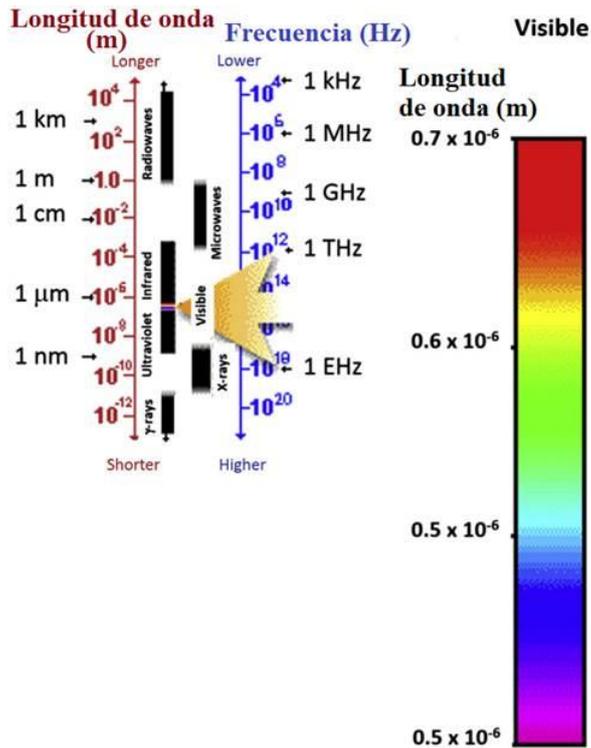
Espectro electromagnético.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017)

Figura 7

Espectro visible.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017).

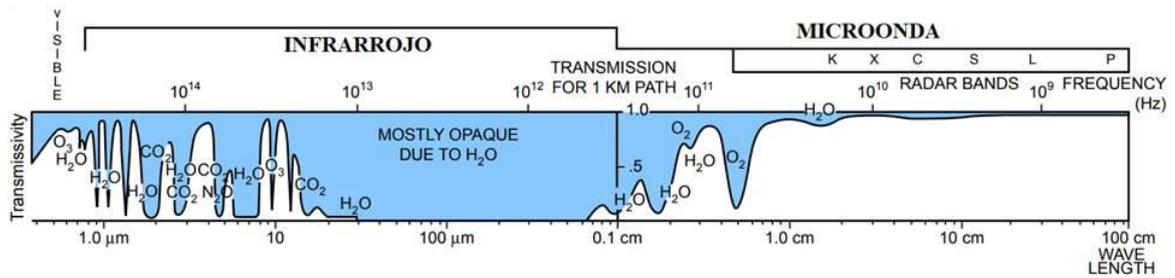
Hay mucha energía en estas bandas estrechas, que con frecuencia se dividen en canales estrechos para detectar los diferentes colores y sus respuestas a la radiación reflejada por diferentes características en la superficie de la Tierra. La teledetección visible abarca desde estudios de vegetación y geología de la superficie terrestre hasta imágenes en color de la productividad de los océanos. Cada una de estas aplicaciones requiere porciones ligeramente diferentes del espectro visible y cada una requiere su propio nivel de sensibilidad (Emery y Camps, 2017).

2.6. Transmisión atmosférica

La mayor parte de la teledetección se lleva a cabo sobre la Tierra, ya sea dentro o por encima de la atmósfera. Los gases de la atmósfera interactúan con la radiación solar, con la radiación de la superficie terrestre y con la radiación de microondas natural o artificial. La atmósfera misma es excitada por EMR para convertirse en otra fuente de fotones liberados.

Figura 8

Espectro de transmisión atmosférica.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017).

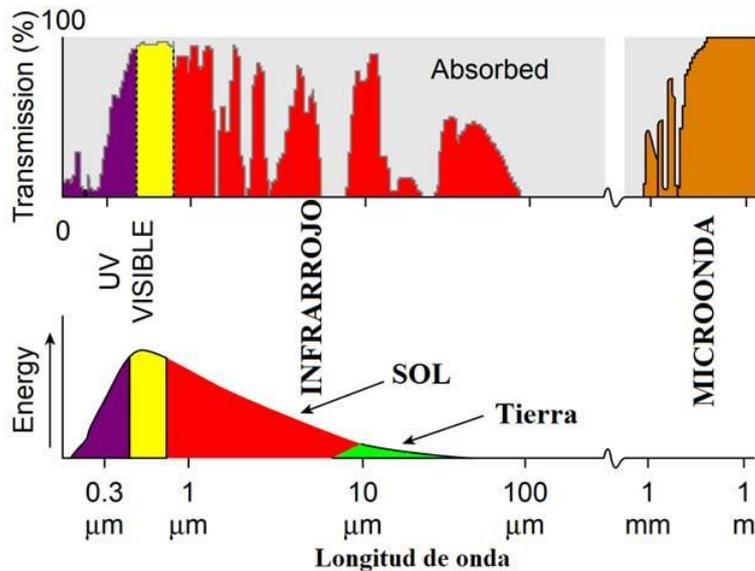
La Figura 8 es un diagrama genérico que muestra la transmisión de radiación atmosférica relativa en diferentes longitudes de onda. Las zonas azules marcan el paso mínimo de la radiación entrante y/o saliente, mientras que las áreas blancas indican ventanas de transmisión atmosférica, en las que la radiación no interactúa mucho con moléculas del aire y, por lo tanto, no es absorbido ni dispersado por la atmósfera.

Tenga en cuenta los estrechos canales de "ventana" en el IR térmico (IR, infrarrojo) y de rango medio. También para la mayoría de los canales de microondas, la atmósfera es casi transparente a la radiación de microondas, excepto alrededor de 22 y 183 GHz, donde la absorción de microondas alcanza su punto máximo debido al vapor de agua, y entre 55 - 60 GHz y 118 GHz, donde existen bandas de absorción de oxígeno. También es útil ver las ventanas de transmisión atmosférica en relación con las emisiones solares como se presenta aquí en la Figura 9. Como puede verse, la energía en los rayos UV (UV, ultravioleta), visible y NIR (NIR, infrarrojo cercano) se transmite principalmente a través de la atmósfera. Sin embargo, en el IR de rango medio hay ventanas bastante estrechas en las que la radiación atraviesa la atmósfera. Como se muestra en la Figura 8, estas ventanas estrechas se deben a la presencia de diferentes gases en la atmósfera. La mayoría de las ventanas en las porciones del espectro TIR (TIR, infrarrojo térmico) de longitud de onda media y larga se deben al vapor de agua y al dióxido de carbono en la atmósfera. En particular, hay una ventana bastante grande de unos 10 mm, que pasa la energía TIR de longitud de onda más larga a través de la atmósfera. Este es el canal principal utilizado para detectar de forma remota tanto el mar como las

temperaturas de la superficie terrestre por las emisiones IR de la superficie terrestre. Debido a la naturaleza de la radiación IR, estas emisiones proceden necesariamente de las superficies terrestres y oceánicas (Emery y Camps, 2017).

Figura 9

Ventanas de transmisión atmosférica y espectros de emisión solar.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017).

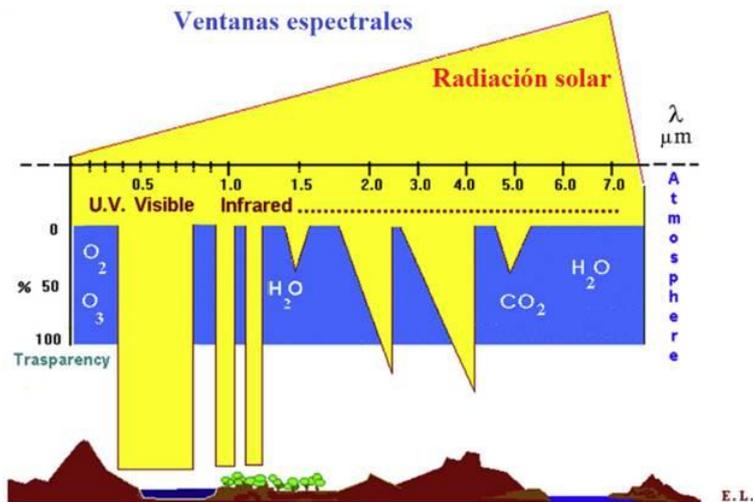
2.6.1. Ventanas espectrales

La atmósfera tiene una fuerte influencia en la radiación EM, a través de los fenómenos de absorción y dispersión. La cantidad de radiación que no logra penetrar se debe a la opacidad de la atmósfera y varía según la radiación a diferentes longitudes de onda. En ciertas longitudes de onda, la atmósfera es transparente (o en su mayoría transparente): estas longitudes de onda definen "ventanas" que pueden ser utilizadas por sensores de imágenes transportados por el espacio (Figura 10). Las longitudes de onda en las que la atmósfera es opaca (o en su mayoría opaca) son utilizadas por sensores de sondeo transportados por el espacio para inferir propiedades verticales en la atmósfera. En la práctica, una variedad de condiciones atmosféricas como el clima (nubes) y las partículas de polvo afectan la "visión" de los sensores, particularmente en las regiones tropicales y polares. En los últimos años se han desarrollado

nuevos sensores que utilizan microondas con longitudes de onda entre 1 cm y 1 m que pueden penetrar la atmósfera en casi todas las condiciones atmosféricas.

Figura 10

Ventanas de transmisión atmosférica (color amarillo).



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017).

2.6.2. Efectos atmosféricos

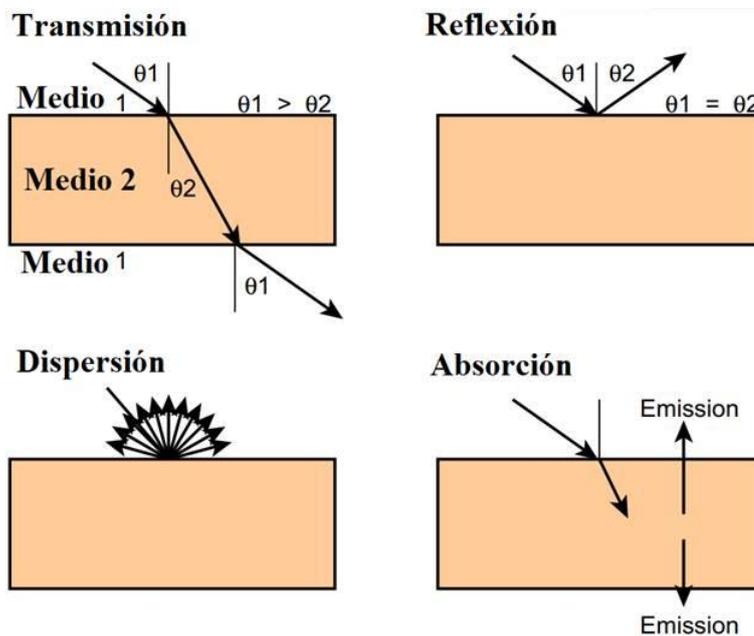
La atmósfera ejerce dos efectos principales sobre la radiación que la atraviesa desde cualquier dirección (hacia abajo desde el espacio o hacia arriba desde la superficie de la Tierra); absorción y dispersión. La absorción es el proceso por el cual las moléculas y los átomos atmosféricos captan la radiación aumentando la energía en la atmósfera. La dispersión es el proceso por el cual la energía radiativa se dispersa fuera de las partículas atmosféricas. Estas partículas incluyen moléculas de gas y átomos junto con aerosoles suspendidos y gotas de agua y partículas de hielo en la atmósfera (Emery y Camps, 2017).

2.6.1.1. Dispersión atmosférica

La Figura 11 resume los efectos atmosféricos sobre la radiación. La dispersión (*Scattering*) está representada por una distribución isotrópica de la radiación entrante sobre el hemisferio superior. Dependiendo del tamaño de partícula, se deben considerar los tres mecanismos de dispersión diferentes mencionados anteriormente.

Figura 11

Resumen de los efectos atmosféricos sobre la radiación.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017)

La dispersión de Rayleigh ocurre cuando las partículas son muy pequeñas en comparación con la longitud de onda de la radiación. Estas podrían ser partículas como pequeñas motas de polvo o moléculas de nitrógeno y oxígeno. La dispersión de Rayleigh hace que las longitudes de onda de energía más cortas se dispersen mucho más que las longitudes de onda más largas. La dispersión de Rayleigh es el mecanismo de dispersión dominante en la atmósfera superior. El hecho de que el cielo parece “azul” durante el día se debe a este fenómeno. A medida que la luz del sol atraviesa la atmósfera, las longitudes de onda más cortas (es decir, azul) del espectro visible se dispersan más que las otras longitudes de onda visibles (más largas) (Emery y Camps, 2017).

Al amanecer y al atardecer, la luz tiene que viajar más lejos a través de la atmósfera que al mediodía y la dispersión de las longitudes de onda más cortas es más completa; esto deja una mayor proporción de las longitudes de onda más largas para penetrar en la atmósfera y están menos atenuadas, lo que da como resultado los colores amarillo y rojo del amanecer y el

atardecer. Las radiancias asociadas con la dispersión de Rayleigh son proporcionales a la inversa de la longitud de onda de la radiación elevada a la cuarta potencia y exhiben un amplio patrón de dispersión como se muestra en la ecuación 2.12:

$$\beta_r(\theta, \lambda) \propto \frac{1}{\lambda^4} (1 + \cos^2 \theta) \quad (2.12)$$

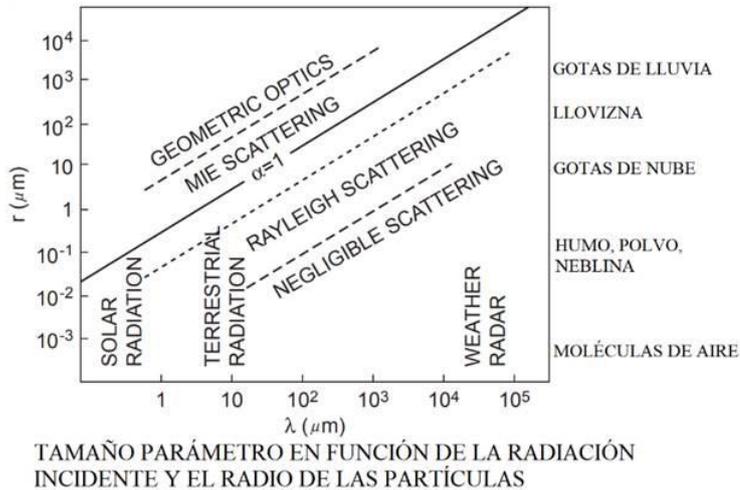
Aquí, β_r es el coeficiente de dispersión de Rayleigh, θ es el ángulo con respecto a una línea de referencia (Figura 4) y λ es la longitud de onda de la radiación. La dispersión de Mie ocurre cuando las partículas tienen aproximadamente el mismo tamaño que la longitud de onda de la radiación. El polvo, el polen, el humo y las nubes son causas comunes de la dispersión de Mie, que tiende a afectar longitudes de onda más largas que las afectadas por la dispersión de Rayleigh. La dispersión de Mie ocurre principalmente en las porciones más bajas de la atmósfera, donde las partículas más grandes son más abundantes, y domina cuando las condiciones de nubosidad están nubladas. La dispersión de Mie es principalmente dispersión frontal y la radiancia asociada con este mecanismo de dispersión es muy variable, como se indica aquí en la ecuación 2.13:

$$\beta_r(\theta, \lambda) \propto \lambda^m f(\theta), m = 0.6 \dots - 2 \quad (2.13)$$

La forma final de dispersión se conoce como dispersión no selectiva y se aplica a partículas que son mucho más grandes que la longitud de onda de la radiación. Las gotas de agua, el hielo y las partículas grandes de polvo pueden causar este tipo de dispersión. La dispersión no selectiva recibe su nombre del hecho de que todas las longitudes de onda se dispersan por igual. Este tipo de dispersión hace que la niebla y las nubes parezcan blancas a nuestros ojos porque la luz azul, verde y roja son longitudes de onda dispersas en cantidades aproximadamente iguales (azul + verde + luz roja = luz blanca). Este tipo de dispersión es generalmente isotrópica. Estos procesos de dispersión atmosférica se resumen en la Figura 12 como una función de la longitud de onda EM y el radio de la partícula. También se muestran los componentes atmosféricos que contribuyen a estos procesos de dispersión.

Figura 12

Resumen de los mecanismos de dispersión atmosférica en función de la longitud de onda de la radiación y el parámetro de tamaño atmosférico.



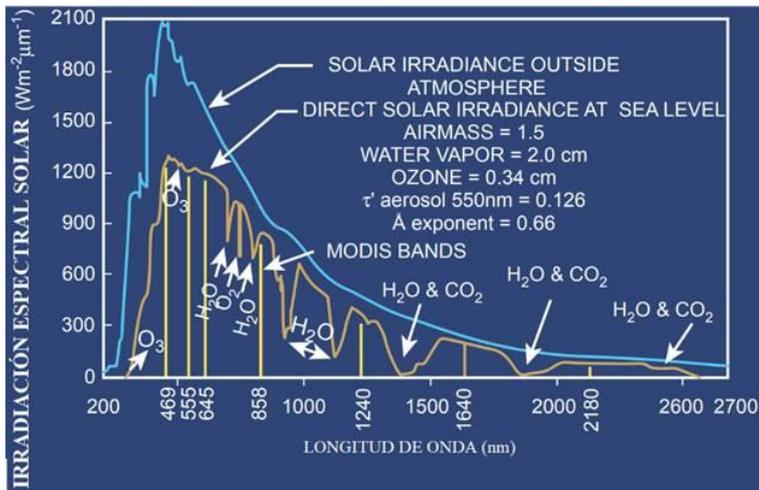
Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017)

2.7. Radiación solar entrante

La energía radiativa que llega del Sol a la Tierra es la fuente última de energía para todos los procesos naturales que se considerarán. El espectro de las emisiones del Sol se compara con las ventanas atmosféricas que introdujimos anteriormente (Figura 13) y vemos que las ventanas de mayor energía están ubicadas en las longitudes de onda más cortas, mientras que las ventanas más anchas, en términos de banda de longitud de onda, están ubicadas en las longitudes de onda más largas longitudes de onda TIR.

Figura 13

Parte superior del espectro de irradiación solar de la atmósfera fuera de la atmósfera (línea azul) en comparación con las ventanas de transmisión atmosférica (línea amarilla).



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017)

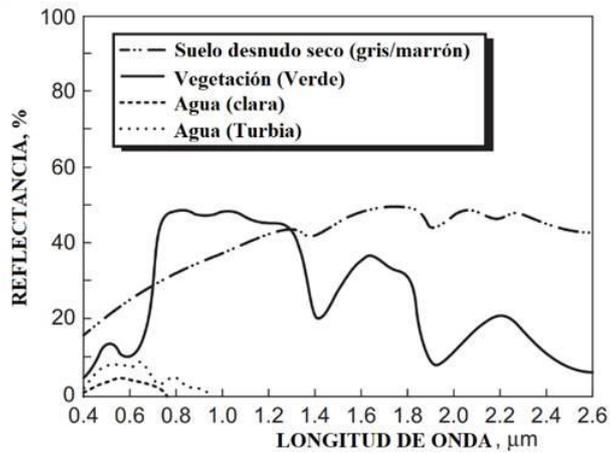
Es importante darse cuenta de que incluso las ventanas muy estrechas en la parte de onda corta del espectro transmiten una gran cantidad de radiación solar a la superficie de la Tierra, donde aproximadamente el 50 % de esta radiación de onda corta llega a la superficie de la Tierra. Aquí la radiación se convierte en calor o biomasa o alguna otra forma de energía equivalente. Una cantidad mucho menor es devuelta por la Tierra (temperatura superficial de 300 K) de regreso a la atmósfera y hacia el espacio (Figura 13).

2.8. Reflectancia superficial: Objetivos terrestres

La principal señal en teledetección proviene de la superficie terrestre, que toma la forma de energía visible reflejada. La cantidad y la longitud de onda de la reflectancia dependen del carácter de la superficie en términos de material y la cantidad de contenido de agua.

Figura 14

Reflectancia de varias superficies en función de la longitud de onda.

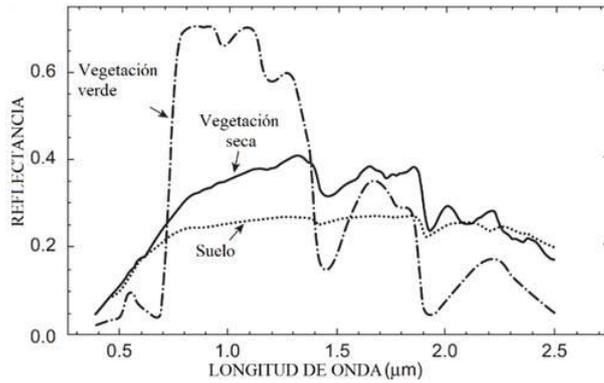


Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017)

Algunos ejemplos de esta reflectancia en función de la longitud de onda son presentados aquí en la Figura 14, donde diferentes curvas representan diferentes características de la superficie que muestran diferentes reflectancias en función de la longitud de onda. La reflectividad depende de los mecanismos de absorción y dispersión que tienen lugar dentro del material. Los procesos de absorción son procesos electrónicos (absorción de un fotón y reemisión a una longitud de onda más larga, es decir, calentamiento), efectos cristalinos (niveles de energía atómica que dividen la red cristalina, que también depende de la concentración de un tipo dado de ion) y absorciones por transferencia de carga (transiciones entre elementos cuando la absorción de un fotón provoca el movimiento de un electrón entre los iones). La dispersión depende del tipo de mezcla entre los materiales reflectantes y también del tamaño del objeto, cuanto mayor sea el tamaño del objeto, mayor será la absorción de luz y menor la reflectancia. La vegetación verde tiene un pequeño pico en las porciones verdes de la banda visible, pero muestra la mayor reflectancia en las longitudes de onda NIR e IR de rango medio.

Figura 15

Espectros de reflectancia de la vegetación y del suelo.



Nota. Adaptado de (Emery y Camps, 2017)

La reflectancia NIR se puede utilizar para discriminar entre diferentes tipos de vegetación, como coníferas y árboles de hoja caduca (Figura 15). Mientras que ambos tipos de árboles tienen reflectancias visibles muy similares, los árboles de coníferas no alcanzan valores tan altos en el NIR más allá de 0,7 µm como los árboles de hoja caduca. Esto se debe a que los árboles de coníferas simplemente mantienen el mismo nivel de salud de las hojas durante todo el año, mientras que los árboles de hoja caduca pasan de una etapa sin hojas en invierno a una etapa de hojas nuevas y saludables en verano. Este aumento en la reflectancia NIR domina en las longitudes de onda más largas, cerca de 0,9 µm. La reflectancia por la presencia de suelo y rocas es moderada ($r \leq 0.3$) dependiendo de la cantidad de vegetación que la cubra. El tamaño del objeto del suelo y la rugosidad de la superficie también influyen en la cantidad de reflectancia y desplazan la reflectancia hacia los canales IR de rango medio más largos. La constancia relativa de la firma del suelo en comparación con los dos tipos de vegetación se ve en la Figura 15, que traza la respuesta espectral de las reflectancias del suelo, la vegetación seca y verde como funciones de la longitud de onda.

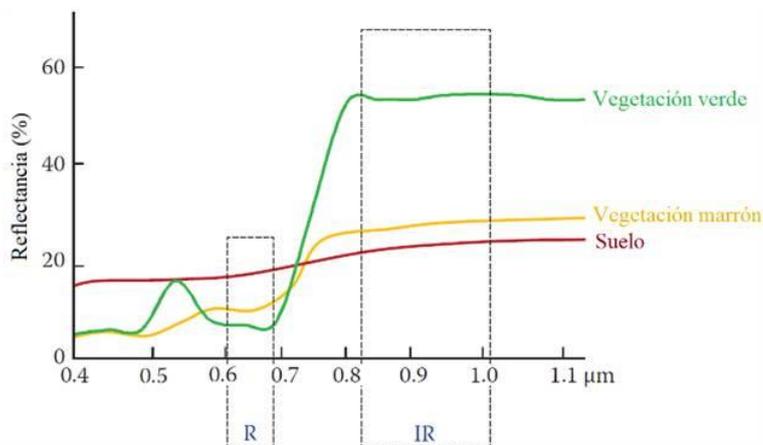
2.9. Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI)

Los VI (VI, Índices espectrales de vegetación) son técnicas simples y sólidas para extraer información cuantitativa sobre la cantidad de vegetación o verdor de cada píxel de una imagen satelital. Por lo general, implican transformaciones espectrales de dos o más bandas, una en la región espectral R absorbente de clorofila (0,6 a 0,7 µm) y la otra en el NIR no

absorbente (0,7 a 1,1 μm), donde hay una dispersión foliar significativa. Esta característica es bastante exclusiva de la vegetación fotosintéticamente activa, ya que la vegetación senescente tiende a reducir el NIR mientras aumenta la reflectancia R (Figura 16).

Figura 16

Índices de vegetación, basados principalmente en el contraste de reflectancia roja e infrarroja cercana de la vegetación verde.



Nota. Adaptado de (Chuvieco, 2016)

Los suelos regularmente tienen poco o ningún contraste entre las bandas R y NIR. La reflectancia R y NIR se combinan en VI espectrales para mejorar la señal de la vegetación y minimizar las influencias que no son de la vegetación, los VI están diseñados para proporcionar información sobre una sola característica en una imagen, a saber, el verdor de la vegetación. Como resultado de su simplicidad, los VI han demostrado estar entre las técnicas más sólidas en detección remota, produciendo comparaciones espaciales y temporales consistentes de la vegetación verde a escala local y global. Sin embargo, un contraste espectral NIR/R más bajo puede indicar una menor cantidad de vegetación presente en un píxel o una mayor cantidad de vegetación, pero en condiciones de estrés. Muy a menudo, la causa de un cambio en la relación NIR/R puede deducirse de conocimientos adicionales, como el patrón temporal de los valores de SR (SR, del inglés simple ratio), en el que, por ejemplo, el contraste espectral reducido puede ser el resultado de menos vegetación, vegetación senescente, o vegetación bajo estrés.

El NDVI (“*Normalized Difference Vegetation Index*”) se usa ampliamente para estimar varias variables biofísicas y ecológicas de particular valor en los paisajes y para el análisis global.

NDVI es una variante funcional del SR, con un rango dinámico de -1 a $+1$:

$$SR = \frac{\rho_{NIR}}{\rho_R} \quad (2.14)$$

$$NDVI = \frac{\rho_{NIR} - \rho_R}{\rho_{NIR} + \rho_R} \quad (2.15)$$

donde ρ_{NIR} y ρ_R indican las reflectancias de un píxel en las bandas NIR y R, respectivamente (Chuvienco, 2016).

2.10. Métodos multivariados

2.10.1. Espectro de potencia Lomb-Scargle

Los métodos de espectro de potencia requieren datos espaciados uniformemente. Sin embargo, las series de tiempo son a menudo desiguales espaciado en ciencias de la tierra, aunque la interpolación de los datos espaciados de manera desigual a una cuadrícula de espaciados-uniformes a veces es una forma de superar este problema, la interpolación introduce numerosos artefactos en los datos, tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Por esta razón el método alternativo de análisis de series de tiempo se ha vuelto cada vez más popular en las ciencias de la tierra, el algoritmo Lomb-Scargle (Scargle, 1982; Press et al. 2007).

El algoritmo de Lomb-Scargle sólo evalúa los datos de la serie temporal en las veces t_i que se miden realmente. Suponiendo una serie $y(t)$ de N puntos de datos, la Periodograma normalizado Lomb-Scargle P_x , en función de la frecuencia angular

$x = 2\pi f > 0$, viene dado por

$$P_x(w) = \frac{1}{2S^2} \left\{ \frac{[\sum_j (y_i - \bar{y}) \cos w(t_j - t)]^2}{\sum_j \cos^2 w(t_j - t)} + \frac{[\sum_j (y_i - \bar{y}) \sin w(t_j - t)]^2}{\sum_j \sin^2 w(t_j - t)} \right\} \quad (2.16)$$

dónde

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

y

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

Son la media aritmética y la varianza de los datos (Scargle, 1982; Press et al. 2007). La constante τ , que está definida por la relación

$$\tan(2\omega\tau) = \frac{\sum_j \sin 2\omega t_j}{\sum_j \cos 2\omega t_j}$$

es un desplazamiento que hace que $P_x(\omega)$ sea independiente de cambiar los valores de t_i por cualquier cantidad constante. Scargle (1982) mostró que esta elección particular de la compensación τ tiene la consecuencia de que la solución para $P_x(\omega)$ es idéntica a un ajuste por mínimos cuadrados de las funciones $\sin(\omega t)$ y $\cos(\omega t)$ a la serie de datos $y(t)$:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

El ajuste por mínimos cuadrados de funciones armónicas a series de datos junto con el análisis espectral había sido investigado previamente por Lomb (1972), y por lo tanto el método se denomina transformada de Fourier normalizada de Lomb-Scargle. El término normalizado se refiere al factor s^2 en el denominador de la ecuación para el periodograma. Scargle (1982) ha demostrado que el periodograma de Lomb-Scargle tiene una distribución exponencial de probabilidad con una media igual a uno, suponiendo que el ruido es distribución gaussiana. La probabilidad de que $P_x(x)$ esté entre alguna cantidad positiva z y $z + dz$ es $\exp(-z)dz$. Si escaneamos M frecuencias independientes, la probabilidad de que ninguno de ellos tenga un valor mayor que z es $(1 - \exp(-z))^M$. Podemos, por lo tanto, calcular la probabilidad de falsa alarma de la hipótesis nula (es decir, la probabilidad de que un pico dado en el periodograma no sea significativo) (Press et al. 2007):

$$P(> Z) \equiv 1 - (1 - e^{-Z})^M$$

Para Press et al. (2007) sugiere usar el criterio de Nyquist, para determinar el número de frecuencias independientes M , asumiendo que los datos son uniformemente espaciados. En este caso, el valor apropiado para el número de frecuencias independientes es $M = 2N$, donde N es la longitud de la serie temporal. Ahora se puede calcular el nivel de significancia para cualquier pico en el espectro de potencia px . La variable *prob* indica la probabilidad de falsa alarma para la hipótesis nula: una baja *prob* por lo tanto indica un pico muy significativo en el espectro de potencia.

$$prob = 1 - (1 - \exp(-px))^{(2 * \text{length}(x))};$$

También Press et al. (2007) sugirieron una forma alternativa de mostrar los niveles de significancia, en este método, la ecuación para la probabilidad de falsa alarma del nulo la hipótesis se invierte para calcular la potencia correspondiente de los niveles de significancia. Generalmente se usa un nivel de significación del 95%.

2.10.2. Análisis de componentes principales

El análisis de componentes principales se ocupa de explicar la estructura de varianza-covarianza de un conjunto de variables a través de algunas combinaciones lineales de estas variables. Sus objetivos generales son (1) la reducción de datos y (2) la interpretación. Aunque se requieren p componentes para reproducir la variabilidad total del sistema, a menudo gran parte de esta variabilidad puede ser explicada por un pequeño número k de los componentes principales. Si es así, hay (casi) tanta información en los k componentes como en las p variables originales. Los k componentes principales pueden entonces reemplazar las p variables iniciales, y el conjunto de datos original, que consta de n mediciones en p variables, se reduce a un conjunto de datos que consta de n mediciones en k componentes principales. Un análisis de los componentes principales a menudo revela relaciones que antes no se sospechaban y, por lo tanto, permite interpretaciones que normalmente no resultan. Los análisis de los componentes

principales son más un medio para un fin que un fin en sí mismos, porque con frecuencia sirven como pasos intermedios en investigaciones mucho más grandes. Por ejemplo, los componentes principales pueden ser entradas para una regresión múltiple o un análisis de conglomerados. Además, los componentes principales (escalados) son una "factorización" de la matriz de covarianza para el modelo de análisis factorial (Johnson y Wichern, 2014).

Algebraicamente, los componentes principales son combinaciones lineales particulares de las p variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_p . Geométricamente, estas combinaciones lineales representan la selección de un nuevo sistema de coordenadas obtenido al rotar el sistema original con X_1, X_2, \dots, X_p como los ejes de coordenadas. Los nuevos ejes representan las direcciones con máxima variabilidad y proporcionan una descripción más simple y parsimoniosa de la estructura de covarianza. Como veremos, los componentes principales dependen únicamente de la matriz de covarianza Σ (o la matriz de correlación ρ) de X_1, X_2, \dots, X_p . Su desarrollo no requiere un supuesto normal multivariante. Por otro lado, los componentes principales derivados de poblaciones normales multivariadas tienen interpretaciones útiles en términos de elipsoides de densidad constante. Además, se pueden hacer inferencias a partir de los componentes de la muestra cuando la población es normal y multivariada. Se deja que el vector aleatorio $X' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ tenga la matriz de covarianza Σ con valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$. Considere las combinaciones lineales

$$\begin{aligned} Y_1 &= \mathbf{a}'_1 \mathbf{X} = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1p}X_p \\ Y_2 &= \mathbf{a}'_2 \mathbf{X} = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2p}X_p \\ &\quad \vdots \\ Y_p &= \mathbf{a}'_p \mathbf{X} = a_{p1}X_1 + a_{p2}X_2 + \dots + a_{pp}X_p \end{aligned} \quad (2.17)$$

Entonces, usando (2.18)

Sea la combinación lineal $\mathbf{Z} = \mathbf{C}\mathbf{X}$ tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \mu_Z &= E(\mathbf{Z}) = E(\mathbf{C}\mathbf{X}) = \mathbf{C}\mu_X \\ \Sigma_Z &= Cov(\mathbf{Z}) = Cov(\mathbf{C}\mathbf{X}) = \mathbf{C}\Sigma_X\mathbf{C}' \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

obtenemos

$$\mathbf{Var}(Y_i) = \mathbf{a}'_i \Sigma \mathbf{a}_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.19)$$

$$\mathbf{Cov}(Y_i, Y_k) = \mathbf{a}'_i \Sigma \mathbf{a}_k \quad i, k = 1, 2, \dots, p \quad (2.20)$$

Los componentes principales son aquellas combinaciones lineales no correlacionadas (Y_1, Y_2, \dots, Y_p) cuyas varianzas en (2.19) son tan grandes como sea posible.

El primer componente principal es la combinación lineal con varianza máxima. Es decir, maximiza $\mathbf{Var}(Y_1) = \mathbf{a}'_1 \Sigma \mathbf{a}_1$. Está claro que $\mathbf{Var}(Y_1) = \mathbf{a}'_1 \Sigma \mathbf{a}_1$ se puede aumentar multiplicando cualquiera \mathbf{a}_1 por alguna constante. Para eliminar esta indeterminación, es conveniente restringir la atención a los vectores de coeficientes de longitud unitaria. Por lo tanto, definimos

Primera componente principal = combinación lineal $\mathbf{a}'_1 \mathbf{X}$ que maximiza

$$\mathbf{Var}(\mathbf{a}'_1 \mathbf{X}) \text{ sujeto a } \mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{1}$$

Segundo componente principal = combinación lineal $\mathbf{a}'_2 \mathbf{X}$ que maximiza

$$\mathbf{Var}(\mathbf{a}'_2 \mathbf{X}) \text{ sujeto a } \mathbf{a}'_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{1} \text{ y } \mathbf{Cov}(\mathbf{a}'_1 \mathbf{X}, \mathbf{a}'_2 \mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

En el i -ésimo paso,

i -ésima componente principal = combinación lineal $\mathbf{a}'_i \mathbf{X}$ que maximiza

$$\mathbf{Var}(\mathbf{a}'_i \mathbf{X}) \text{ sujeto a } \mathbf{a}'_i \mathbf{a}_i = \mathbf{1} \text{ y } \mathbf{Cov}(\mathbf{a}'_i \mathbf{X}, \mathbf{a}'_k \mathbf{X}) = \mathbf{0} \text{ para } k < i$$

Resultado 1. Sea la matriz covarianza Σ asociada al vector aleatorio.

$\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$. Sean Σ los pares valor propio-vector propio $(\lambda_1, \mathbf{e}_1), (\lambda_2, \mathbf{e}_2), \dots, (\lambda_p, \mathbf{e}_p)$ donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$. Entonces la i -ésima componente principal viene dada por

$$Y_i = \mathbf{e}'_i \mathbf{X} = e_{i1}X_1 + e_{i2}X_2 + \dots + e_{ip}X_p \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.21)$$

Con estas elecciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(Y_i) &= \mathbf{e}'_i \Sigma \mathbf{e}_i = \lambda_i & i = 1, 2, \dots, p \\ \mathbf{Cov}(Y_i, Y_k) &= \mathbf{e}'_i \Sigma \mathbf{e}_k = \mathbf{0} & i \neq k \end{aligned} \quad (2.22)$$

Si algunos λ_i son iguales, las opciones de los vectores de coeficientes correspondientes \mathbf{e}_i y, por lo tanto Y_i , no son únicas.

Sabemos que, para maximización de formas cuadráticas para puntos en la esfera unitaria, con $\mathbf{B} = \Sigma$, es

$$\max_{\mathbf{a} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{a}} = \lambda_1 \quad (\text{alcanzado cuando } \mathbf{a} = \mathbf{e}_1)$$

Pero $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}$ dado que los vectores propios están normalizados. Por lo tanto,

$$\max_{\mathbf{a} \neq \mathbf{0}} \frac{\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{a}} = \lambda_1 = \frac{\mathbf{e}'_i\Sigma\mathbf{e}_i}{\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_i} = \mathbf{e}'_i\Sigma\mathbf{e}_i = \text{Var}(Y_i)$$

obtenemos

$$\max_{\mathbf{a} \perp \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k} \frac{\mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{a}} = \lambda_{k+1} \quad k = 1, 2, \dots, p-1$$

Para la elección $\mathbf{a} = \mathbf{e}_{k+1}$ con $\mathbf{e}'_{k+1}\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \dots, k$ y $k = 1, 2, \dots, p-1$

$$\mathbf{e}'_{k+1}\Sigma\mathbf{e}_{k+1}/\mathbf{e}'_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}'_{k+1}\Sigma\mathbf{e}_{k+1} = \text{Var}(Y_{k+1})$$

Pero $\mathbf{e}'_{k+1}(\Sigma\mathbf{e}_{k+1}) = \lambda_{k+1}\mathbf{e}'_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} = \lambda_{k+1}$ entonces $\text{Var}(Y_{k+1}) = \lambda_{k+1}$. Queda por mostrar que \mathbf{e}_i perpendicular a \mathbf{e}_k (es decir, $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$, $i \neq k$) da $\text{Cov}(Y_i, Y_k) = \mathbf{0}$. Ahora, los vectores propios de Σ son ortogonales si todos los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son distintos. Si los valores propios no son todos distintos, los vectores propios correspondientes a valores comunes los valores propios pueden elegirse para que sean ortogonales. Por lo tanto, para cualesquiera dos vectores propios \mathbf{e}_i y \mathbf{e}_k , $\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$, $i \neq k$. Dado que $\Sigma\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}_k$, la pre-multiplicación por \mathbf{e}'_i da

$$\text{Cov}(Y_i, Y_k) = \mathbf{e}'_i\Sigma\mathbf{e}_k = \mathbf{e}'_i\lambda_k\mathbf{e}_k = \lambda_k\mathbf{e}'_i\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$$

para cualquier $i \neq k$, y la prueba está completa.

Del **resultado 1**, los componentes principales no están correlacionados y tienen varianzas iguales a los valores propios de Σ .

Resultado 2. Sea $\mathbf{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$ una matriz de covarianza Σ , con pares de valor propio-vector propio $(\lambda_1, \mathbf{e}_1), (\lambda_2, \mathbf{e}_2), \dots, (\lambda_p, \mathbf{e}_p)$ donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$.

Sea $Y_1 = \mathbf{e}'_1 \mathbf{X}, Y_2 = \mathbf{e}'_2 \mathbf{X}, \dots, Y_p = \mathbf{e}'_p \mathbf{X}$ sean los componentes principales. Entonces

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{pp} = \sum_{i=1}^p \text{Var}(X_i) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = \sum_{i=1}^p \text{Var}(Y_i)$$

De la Definición, $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{pp} = \text{tr}(\mathbf{\Sigma})$, con $\mathbf{A} = \mathbf{\Sigma}$, podemos escribir $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}'$ donde $\mathbf{\Lambda}$ es la matriz diagonal de valores propios y $\mathbf{P} = [e_1, e_2, \dots, e_p]$ por lo que $\mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

Usando $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$, tenemos

$$\text{tr}(\mathbf{\Sigma}) = \text{tr}(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}') = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}'\mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$$

De este modo,

$$\sum_{i=1}^p \text{Var}(X_i) = \text{tr}(\mathbf{\Sigma}) = \text{tr}(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{i=1}^p \text{Var}(Y_i)$$

Del **resultado 2** se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Varianza total de la población} &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \dots + \sigma_{pp} & (2.23) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \end{aligned}$$

y, en consecuencia, la proporción de la varianza total debida a (explicada por) el k -ésimo componente principal es

$$\left(\begin{array}{c} \text{Proporción del total} \\ \text{varianza de la población} \\ \text{debido al } k\text{-ésimo principal} \\ \text{componente} \end{array} \right) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p} \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.24)$$

Si la mayor parte (por ejemplo, del 80 al 90 %) de la varianza total de la población, para p grande, se puede atribuir a los primeros uno, dos o tres componentes, entonces estos componentes pueden “reemplazar” las variables p originales sin mucha pérdida de valor. información. Cada componente del vector de coeficientes $\mathbf{e}'_i = [e_{i1}, \dots, e_{ik}, \dots, e_{ip}]$ también merece inspección. La magnitud de e_{ik} mide la importancia de la k -ésima variable para el i -ésimo componente principal, independientemente de las otras variables. En particular, e_{ik} es proporcional al coeficiente de correlación entre Y_i y X_k (Johnson y Wichern, 2014).

2.10.3. El modelo clásico de regresión lineal

Sean z_1, z_2, \dots, z_r r variables predictoras que se cree que están relacionadas con una variable de respuesta Y . Por ejemplo, con $r=4$, podríamos tener

Y = valor de mercado actual de la casa

z_1 = metros cuadrados de superficie habitable

z_2 = ubicación (indicador para zona de ciudad)

z_3 = valor de tasación del año pasado

z_4 = calidad de construcción (precio por metro cuadrado)

El modelo clásico de regresión lineal establece que Y se compone de una media, que depende de manera continua en el elemento z_i , y un error aleatorio ε que explica error de medición y los efectos de otras variables no consideradas explícitamente en el modelo. Los valores de las variables predictoras registradas del experimento o establecidas por el investigador se tratan como *fijos*. El error (y por lo tanto la respuesta) se ve como una variable aleatoria cuyo comportamiento se caracteriza por un conjunto de supuestos distributivos.

Específicamente, el modelo de regresión lineal con una sola respuesta toma la forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_r z_r + \varepsilon$$

$$[\text{Respuesta}] = [\text{promedio (dependiendo de } z_1, z_2, \dots, z_r)] + [\text{error}]$$

El término "lineal" se refiere al hecho de que la media es una función lineal de los parámetros desconocidos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$.

Las variables predictoras pueden o no entrar en el modelo como términos de primer orden. Con n observaciones independientes sobre Y y los valores asociados de z_i el modelo completo se vuelve

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 z_{11} + \beta_2 z_{12} + \dots + \beta_r z_{1r} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 z_{21} + \beta_2 z_{22} + \dots + \beta_r z_{2r} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_m &= \beta_0 + \beta_1 z_{m1} + \beta_2 z_{m2} + \dots + \beta_r z_{mr} + \varepsilon_m \end{aligned} \tag{2.25}$$

donde se supone que los términos de error tienen las siguientes propiedades:

- 1.- $E(\varepsilon_j) = 0$
- 2.- $Var(\varepsilon_j) = \sigma^2(\text{constante});$ y (2.26)
- 3.- $Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0; j \neq k.$

En notación matricial, (2.25) se convierte en

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1r} \\ 1 & z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

o

$$\mathbf{Y} \quad \mathbf{Z} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(n \times 1) = (n \times (r + 1))(r + 1) \times 1 + (n \times 1)$$

y las especificaciones en (2.26) se convierten en

- 1.- $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0;$ y
- 2.- $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2\mathbf{I}.$

Tenga en cuenta que un uno en la primera columna de la matriz de diseño \mathbf{Z} es el multiplicador del término constante β_0 . Es costumbre introducir la variable artificial $z_{11} = 1$, para que

$$\beta_0 + \beta_1 z_{j1} + \dots + \beta_r z_{jr} = \beta_0 z_{j0} + \beta_1 z_{j1} + \dots + \beta_r z_{jr}$$

Cada columna de \mathbf{Z} consta de los n valores de la variable predictora correspondiente, mientras que la j -ésima fila de \mathbf{Z} contiene los valores de todas las variables predictoras en la j -ésima prueba.

El modelo de regresión lineal clásico donde $\boldsymbol{\beta}$ y σ^2 son parámetros desconocidos y la matriz de diseño \mathbf{Z} tiene j -ésima fila $[z_{j0}, z_{j1}, \dots, z_{jr}]$.

$$\mathbf{Y} \quad \mathbf{Z} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(n \times 1) = (n \times (r + 1))(r + 1) \times 1 + (n \times 1),$$

$$\text{con } E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \sigma^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma^2 \end{bmatrix} \mathbf{I} \quad (2.27)$$

Aunque las suposiciones de los términos de error en (2.26) son muy modestas, posteriormente se necesitará agregar el supuesto de normalidad conjunta para hacer declaraciones de confianza y probando hipótesis (Johnson y Wichern, 2014).

A. Estimación por mínimos cuadrados. Uno de los objetivos del análisis de regresión es desarrollar una ecuación que permita al investigador predecir la respuesta para valores dados de las variables predictoras. Por tanto, es necesario “ajustar” el modelo en (2.27) a las y_j observadas correspondientes a los valores conocidos $1, z_{j1}, \dots, z_{jr}$. Es decir, debemos determinar los valores para el coeficiente de regresión $\boldsymbol{\beta}$ y la varianza del error σ^2 consistentes con los datos disponibles.

Sean \mathbf{b} valores de prueba para $\boldsymbol{\beta}$. Considere la diferencia $y_j - b_0 - b_1 z_{j1} - \dots - b_r z_{jr}$ entre la respuesta observada y_j y el valor $b_0 - b_1 z_{j1} - \dots - b_r z_{jr}$ que se esperaría si \mathbf{b} fuera el vector de parámetros “verdadero”. Normalmente, las diferencias $y_j - b_0 - b_1 z_{j1} - \dots - b_r z_{jr}$ no será cero, porque la respuesta fluctúa (de una manera caracterizada por los supuestos del término de error) sobre su valor esperado. El método de *mínimos cuadrados* selecciona \mathbf{b} para minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias:

$$S(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n (y_j - b_0 - b_1 z_{j1} - \dots - b_r z_{jr})^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{Zb})'(\mathbf{y} - \mathbf{Zb}) \quad (2.28)$$

Los coeficientes \mathbf{b} elegidos por el criterio de mínimos cuadrados se denominan estimaciones de mínimos cuadrados de los parámetros de regresión $\boldsymbol{\beta}$. De ahora en adelante se denotará con $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ para enfatizar su papel como estimaciones de $\boldsymbol{\beta}$.

Los coeficientes $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ son consistentes con los datos en el sentido de que producen respuestas medias estimadas (ajustadas) $\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 z_{j1} + \dots + \hat{\beta}_r z_{jr}$, cuya suma de cuadrados de las diferencias de lo observado y_j es lo más pequeño posible. Las desviaciones se denominan residuales.

$$\hat{\epsilon}_j = y_j - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 z_{j1} - \dots - \hat{\beta}_r z_{jr}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

el vector de residuos $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ contiene la información sobre el parámetro desconocido restante σ^2 .

Obtenemos el resultado 3, que \mathbf{Z} tenga rango completo $r + 1 \leq n$. (Si \mathbf{Z} no es de rango completo, $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$ se reemplaza por $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^-$, un inverso generalizado de $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$). La estimación de mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$ en (2.27) está dada por

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$$

Deje que $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{H}\mathbf{y}$ denote los valores ajustados de \mathbf{y} , donde $\mathbf{H} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'$ se llama matriz de "líneas". Entonces los residuos

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = [\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{y}$$

satisfacen $\mathbf{Z}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$ y $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$. también la

$$\begin{aligned} \text{suma residual de cuadrados} &= \sum_{j=1}^n (y_j - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 z_{j1} - \cdots - \hat{\beta}_r z_{j1})^2 = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \mathbf{y}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

Prueba. Dejar $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$ cómo se afirma.

$$\text{Entonces } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{y}$$

La matriz $[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']$ satisface

1. $[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']' = [\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']$ (simétrico);
2. $[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'] =$
 $= \mathbf{I} - 2\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'$
 $= [\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']$ (idempotente) (2.30)
3. $\mathbf{Z}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'] = \mathbf{Z}' - \mathbf{Z}' = \mathbf{0}$.

Como consecuencia $\mathbf{Z}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Z}'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{Z}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{y} = \mathbf{0}$, entonces

$$\hat{\mathbf{y}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{Z}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}.$$

Adicionalmente, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{y}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'][\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{y}$

$$= \mathbf{y}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{y} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Para verificar la expresión de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, escribimos

$$\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{Z}\mathbf{b} = \mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b})$$

Entonces

$$\begin{aligned} S(\mathbf{b}) &= (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{b})'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) + (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b}) + 2(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) + (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b})'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b}) \end{aligned}$$

desde $(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{Z} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\mathbf{Z} = \mathbf{0}'$. El primer término en $S(\mathbf{b})$ no depende de \mathbf{b} y el segundo es la longitud al cuadrado de $\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b})$. Porque \mathbf{Z} tiene rango completo, $\mathbf{Z}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b}) \neq \mathbf{0}$ si $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{b}$, entonces la suma mínima de cuadrados es única y ocurre para $\mathbf{b} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y}$. Tenga en cuenta que $(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}$ existe ya que $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ tiene el rango $r + 1 \leq n$. (Si $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ no tiene el rango completo, $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ para algunos $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, pero luego $\mathbf{a}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{Z}\mathbf{a} = \mathbf{0}$, lo que contradice que \mathbf{Z} tenga el rango completo $r + 1$.)

El resultado 3 muestra cómo se pueden obtener las estimaciones de mínimos cuadrados $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ y los residuos $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a partir de la matriz de diseño \mathbf{Z} y las respuestas \mathbf{y} mediante operaciones matriciales simples (Johnson y Wichern, 2014).

B. Descomposición de suma de cuadrados. De acuerdo con el resultado 3, $\mathbf{y}'\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$, entonces la respuesta total suma de cuadrados $\mathbf{y}'\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j^2$ satisface

$$\mathbf{y}'\mathbf{y} = (\widehat{\mathbf{y}} + \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}})'(\widehat{\mathbf{y}} + \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}) = (\widehat{\mathbf{y}} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}})'(\widehat{\mathbf{y}} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \widehat{\mathbf{y}}'\widehat{\mathbf{y}} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.31)$$

Dado que la primera columna de \mathbf{Z} es $\mathbf{1}$, la condición $\mathbf{Z}'\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$ incluye el requisito $0 = \mathbf{1}'\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{j=1}^n \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \sum_{j=1}^n y_j - \sum_{j=1}^n \widehat{y}_j$, o $\bar{y} = \bar{\widehat{y}}$. Restando $n\bar{y}^2 = n(\bar{\widehat{y}})^2$ de ambos lados de la descomposición en (2.31), obtenemos la descomposición básica de la suma de cuadrados sobre la media:

$$\widehat{\mathbf{y}}'\widehat{\mathbf{y}} + n\bar{y}^2 = \widehat{\mathbf{y}}'\widehat{\mathbf{y}} + n(\bar{\widehat{y}})^2 + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

o

$$\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^n \hat{\varepsilon}_j^2 \quad (2.32)$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{suma total de} \\ \text{cuadrados sobre la media} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{regresión suma} \\ \text{de cuadrados} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{residual (error)} \\ \text{suma de cuadrados} \end{array} \right)$$

La descomposición de la suma de cuadrados anterior sugiere que la calidad del ajuste de los modelos se puede medir mediante el *coeficiente de determinación*

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^n \hat{\varepsilon}_j^2}{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (\hat{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2} \quad (2.33)$$

La cantidad R^2 da la proporción de la variación total en el y_j "explicada" por, o atribuible a, las variables predictoras z_1, z_2, \dots, z_r . Aquí R^2 (o el coeficiente de correlación múltiple $R = +\sqrt{R^2}$) es igual a 1 si la ecuación ajustada pasa por todos los puntos de datos, de modo que $\hat{\varepsilon}_j = 0$ para todo j . En el otro extremo, R^2 es 0 si $\hat{\beta}_0 = \bar{y}$ y $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_r = 0$. En este caso, las variables predictoras z_1, z_2, \dots, z_r no tienen influencia en la respuesta (Johnson y Wichern, 2014).

2.10.4. Regresión lineal multivariado

Sobre Regresión múltiple multivariante, consideramos el problema de modelar la relación entre m respuestas $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_m$ y un único conjunto de variables predictoras z_1, z_2, \dots, z_r . Se supone que cada respuesta sigue su propio modelo de regresión, de modo que

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_{01} + \beta_{11}z_1 + \dots + \beta_{r1}z_r + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_{02} + \beta_{12}z_1 + \dots + \beta_{r2}z_r + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_m &= \beta_{0m} + \beta_{1m}z_1 + \dots + \beta_{rm}z_r + \varepsilon_m \end{aligned} \quad (2.34)$$

El término de error $\boldsymbol{\varepsilon}' = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]$ tiene $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ y $Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Sigma$. Por lo tanto, los términos de error asociados con diferentes respuestas pueden correlacionarse.

Para establecer una notación conforme al modelo clásico de regresión lineal, sea $[z_{j0}, z_{j1}, \dots, z_{jr}]$ denote los valores de las variables predictoras para el j -ésimo ensayo, sea $\mathbf{Y}'_j = [Y_{j1}, Y_{j2}, Y_{j3}, \dots, Y_{jm}]$ ser las respuestas, y dejar $\boldsymbol{\varepsilon}'_j = [\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{j2}, \dots, \varepsilon_{jm}]$ ser los errores.

$$\mathbf{Z} \quad (n \times (r + 1)) = \begin{bmatrix} z_{10} & z_{11} & \dots & z_{1r} \\ z_{20} & z_{21} & \dots & z_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n0} & z_{n1} & \dots & z_{nr} \end{bmatrix}$$

En notación matricial, la matriz de diseño es el mismo que el del modelo de regresión de respuesta única. Las otras cantidades matriciales tienen contrapartes multivariadas. Colocar

$$\mathbf{Y} \quad (n \times m) = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1m} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nm} \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_{(1)} \vdots \mathbf{Y}_{(2)} \vdots \dots \vdots \mathbf{Y}_{(m)}]$$

$$\boldsymbol{\beta} \quad ((r + 1) \times m) = \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \dots & \beta_{0m} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \dots & \beta_{rm} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\beta}_{(1)} \vdots \boldsymbol{\beta}_{(2)} \vdots \dots \vdots \boldsymbol{\beta}_{(m)}]$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \quad (n \times m) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{nm} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} \vdots \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} \vdots \dots \vdots \boldsymbol{\varepsilon}_{(m)}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}'_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_n \end{bmatrix}$$

A. El modelo de regresión lineal multivariado. Las m observaciones en el j -ésimo ensayo tienen una matriz de covarianza $\Sigma = \{\sigma_{ik}\}$, pero observaciones de diferentes ensayos no están correlacionados. Aquí $\boldsymbol{\beta}$ y σ_{ik} son parámetros desconocidos; la matriz de diseño \mathbf{Z} tiene j -ésima fila $[z_{j0}, z_{j1}, \dots, z_{jr}]$. En pocas palabras, la i -ésima respuesta $\mathbf{Y}_{(i)}$ sigue el modelo de regresión lineal

$$\mathbf{Y} \quad (n \times m) = \mathbf{Z} \quad (n \times (r + 1)) \boldsymbol{\beta} \quad ((r + 1) \times m) + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (n \times m)$$

$$\text{con } E(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}) = \mathbf{0} \text{ y } \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}) = \sigma_{ik} \mathbf{I} \quad i, k = 1, 2, \dots, m \quad (2.35)$$

$$\mathbf{Y}_{(i)} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta}_{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.36)$$

con $\text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}) = \sigma_{ii} \mathbf{I}$. Sin embargo, los errores de *diferentes* respuestas en el *mismo* ensayo pueden correlacionarse. Dados los resultados \mathbf{Y} y los valores de las variables predictoras \mathbf{Z} con rango de columna completo, determinamos las estimaciones de mínimos cuadrados $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}$

exclusivamente de las observaciones $\mathbf{Y}_{(i)}$ sobre la i -ésima respuesta. De conformidad con la solución de respuesta única, tomamos

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}_{(i)} \quad (2.37)$$

Recolectando estas estimaciones univariadas de mínimos cuadrados, obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\beta}} &= [\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(1)} \quad \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(2)} \quad \dots \quad \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(m)}] = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'[\mathbf{Y}_{(1)} \quad \mathbf{Y}_{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{Y}_{(m)}] \\ \text{o } \widehat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para cualquier elección de parámetros $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_{(1)} \quad \mathbf{b}_{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{b}_{(m)}]$ la matriz de errores es $\mathbf{Y} - \mathbf{ZB}$. La matriz de suma de cuadrados y productos cruzados de errores es

$$\begin{aligned} &(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})'(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB}) \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{Y}_{(1)} - \mathbf{Zb}_{(1)})'(\mathbf{Y}_{(1)} - \mathbf{Zb}_{(1)}) & \dots & (\mathbf{Y}_{(1)} - \mathbf{Zb}_{(1)})'(\mathbf{Y}_{(m)} - \mathbf{Zb}_{(m)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{Y}_{(m)} - \mathbf{Zb}_{(m)})'(\mathbf{Y}_{(1)} - \mathbf{Zb}_{(1)}) & \dots & (\mathbf{Y}_{(m)} - \mathbf{Zb}_{(m)})'(\mathbf{Y}_{(m)} - \mathbf{Zb}_{(m)}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

La selección $\mathbf{b}_{(i)} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}$ minimiza la i -ésima suma diagonal de cuadrados $(\mathbf{Y}_{(i)} - \mathbf{Zb}_{(i)})'(\mathbf{Y}_{(i)} - \mathbf{Zb}_{(i)})$. Como consecuencia, $\text{tr}[(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})'(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})]$ se minimiza por la elección $\mathbf{B} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Además, la varianza generalizada $|(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})'(\mathbf{Y} - \mathbf{ZB})|$ se minimiza por las estimaciones de mínimos cuadrados $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$. Usando las estimaciones de mínimos cuadrados $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ podemos formar las matrices de valores predichos: $\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Z}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{Y}$ residuales:

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}} = [\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{Y} \quad (2.40)$$

Las condiciones de ortogonalidad entre los residuos, los valores pronosticados y las columnas de \mathbf{Z} , que se cumplen en la regresión lineal clásica, se cumplen en la regresión múltiple multivariada. Siguen desde $\mathbf{Z}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'] = \mathbf{Z}' - \mathbf{Z}' = 0$. Específicamente,

$$\mathbf{Z}'\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Z}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{Y} = 0 \quad (2.41)$$

por lo que los residuos $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(i)}$ son perpendiculares a las columnas de \mathbf{Z} . Además,

$$\widehat{\mathbf{Y}}'\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{Z}'[\mathbf{I} - \mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}']\mathbf{Y} = 0 \quad (2.42)$$

confirmando que los valores pronosticados $\hat{Y}_{(i)}$ son perpendiculares a todos los vectores residuales $\hat{\epsilon}_{(k)}$. Porque $\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{Y}} + \hat{\epsilon}$,

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = (\hat{\mathbf{Y}} + \hat{\epsilon})'(\hat{\mathbf{Y}} + \hat{\epsilon}) = \hat{\mathbf{Y}}'\hat{\mathbf{Y}} + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} + \mathbf{0} + \mathbf{0}'$$

o

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{Y}}'\hat{\mathbf{Y}} + \hat{\epsilon}'\hat{\epsilon}$$

$$\begin{pmatrix} \text{suma total de} \\ \text{cuadrados} \\ \text{y productos} \\ \text{cruzados} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{suma predicha de} \\ \text{cuadrados} \\ \text{y productos} \\ \text{cruzados} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{suma residual} \\ \text{(error)} \\ \text{de cuadrados} \\ \text{y productos} \\ \text{cruzados} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

La suma residual de cuadrados y productos cruzados también se puede escribir como

$$\hat{\epsilon}'\hat{\epsilon} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}'\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\beta}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\beta} \quad (2.44)$$

2.10.5. Modelos para series temporales estacionarias

Se analizan los conceptos básicos de una amplia clase de series de tiempo paramétricas mediante los modelos de promedio móvil autorregresivo (ARMA). Los modelos de media móvil autorregresiva (ARMA: por sus siglas en inglés). Estos modelos tienen una gran importancia en el modelado de procesos climáticos como la precipitación y NDVI.

2.10.5.1. Procesos Lineales Generales.

A partir de aquí, siempre usaremos $\{Y_t\}$ denota la serie temporal observada, $\{e_t\}$ representa una serie de ruido blanco no observado, es decir, una secuencia de variables aleatorias independientes, de media cero, y distribución idéntica. Para gran parte de este trabajo, la suposición de independencia podría ser reemplazada por la suposición más débil de que $\{e_t\}$ son variables aleatorias no correlacionadas, pero no se busca esa ligera generalidad. Un proceso lineal general, $\{Y_t\}$, es uno que se puede representar como una combinación lineal ponderada de términos de ruido blanco presentes y pasados como

$$Y_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots \quad (2.45)$$

Si el lado derecho de esta expresión es verdaderamente una serie infinita, entonces ciertas condiciones debe colocarse en los pesos- ψ para que el lado derecho sea significativo matemáticamente. Para este propósito, basta con suponer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i^2 < \infty \quad (2.46)$$

También se debe tener en cuenta que desde que $\{e_t\}$ es inobservable, no hay pérdida en la generalidad de la ecuación (2.46) si asumimos que el coeficiente de e_t es 1; efectivamente, $\Psi_0 = 1$. Un importante ejemplo no trivial al que volveremos a menudo es el caso en que el Ψ 's forma una secuencia exponencialmente decreciente como:

$$\Psi_j = \Phi^j$$

donde Φ es un número estrictamente entre -1 y $+1$. Entonces

$$Y_t = e_t + \Phi e_{t-1} + \Phi^2 e_{t-2} + \dots$$

Para este ejemplo,

$$E(Y_t) = E(e_t + \Phi e_{t-1} + \Phi^2 e_{t-2} + \dots) = 0$$

de modo que $\{Y_t\}$ tiene una media constante de cero. También,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \text{Var}(e_t + \Phi e_{t-1} + \Phi^2 e_{t-2} + \dots) \\ &= \text{Var}(e_t) + \Phi^2 \text{Var}(e_{t-1}) + \Phi^4 \text{Var}(e_{t-2}) + \dots \\ &= \sigma_e^2 (1 + \Phi^2 + \Phi^4 + \dots) \\ &= \frac{\sigma_e^2}{1 - \Phi^2} \quad (\text{sumando una serie geométrica}) \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) &= \text{Cov}(e_t + \Phi e_{t-1} + \Phi^2 e_{t-2} + \dots, e_{t-1} + \Phi e_{t-2} + \Phi^2 e_{t-3} + \dots) \\ &= \text{Cov}(\Phi e_{t-1}, e_{t-1}) + \text{Cov}(\Phi^2 e_{t-2}, \Phi e_{t-2}) + \dots \\ &= \Phi \sigma_e^2 + \Phi^3 \sigma_e^2 + \Phi^5 \sigma_e^2 + \dots \\ &= \Phi \sigma_e^2 (1 + \Phi^2 + \Phi^4 + \dots) \\ &= \frac{\Phi \sigma_e^2}{1 - \Phi^2} \quad (\text{otra vez sumando una serie geométrica}) \end{aligned}$$

De este modo

$$\text{Corr}(Y_t, Y_{t-k}) = \left[\frac{\Phi \sigma_e^2}{1 - \Phi^2} \right] / \left[\frac{\sigma_e^2}{1 - \Phi^2} \right] = \Phi$$

De manera similar, se puede encontrar $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \frac{\Phi^k \sigma_e^2}{1 - \Phi^2}$ y, por lo tanto

$$\text{Corr}(Y_t, Y_{t-k}) = \Phi^k \quad (2.47)$$

Es importante resaltar que el proceso así definido es estacionario. La estructura de auto covarianza depende solo del desfase temporal y no del tiempo absoluto. Para un proceso lineal general, $Y_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots$, los cálculos similares a los realizados anteriormente producen los siguientes resultados:

$$E(Y_t) = 0 \quad \gamma_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}) = \sigma_e^2 \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \Psi_{i+k} \quad k \geq 0 \quad (2.48)$$

con $\Psi_0 = 1$. Se puede obtener un proceso con una media μ distinta de cero, sumando μ al lado derecho de la Ecuación (2.45). Dado que la media no afecta las propiedades de covarianza de un proceso, asumimos una media cero hasta que comenzamos a ajustar los modelos a los datos.

2.10.5.2. Procesos de media móvil.

En el caso de que solo un número finito de los pesos ψ sean distintos de cero, tenemos lo que se denomina un proceso de promedio móvil. En este caso, cambiamos un poco la notación† y escribimos

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (2.49)$$

Llamamos a tal serie un promedio móvil de orden q y abreviamos el nombre a MA(q). La terminología media móvil surge del hecho de que Y_t se obtiene aplicando los pesos $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$ a las variables $e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-q}$ y luego moviendo los pesos y aplicándolos a $e_{t+1}, e_t, e_{t-1}, \dots, e_{t-q+1}$ para obtener Y_{t+1} y así sucesivamente. Los modelos de promedio móvil fueron considerados por primera vez por Slutsky (1927) y Wold (1938).

A. El proceso de la media móvil de primer orden. Se considera en detalle el simple pero importante proceso de promedio móvil de orden 1, es decir, la serie MA(1). En lugar de

especializar las fórmulas en la Ecuación (2.48), es instructivo volver a derivar los resultados.

El modelo es $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$. Desde solo un θ está involucrado, se elimina el subíndice redundante 1. Claramente $E(Y_t) = 0$ y $Var(Y_t) = \sigma_e^2(1 + \theta^2)$. Ahora

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-1} - \theta e_{t-2}) \\ &= Cov(-\theta e_{t-1}, e_{t-1}) = -\theta \sigma_e^2 \end{aligned}$$

y

$$Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-2} - \theta e_{t-3}) = 0$$

ya que no hay subíndices en común entre Y_t y Y_{t-k} . Similarmente, $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$ cuando sea $k \geq 2$; es decir, el proceso no tiene correlación más allá del retraso 1. Este hecho será importante más adelante cuando se elige modelos adecuados para los datos en la vida real. En resumen, para un modelo MA(1) $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$,

$$\left. \begin{aligned} E(Y_t) &= 0 \\ \gamma_0 = Var(Y_t) &= \sigma_e^2(1 + \theta^2) \\ \gamma_1 &= -\theta \sigma_e^2 \\ \rho_1 &= (-\theta)/(1 + \theta^2) \\ \gamma_k = \rho_k &= 0 \text{ para } k \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

Los procesos MA(1) no tienen autocorrelación más allá del retardo 1, pero al aumentar el orden del proceso, podemos se puede correlaciones de orden superior.

B. El proceso de la media móvil de segundo orden. Se considera el proceso de promedio móvil de orden 2:

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$$

Aquí

$$\gamma_0 = Var(Y_t) = Var(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2) \sigma_e^2$$

$$\gamma_1 = Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}, e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2} - \theta_2 e_{t-3})$$

$$= Cov(-\theta_1 e_{t-1}, e_{t-1}) + Cov(-\theta_1 e_{t-2}, \theta_2 e_{t-2})$$

$$= [-\theta_1 + (-\theta_1)(-\theta_2)] \sigma_e^2$$

$$= (-\theta_1 + \theta_1 \theta_2) \sigma_e^2$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t-2}) = \text{Cov}(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}, e_{t-2} - \theta_1 e_{t-3} - \theta_2 e_{t-4}) \\
&= \text{Cov}(-\theta_2 e_{t-2}, e_{t-2}) \\
&= -\theta_2 \sigma_e^2
\end{aligned}$$

Así, para un proceso MA(2),

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\
\rho_2 &= \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\
\rho_k &= 0 \text{ para } k = 3, 4, \dots
\end{aligned} \tag{2.51}$$

C. El proceso general de MA(q). Para el proceso general MA(q) $Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q}$, cálculos similares muestran que

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_e^2 \tag{2.52}$$

y

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{para } k = 1, 2, \dots, q \\ 0 & \text{para } k > q \end{cases} \tag{2.53}$$

donde el numerador de ρ_q es solo $-\theta_q$. La función de autocorrelación “se corta” después del desfase q ; es decir, es cero. Su forma puede ser casi cualquier cosa para los desfases anteriores. Otro tipo de proceso, el proceso autorregresivo, proporciona modelos para patrones de autocorrelación alternativos.

2.10.5.3. Procesos autorregresivos.

Los procesos autorregresivos son, como su nombre indica, regresiones sobre sí mismos. Específicamente, un proceso autorregresivo de p -ésimo orden $\{Y_t\}$ satisface la ecuación

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \tag{2.54}$$

El valor actual de la serie Y_t es una combinación lineal de los p valores pasados más recientes de sí misma más un término de “innovación” e_t que incorpora todo lo nuevo en la serie en el tiempo t que no se explica por los valores pasados. Así, para todo t , se considera

que e_t es independiente de $(Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots)$. Yule (1926) realizó el trabajo original sobre procesos autorregresivos.

A. El proceso autorregresivo de primer orden. Nuevamente, es instructivo considerar el modelo de primer orden, abreviado AR(1), en detalle. Se considera que la serie es estacionaria y satisface

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t \quad (2.55)$$

Donde se suprime el subíndice 1 del coeficiente ϕ por simplicidad. Como de costumbre, en estos capítulos iniciales, se considera que la media del proceso ha sido restada de modo que la serie media es cero. Las condiciones de estacionariedad se considerarán más adelante. Primero se toma las varianzas de ambos lados de la Ecuación (2.55) y se obtiene

$$\gamma_0 = \phi^2 \gamma_0 + \sigma_e^2$$

Resolviendo para γ_0 rendimientos

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \quad (2.56)$$

Se aprecia la implicación inmediata de que $\phi^2 < 1$ o eso $|\phi| < 1$. Ahora toma la ecuación (2.55), multiplica ambos lados por Y_{t-k} ($k = 1, 2, \dots$), y tomar los valores esperados

$$E(Y_{t-k}Y_t) = \phi E(Y_{t-k}Y_{t-1}) + E(e_t Y_{t-k})$$

o

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} + E(e_t Y_{t-k})$$

Como se supone que la serie es estacionaria con media cero, y como e_t es independiente de Y_{t-k} , se obtiene

$$E(e_t Y_{t-k}) = E(e_t)E(Y_{t-k}) = 0$$

y entonces

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1} \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.57)$$

Se configura $k=1$, obtenemos $\gamma_1 = \phi \gamma_0 = \phi \sigma_e^2 / (1 - \phi^2)$. Con $k=2$, se obtiene $\gamma_2 = \phi^2 \sigma_e^2 / (1 - \phi^2)$. Ahora es fácil ver que en general

$$\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \quad (2.58)$$

y por lo tanto

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.59)$$

Desde $|\phi| < 1$, la magnitud de la función de autocorrelación disminuye exponencialmente a medida que aumenta el número de rezagos, k . Si $0 < \phi < 1$, todas las correlaciones son positivas; si $-1 < \phi < 0$, la autocorrelación de retardo 1 es negativa ($\rho_1 = \phi$) y los signos de autocorrelaciones sucesivas alternan de positivo a negativo, con sus magnitudes decreciendo exponencialmente.

B. La versión de proceso lineal general del modelo AR (1). La definición recursiva del proceso AR(1) dada en la Ecuación (2.55) es extremadamente útil para interpretar el modelo. Para otros efectos, es conveniente expresar al Modelo AR(1) como un proceso lineal general como en la Ecuación (2.45). La definición recursiva es válida para todo t . Se usa esta ecuación con t reemplazada por $t - 1$, obtenemos $Y_{t-1} = \phi Y_{t-2} + e_{t-1}$. Sustituyendo esto en la expresión original da

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi(\phi Y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\ &= e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 Y_{t-2} \end{aligned}$$

Si se repite esta sustitución en el pasado, digamos $k - 1$ veces, se obtiene

$$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \dots + \phi^{k-1} e_{t-k+1} + \phi^k Y_{t-k} \quad (2.60)$$

Suponiendo $|\phi| < 1$ y dejando que k aumente sin límite, parece razonable (esto es casi una demostración rigurosa) de que se debería obtener la representación en serie infinita

$$Y_t = e_t + \phi e_{t-1} + \phi^2 e_{t-2} + \phi^3 e_{t-3} + \dots \quad (2.61)$$

Esto tiene la forma del proceso lineal general de la Ecuación (2.45) con, $\Psi_j = \phi^j$.

Tenga en cuenta que esta representación vuelve a enfatizar la necesidad de la restricción $|\phi| <$

1.

C. Estacionariedad de un Proceso AR (1). Se puede demostrar que, sujeto a la restricción de que e_t ser independiente de $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots$ y eso $\sigma_e^2 > 0$, la solución del AR(1) que define la recursividad $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$ Será estacionario si y sólo si $|\phi| < 1$. El requerimiento $|\phi| < 1$ suele llamarse **condición de estacionariedad** para el proceso AR (1) (Wei, 2005) aunque más que estacionariedad está involucrado.

En este punto, se debe notar que la función de autocorrelación para el proceso AR(1) se ha obtenido de dos maneras diferentes. El primer método se utiliza el proceso lineal general representación que conduce a la Ecuación (2.47). El segundo método se utiliza la definición recursión $Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t$ y el desarrollo de las Ecuaciones (2.57), (2.58), y (2.59). Una tercera derivación se obtiene multiplicando ambos lados de la Ecuación (2.60) por Y_{t-k} , tomando los valores esperados de ambos lados, y usando el hecho de que $e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-(k-1)}$ son independientes de Y_{t-k} . El segundo método debe tenerse especialmente en cuenta ya que se generalizará muy bien a procesos de orden superior.

D. El proceso autorregresivo de segundo orden. Ahora se considera la serie satisfactoria

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t \quad (2.62)$$

donde, como siempre, se asume que e_t es independiente de $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots$. Para discutir estacionariedad, se introduce el polinomio característico AR

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$$

y la correspondiente ecuación característica AR

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$$

E. Estacionariedad del Proceso AR (2). Se puede demostrar que, sujeto a la condición de que e_t es independiente de $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots$, existe una solución estacionaria de la Ecuación (2.62) si y sólo si las raíces de AR ecuación característica excede 1 en valor absoluto (módulo). A veces se dice que las raíces deben estar fuera del círculo unitario en el plano

complejo. Esta declaración se generaliza al caso de p-ésimo orden sin cambios (También se aplica en el caso de primer orden, donde la ecuación característica AR es simplemente $1 - \phi x = 0$ con raíz $1/\phi$, que excede 1 en valor absoluto si y solo si $\phi < 1$). En el caso de segundo orden, las raíces de la ecuación característica cuadrática se encuentran fácilmente.

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \quad (2.63)$$

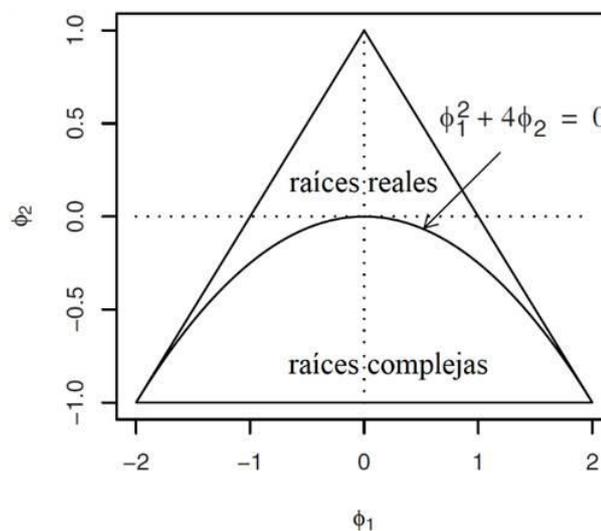
Por estacionariedad, requerimos que estas raíces excedan de 1 en valor absoluto. En el Anexo A, mostramos que esto será cierto si y sólo si se cumplen tres condiciones:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1 \quad \text{y} \quad |\phi_2| < 1 \quad (2.64)$$

Al igual que con el modelo AR(1), las llamamos condiciones de estacionariedad para el AR(2) modelo. Esta región de estacionariedad se muestra en la Figura 17.

Figura 17

Región de parámetros de estacionariedad para el proceso AR(2).



F. La función de autocorrelación para el proceso AR (2). Para derivar la función de autocorrelación para el caso AR(2), se toma la definición recursiva relación de la Ecuación (2.62), se multiplica ambos lados por Y_{t-k} , y toma las expectativas. Asumiendo estacionariedad, cero significa, y que e_t es independiente de Y_{t-k} , se obtiene:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.65)$$

o, dividiendo por γ_0 ,

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.66)$$

Las ecuaciones (2.65) y/o (2.66) suelen denominarse **ecuaciones de Yule-Walker**, especialmente el conjunto de dos ecuaciones se obtiene para $k = 1$ y 2 . Con $k = 1$ y se usa $\rho_0 = 1$ y $\rho_{-1} = \rho_1$, se obtiene y así $\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$ y entonces

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad (2.67)$$

Usando los valores ahora conocidos para ρ_1 (y ρ_0), la ecuación (2.66) se puede usar con $k = 2$ para obtener

$$\rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 = \frac{\phi_2(1-\phi_2) + \phi_1^2}{1-\phi_2} \quad (2.68)$$

Los valores sucesivos de ρ_k pueden calcularse fácilmente numéricamente a partir de la relación recursiva de la Ecuación (2.66). Aunque la Ecuación (2.66) es muy eficiente para calcular valores de autocorrelación numéricamente a partir de valores dados de ϕ_1 y ϕ_2 , para otros propósitos es deseable tener una fórmula más explícita para ρ_k . La forma de la solución explícita depende críticamente de las raíces de la ecuación característica $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$. Denotando los recíprocos de estas raíces por G_1 y G_2 , se muestra en el Anexo A, que

$$G_1 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} \quad \text{y} \quad G_2 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

Para el caso $G_1 \neq G_2$, se puede demostrar que tenemos

$$\rho_k = \frac{(1-G_2^2)G_1^{k+1} - (1-G_1^2)G_2^{k+1}}{(G_1-G_2)(1+G_1G_2)} \quad \text{para } k \geq 0 \quad (2.69)$$

Si las raíces son complejas (es decir, si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$), entonces ρ_k se puede reescribir como

$$\rho_k = R^k \frac{\sin(\Theta k + \phi)}{\sin(\phi)} \quad \text{para } k \geq 0 \quad (2.70)$$

Dónde $R = \sqrt{-\phi_2}$ y Θ y ϕ se definen por $\cos(\Theta) = \phi_1/2\sqrt{-\phi_2}$ y $\tan(\Theta) = [(1 - \phi_2)/(1 + \phi_2)]$.

Para completar, se nota que si las raíces son iguales ($\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$), entonces se obtiene:

$$\rho_k = \left(1 + \frac{1+\phi_2}{1-\phi_2}k\right) \left(\frac{\phi_1}{2}\right)^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

Una buena discusión de las derivaciones de estas fórmulas se puede encontrar en Fuller (1996). Los detalles específicos de estas fórmulas son de poca importancia para este estudio. Solo necesitamos que tenga en cuenta que la función de autocorrelación puede asumir una amplia variedad de formas. En todos los casos, la magnitud de ρ_k desaparece exponencialmente rápido a medida que aumenta el retraso k . En el caso de raíces complejas, ρ_k muestra un comportamiento de onda sinusoidal amortiguada con factor de amortiguamiento R , $0 \leq R \leq 1$, frecuencia Θ y fase ϕ .

G. La varianza para el modo AR (2). La varianza del proceso γ_0 se puede expresar en términos de los parámetros del modelo ϕ_1 , ϕ_2 y σ_e^2 como sigue: Tomando la varianza de ambos lados de la Ecuación (4.3.9) se obtiene

$$\gamma_0 = (\phi_1^2 + \phi_2^2)\gamma_0 + 2\phi_1\phi_2\gamma_1 + \sigma_e^2 \quad (2.72)$$

Se establece $k = 1$ en la Ecuación (2.65) da una segunda ecuación lineal para γ_0 y γ_1 , $\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1$, que se puede resolver simultáneamente con la Ecuación (2.72) para obtener

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{(1-\phi_2)\sigma_e^2}{(1-\phi_2)(1-\phi_1^2-\phi_2^2)-2\phi_2\phi_1^2} \\ &= \left(\frac{1-\phi_2}{1+\phi_2}\right) \frac{\sigma_e^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2} \end{aligned} \quad (2.73)$$

H. Los coeficientes ψ para el modelo AR (2). Los coeficientes ψ en la representación general del proceso lineal para una serie AR(2) son más complejos que para el caso AR(1). Sin embargo, se puede sustituir la representación lineal general del proceso usando la Ecuación

(2.45) para Y_t , para Y_{t-1} , y para Y_{t-2} en $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$. Si luego se igualan los coeficientes de e_j , se obtiene la relación:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= 1 \\ \psi_1 - \phi_1 \psi_0 &= 0 \\ \psi_j - \phi_1 \psi_{j-1} - \phi_2 \psi_{j-2} &= 0 \text{ para } j = 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Estos pueden resolverse recursivamente para obtener, $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = \phi_1$, $\psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$ etc. Estas relaciones proporcionan excelentes soluciones numéricas para los coeficientes ψ para valores numéricos dados de ϕ_1 y ϕ_2 . También se puede mostrar que, para $G_1 \neq G_2$, una solución explícita es

$$\psi_j = \frac{G_1^{j+1} - G_2^{j+1}}{G_1 - G_2} \quad (2.75)$$

Donde, como antes, G_1 y G_2 son los recíprocos de las raíces de la ecuación característica AR. Si las raíces son complejas, la ecuación (2.75) se puede reescribir como

$$\psi_j = R^j \left\{ \frac{\sin[(j+1)\Theta]}{\sin(\Theta)} \right\} \quad (2.76)$$

Una onda sinusoidal amortiguada con el mismo factor de amortiguamiento R y frecuencia Θ que en la ecuación (2.71) para la función de autocorrelación. Para completar, notamos que, si las raíces son iguales, entonces

$$\psi_j = (1 + j)\phi_1^j \quad (2.77)$$

I. El proceso autorregresivo general. Se considera ahora el modelo autorregresivo de p-ésimo orden:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t \quad (2.78)$$

con polinomio característico AR

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p \quad (2.79)$$

y ecuación característica AR correspondiente

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0 \quad (2.80)$$

Como se señaló anteriormente, suponiendo que e_t es independiente de $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots$ existe una solución estacionaria de la Ecuación (2.80) si y sólo si las p raíces de la característica AR cada ecuación excede 1 en valor absoluto (módulo). Se pueden usar otras relaciones entre raíces polinómicas y coeficientes para mostrar que las siguientes dos desigualdades son necesarias para la estacionariedad. Es decir, para que las raíces sean mayores que 1 en módulo, es necesario, pero no suficiente, que ambos

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1 \\ y |\phi_p| < 1 \end{array} \right\} \quad (2.81)$$

Se asume estacionariedad y medias cero, se puede multiplicar la Ecuación (2.78) por Y_{t-k} , tome las expectativas, divida por γ_0 y obtenga la importante relación recursiva.

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \text{para } k \geq 1 \quad (2.82)$$

Poniendo $k = 1, 2, \dots, y p$ en la Ecuación (2.82) y usando $\rho_0 = 1$ y $\rho_{-k} = \rho_k$, obtenemos las ecuaciones generales de Yule-Walker.

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ \vdots \\ \rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_3 \rho_{p-3} + \dots + \phi_p \end{array} \right\} \quad (2.83)$$

Dados valores numéricos para $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$, estas ecuaciones lineales se pueden se obtiene para obtener valores numéricos para $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$. Entonces la Ecuación (2.82) se puede utilizar para obtener valores numéricos para ρ_k en cualquier número de retrasos más altos. Señalando que

$$E(e_t Y_t) = E[e_t(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + e_t)] = E(e_t^2) = \sigma_e^2$$

Se multiplica la Ecuación (2.78) por Y_t , se toma las expectativas y encuentre

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_e^2$$

que, se usa $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$, se puede escribir como

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1 - \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_p} \quad (2.84)$$

y expresando la varianza del proceso γ_0 en términos de los parámetros $\sigma_e^2, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_P$, y los valores ahora conocidos de $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_P$. Por lo que, las soluciones explícitas para ρ_k son esencialmente imposible en esta generalidad, pero se puede decir que ρ_k será una combinación lineal de términos decrecientes exponencialmente (correspondientes a las raíces reales de la ecuación característica) y términos de onda sinusoidal amortiguada (correspondientes a las raíces complejas de la ecuación característica). Se asume estacionariedad, el proceso también se puede expresar en la forma de proceso lineal general de la Ecuación (2.45), pero los coeficientes ψ son funciones complicadas de la ecuación (2.45) de los parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_P$. Los coeficientes se pueden encontrar numéricamente; en el Anexo B.

2.10.5.4. El modelo de media móvil autorregresiva mixta.

Si se asume que la serie es en parte autorregresiva y en parte de media móvil, se obtiene un modelo de serie de tiempo bastante general. En general, si

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_P Y_{t-P} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q} \quad (2.85)$$

Se considera que $\{Y_t\}$ es un proceso de promedio móvil autorregresivo mixto de órdenes p y q , respectivamente; se abrevia el nombre a ARMA(p, q).

A. El modelo ARMA (1,1). La ecuación definitoria se puede escribir

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1} \quad (2.86)$$

Para derivar ecuaciones de tipo Yule-Walker, primero se nota que:

$$E(e_t Y_t) = E[e_t(\phi Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1})] = \sigma_e^2$$

y

$$\begin{aligned} E(e_{t-1} Y_t) &= E[e_{t-1}(\phi Y_{t-1} + e_t - \theta e_{t-1})] \\ &= \phi \sigma_e^2 - \theta \sigma_e^2 \\ &= (\phi - \theta) \sigma_e^2 \end{aligned}$$

Si se multiplica la Ecuación (2.86) por Y_{t-k} y se toma las expectativas, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \phi\gamma_1 + [1 - \theta(\phi - \theta)]\sigma_e^2 \\ \gamma_1 &= \phi\gamma_0 - \theta\sigma_e^2 \\ \gamma_k &= \phi\gamma_{k-1} \text{ para } k \geq 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$\gamma_0 = \frac{(1-2\phi\theta+\theta^2)}{1-\phi^2} \sigma_e^2 \quad (2.88)$$

y resolviendo la recursividad simple da

$$\rho_k = \frac{(1-\theta\phi)(\phi-\theta)}{1-2\phi\theta+\theta^2} \phi^{k-1} \quad \text{para } k \geq 1 \quad (2.89)$$

Se tiene en cuenta que esta función de autocorrelación decae exponencialmente a medida que aumenta el retraso k . El factor de amortiguamiento es ϕ , pero el decaimiento comienza desde el valor inicial ρ_1 , que también depende en θ . Esto contrasta con la autocorrelación AR (1), que también decae con la amortiguación factor ϕ pero siempre a partir del valor inicial $\rho_0 = 1$. Por ejemplo, si $\phi = 0,8$ y $\theta = 0,4$, entonces $\rho_1 = 0,523$, $\rho_2 = 0,418$, $\rho_3 = 0,335$ y así sucesivamente. Varias formas para ρ_k son posibles, dependiendo del signo de ρ_1 y del signo de ϕ . La forma de proceso lineal general del modelo se puede obtener de la misma manera que condujo a la Ecuación (4.3.8). Encontramos

$$Y_t = e_t + (\phi - \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} e_{t-j} \quad (2.90)$$

eso es,

$$\Psi_j = (\phi - \theta)\phi^{j-1} \quad \text{para } j \geq 1$$

Ahora deberíamos mencionar la condición de estacionariedad obvia, o equivalentemente la raíz de la ecuación característica AR $1 - \phi x = 0$ debe exceder la unidad en absoluto valor. Para el modelo general ARMA (p, q) , establecemos los siguientes hechos sin demostración: Sujeto a la condición de que e_t es independiente de $Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, \dots$, existe una solución estacionaria a la ecuación (2.85) si y solo si todas las raíces de la ecuación característica AR $\phi(x) = 0$ exceden la unidad en módulo. Si se cumplen las condiciones de

estacionariedad, el modelo también se puede escribir como proceso lineal general con coeficientes ψ determinados a partir de

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0 &= 1 \\ \Psi_1 &= -\theta_1 + \phi_1 \\ \Psi_2 &= -\theta_2 + \phi_2 + \phi_1\Psi_1 \\ &\vdots \\ \Psi_j &= -\theta_j + \phi_P\Psi_{j-P} + \phi_{P-1}\Psi_{j-P} + \dots + \phi_1\Psi_{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

donde tomamos $\Psi_j = 0$ para $j < 0$ y $\theta_j = 0$ para $j > q$. De nuevo se asume la estacionariedad, la función de autocorrelación puede demostrarse fácilmente que al satisfacer

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_P\rho_{k-P} \quad \text{para } k > q \quad (2.92)$$

Se pueden desarrollar ecuaciones similares para $k = 1, 2, 3, \dots, q$ que involucran $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$. Un algoritmo adecuado para el cálculo numérico de la función de autocorrelación completa se proporciona en el Anexo B.

2.10.5.5. Invertibilidad.

Se ha visto que el proceso MA(1) es exactamente la misma función de autocorrelación si θ se reemplaza por $1/\theta$. Esta falta de unicidad de los modelos MA, dada sus funciones de autocorrelación, deben abordarse antes de intentar inferir los valores de los parámetros de las series de tiempo observadas. Resultando que esta falta de unicidad está relacionada con la pregunta aparentemente no relacionada indicada a continuación. Un proceso autorregresivo siempre se puede expresar como un proceso lineal general a través de los coeficientes ψ , de modo que un proceso AR también puede considerarse como un proceso de promedio móvil de orden infinito. Sin embargo, para algunos propósitos, las representaciones autorregresivas también son convenientes.

Consolidando ideas, considerar un modelo MA(1):

$$Y_t = e_t - \theta e_{t-1} \quad (2.93)$$

Primero reescribiendo esto como $e_t = Y_t + \theta e_{t-1}$ y luego reemplazando t por $t - 1$ y sustituyendo por e_{t-1} arriba, y así obtener:

$$\begin{aligned}
 e_t &= Y_t + \theta(Y_{t-1} + \theta e_{t-2}) \\
 &= Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 e_{t-2}
 \end{aligned}$$

Si $|\theta| < 1$, se puede continuar esta sustitución "infinitamente" en el pasado y obtener la expresión [comparar con las Ecuaciones (2.60) y (2.61)]

$$e_t = Y_t + \theta Y_{t-1} + \theta^2 Y_{t-2} + \dots$$

o

$$Y_t = (-\theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} - \theta^3 Y_{t-3} - \dots) + e_t \quad (2.94)$$

Si $|\theta| < 1$, se ve que el modelo MA(1) puede invertirse en un modelo autorregresivo de orden infinito. Por lo que el modelo MA(1) es invertible si y sólo si $|\theta| < 1$. Para un modelo general MA (q) o ARMA(p, q), definimos la característica MA polinomio como

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_3 x^3 - \dots - \theta_q x^q \quad (2.95)$$

y la correspondiente ecuación característica MA

$$1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \theta_3 x^3 - \dots - \theta_q x^q = 0 \quad (2.96)$$

Se puede demostrar que el modelo MA (q) es invertible; es decir, hay coeficientes π_j tal que

$$Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 Y_{t-2} + \pi_3 Y_{t-3} + \dots + e_t \quad (2.97)$$

Si y sólo si las raíces de la ecuación característica MA exceden 1 en módulo. También se puede demostrar que solo hay un conjunto de valores de parámetros que producen un proceso MA invertible con una función de autocorrelación dada. Por ejemplo, $Y_t = e_t + 2e_{t-1}$ y $Y_t = e_t + 1/2 e_{t-1}$ tienen la misma función de autocorrelación, pero solo el segundo con raíz -2 es invertible. A partir de aquí, limitaremos nuestra atención a la clase físicamente sensible de modelos invertibles. Para un modelo ARMA(p, q) general, necesitamos tanto la estacionariedad como la invertibilidad.

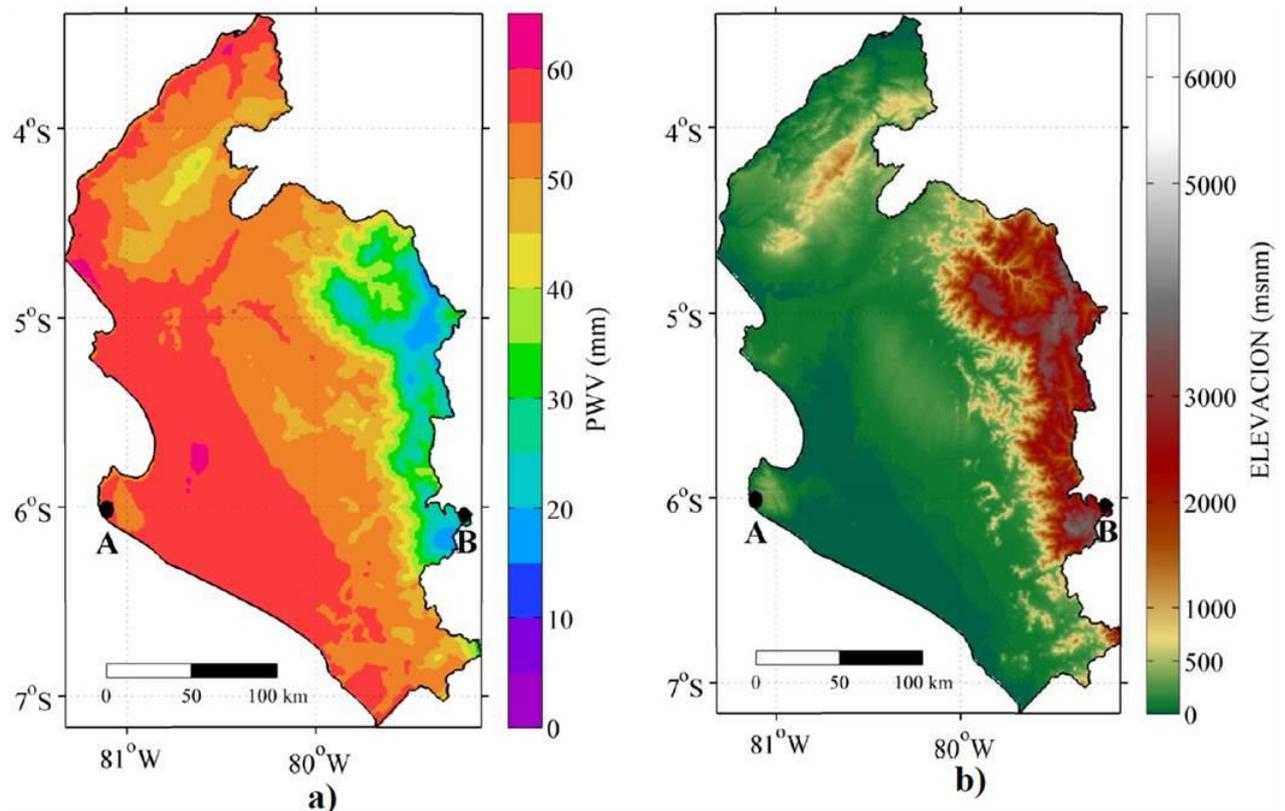
III. MÉTODO

3.1. Tipo de investigación

Esta investigación propuesta es un estudio observacional retrospectivo basado en datos históricos satelitales y datos *in situ* de estaciones terrestres. Con el fin de observar, documentar, y entender los procesos físicos del bosque seco y evaluar su impacto en la sociedad, la teledetección será una herramienta fundamental en estas investigaciones. Por lo que el presente proyecto está enmarcado en la línea de investigación de Teledetección por Satélite Aplicado al Estudio de los Recursos Naturales (Recursos Hídricos y Ecosistemas).

Figura 18

a) Mapa del vapor de agua precipitable. b) Mapa morfológico para la costa norte.



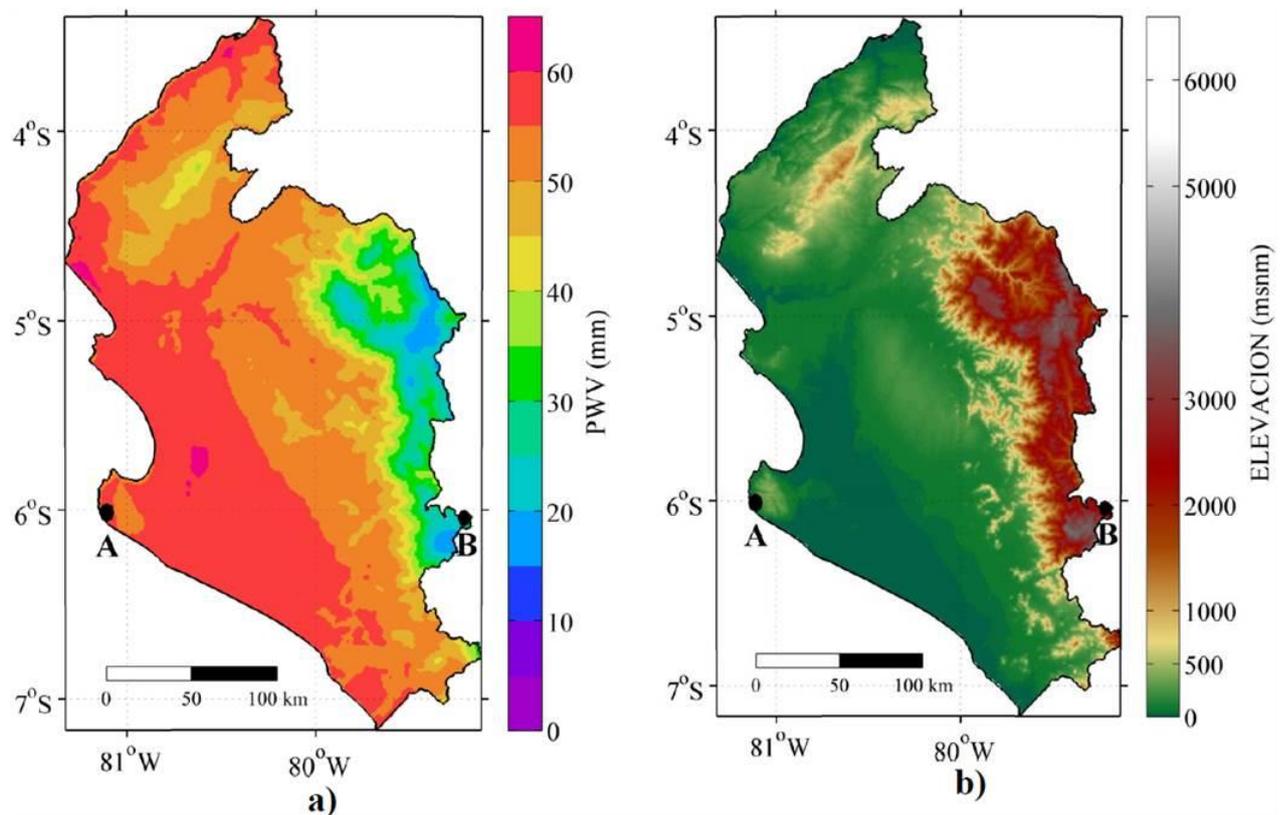
Nota. Tomado de (Guerrero, 2015)

3.2. Ámbito temporal y espacial

El ámbito espacial corresponde al área de la región Costa Norte de Perú. En la Figura 18 se muestra el mapa de ubicación de la Costa Norte de Perú también mencionada como Zona norte (regiones: Lambayeque, Piura y Tumbes). En la Figura 18a se muestra el mapa climatológico del vapor de agua precipitable (PWV: siglas en inglés), este mapa nos muestra las áreas que concentran la mayor cantidad de humedad atmosférica están por debajo de los 500 msnm. En la Figura 18b se muestra correspondiente el mapa morfológico de la costa norte. En la costa norte los cerros son de poca altitud. En el caso del ámbito temporal el período de estudio corresponde desde enero 2003 hasta diciembre de 2021.

Figura 19

a) Mapa del vapor de agua precipitable. b) Mapa morfológico para la costa norte.



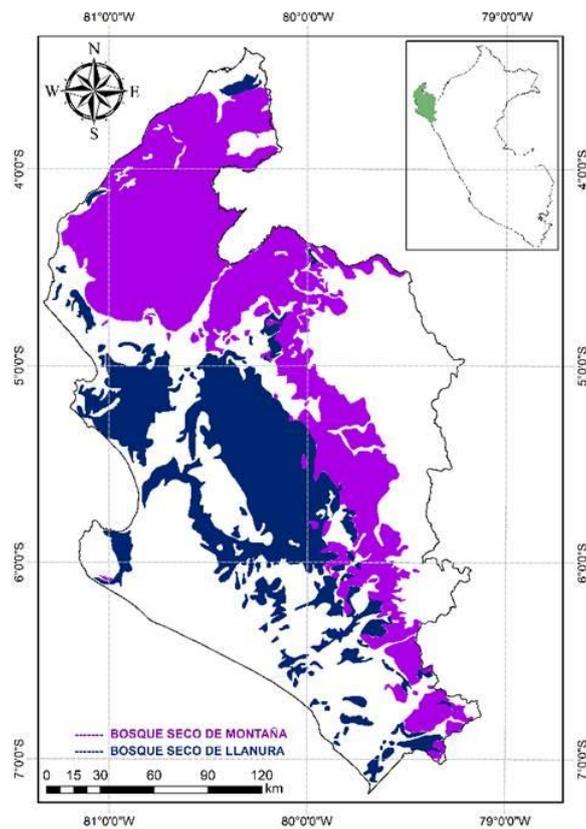
Nota. Tomado de (Guerrero, 2015)

3.3. Variables

Las variables del presente trabajo de investigación son variables físicas como: Temperatura superficial del mar y precipitación *in situ* (SENAMHI) y precipitación satelital (CHIRPS), para caracterizar a la vegetación usamos la variable biofísica denominado como Índice de vegetación de diferencia normalizada o NDVI. Consideramos a la temperatura y precipitación como variables independientes, y variable dependiente al NDVI.

Figura 20

Mapa de ubicación del bosque seco en la costa norte del Perú.



Nota. Imagen modificada. Fuente: Ministerio del Ambiente (MINAM, 2018)

3.4. Población y muestra

La población del presente trabajo de investigación se representa por todo el bosque seco en la costa norte de Perú (regiones: Lambayeque, Piura y Tumbes) el cual es caracterizado por el NDVI. El bosque seco es un ecosistema conformado por árboles en asociación con arbustos,

matorrales, cactáceas y herbazales efímeros, donde en 1 hectárea los árboles presentan una cobertura de copa igual o mayor al 10%, y una altura igual o superior a 2m (MINAM, 2018).

3.4.1. Información georreferenciada de bosques secos por el MINAM

El MINAM ha elaborado la capa de información de bosques secos al 2018 (Figura 19), esta capa está en formato ráster para la costa norte del Perú. Para revisar la información más detallada de la obtención del resultado de bosques secos en formato ráster y documentos se encuentran disponibles en el portal Web de geobosques administrado por el Programa Nacional de Conservación de Bosques para Mitigar el Cambio Climático (PNCBMCC): (<http://geobosques.minam.gob.pe/geobosque/view/index.php>)

3.5. Instrumentos

Los instrumentos utilizados en esta tesis son observaciones estimadas por sensores a bordo de distintos satélites, estos datos satelitales son productos adquiridos del sensor MODIS y la base de datos CHIRPS. Además, la temperatura superficial del mar mensual es proporcionada por la NOAA que es utilizada para determinar las características de la región oceánica Niño 1+2. Por otro lado, con el objetivo de validar los datos de precipitación satelital de CHIRPS, se utilizaron datos históricos de precipitación *in situ* adquiridos del SENAMHI.

3.5.1. Datos de NDVI

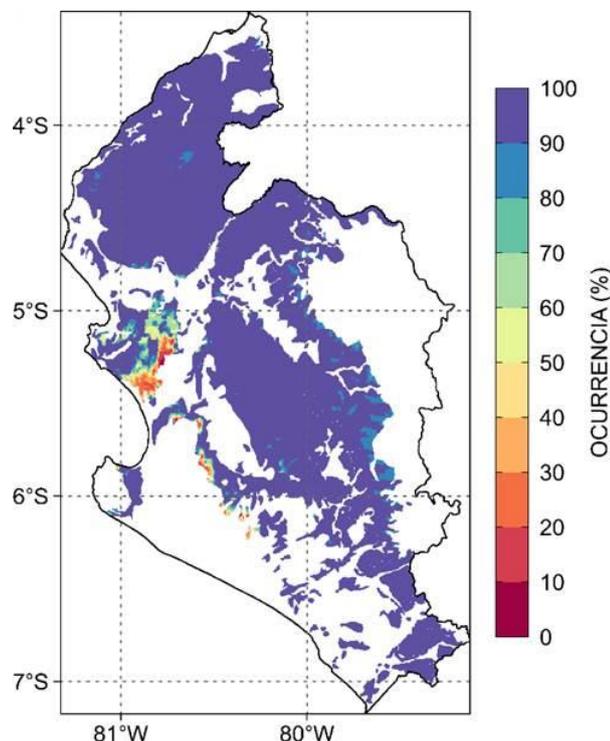
Entre los productos de datos MODIS estándar disponibles para los usuarios, se usa el NDVI compuesto de 16 días de entre los distintos productos de datos MODIS estándar disponibles para los usuarios, el compuesto de 16 días con una resolución espacial de 250 m adquirida el 1 de enero de 2003 hasta 31 de diciembre de 2021, versión 6.1. En este trabajo, utilizamos imágenes MOD13Q1 y MYD13Q1 de datos de espectrorradiómetro de imágenes de resolución moderada (MODIS: por sus siglas en inglés).

Para minimizar los ruidos inherentes a las diferencias geométricas en la imagen de satélite y a la falta de datos por el filtrado de calidad, se consideró que el análisis de

emparejamiento de píxeles con respecto a la ubicación de las estaciones meteorológicas del SENAMHI en el suelo se realizó utilizando un método de ventana móvil de 3×3.

Figura 21

Distribución espacial de ocurrencia de NDVI en el bosque seco para el periodo 2003 -2021.



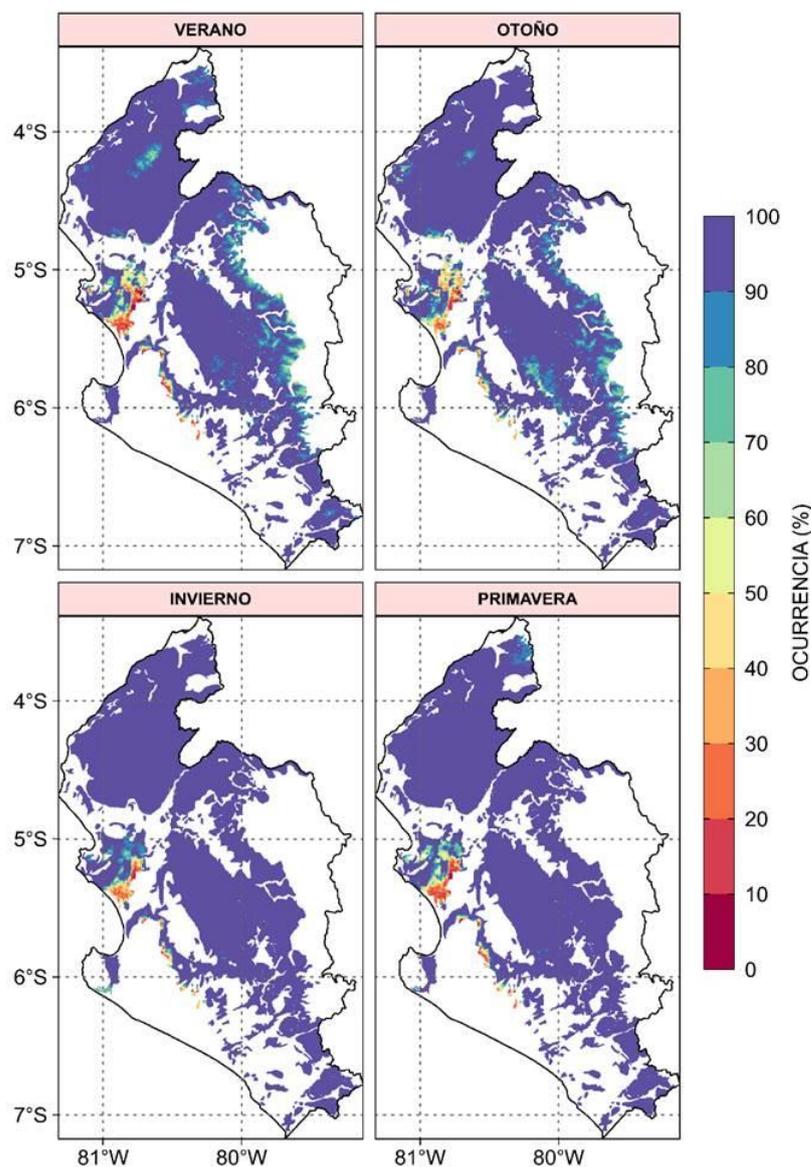
La productividad del cultivo específico del sitio se evalúa mediante los valores promedio de reflectancia de píxeles del producto NDVI. En el Anexo C se muestra el código elaborado en GEE (“*Google Earth Engine*”) donde se muestra los pasos para obtener el apilado mensual a partir de los datos de 16 días de las dos bases de datos de NDVI de TERRA y AQUA.

Se obtiene el mapa de distribución espacial de ocurrencia de NDVI de la costa norte del Perú para el periodo 2003-2021 (Figura 20), generado a partir de los promedios mensuales de NDVI (fusión de los datos NDVI/MODIS Terra y NDVI/MODIS Aqua) a una resolución espacial de 250 m x 250 m. Este mapa es de utilidad para mostrar las regiones con presencia de datos de NDVI en porcentaje que nos muestra las áreas que muestran menor y mayor presencia de datos por píxel expresado en porcentaje. También se genera los mapas de

ocurrencia por estaciones del año (Figura 21), generado a partir de los promedios mensuales de NDVI.

Figura 22

Distribución espacial de ocurrencia estacional del NDVI en el bosque seco para el periodo 2003 -2021.



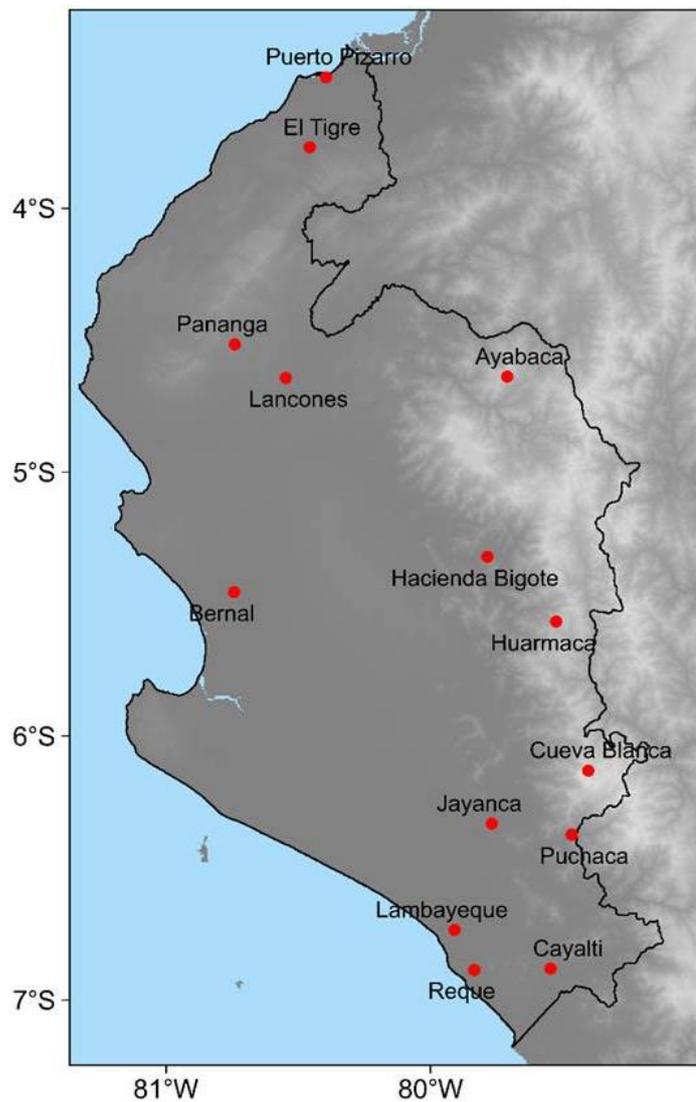
3.5.2. Datos satelitales de precipitación CHIRPS

En este trabajo se utiliza la base de datos producto de Precipitación infrarroja del Grupo de peligros climáticos con datos de la estación (CHIRPS: por sus siglas en inglés) v2.0. Es una

base de datos de precipitación disponible al público, contiene información desde 1981 hasta el presente y una extensión espacial, con datos únicamente en las zonas terrestres, comprendida entre las latitudes 50° S y 50° N y en todas las longitudes con una resolución de 0.05°. Las resoluciones temporales son días, pentadas, meses, décadas y años.

Figura 23

Ubicación de las estaciones meteorológicas del SENAMHI.



Para este estudio se utilizó la información mensual. Las fuentes de datos utilizadas en la creación de CHIRPS fueron: (1) CHPClim (del inglés Climate Hazards Precipitation Climatology); (2) Infrarrojo (IR) térmico geostacionario; (3) CHIRPS (del inglés Tropical

Rainfall Measuring Mission); (4) Modelo atmosférico de campos de precipitación del sistema de predicción climático de la NOAA (CFSv2); y (5) Observaciones *in situ* de precipitación obtenidas de varias fuentes incluidos servicios meteorológicos estadounidenses y regionales (Funk et al., 2015). En el Anexo D se muestra el código elaborado en GEE, código elaborado para la descarga y preprocesamiento de precipitación CHIRPS, los datos de precipitación satelital son de libre disposición desde el siguiente enlace: <https://iridl.ldeo.columbia.edu/SOURCES/.UCSB/.CHIRPS/?Set-Language=es>

3.5.3. Datos *in situ* de precipitación SENAMHI

Se descargó los datos de precipitación pluvial de 14 estaciones meteorológicas ubicadas en la costa norte, para un periodo de 1981- 2021. La Tabla 2 muestra las coordenadas geográficas y la altura de dichas estaciones, los datos de precipitación *in situ* son de libre disposición desde el portal web del SENAMHI, el cual es: <https://www.senamhi.gob.pe/site/descarga-datos/>

Tabla 2

Coordenadas de las estaciones del SENAMHI.

Estaciones	Latitud (°S)	Longitud (°W)	Altitud (msnm)	Departamento
Puerto Pizarro	3°30'13.67"	80°23'42.14"	6	Tumbes
Lambayeque	6° 44' 3.75"	79° 54' 35.4"	18	Lambayeque
Bernal	5°27' 16.18"	80°44' 33.44"	11	Piura
Reque	6°53' 10.07"	79° 50' 7.8"	13	Lambayeque
El Tigre	3° 46' 7.32"	80° 27' 24.8"	37	Tumbes
Cayalti	6°52' 50.86"	79°32' 49.25"	90	Lambayeque
Jayanca	6°19' 53.73"	79° 46' 7.29"	78	Lambayeque
Lancones	4°38' 34.43"	80°32' 49.78"	136	Piura
Pananga	4°30' 56.03"	80° 44' 22"	360	Piura

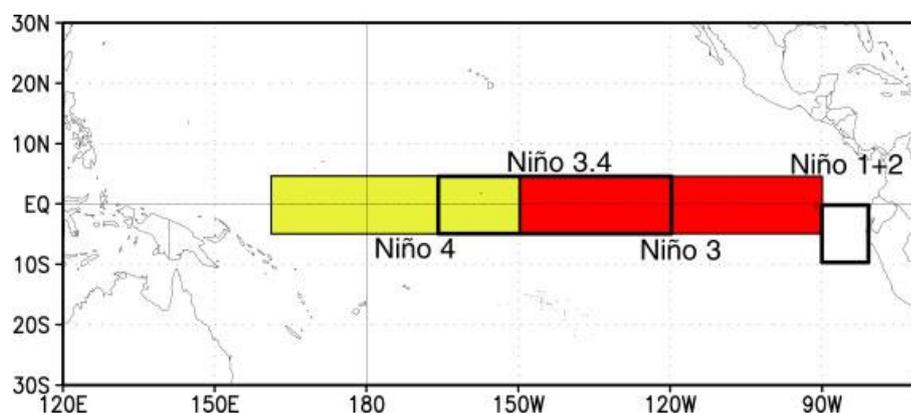
Hacienda Bigote	5° 19' 15.2"	79° 47' 8.47"	198	Piura
Puchaca	6°22' 24.72"	79° 28' 0.23"	339	Lambayeque
Huarmaca	5° 33' 57.1"	79° 31' 31.6"	2171	Piura
Ayabaca	4°38' 15.92"	79°42' 38.76"	2648	Piura
Cueva Blanca	6° 7' 52.68"	79° 24' 16.2"	3300	Lambayeque
Link de estaciones meteorológicas del SENAMHI: https://www.senamhi.gob.pe/mapas/mapa-estaciones/mapadepesta1.php?				

3.5.4. Datos de temperatura superficial del mar (TSM)

Los datos de TSM para la región del Niño 1+2 (0-10°S, 90°W-80°W) son obtenidos de la NOAA (Figura 23). Este parámetro TSM es derivado de la base de datos conocido como Temperatura Superficial del Mar Reconstruida Extendida (ERSST: por sus siglas en inglés) (Estudio Nacional del Fenómeno El Niño [ENFEN], 2012), ERSST es una reconstrucción mensual a nivel global de los datos de TSM derivados de boyas y barcos en el mundo, estos datos de TSM Niño 1+2 son de libre acceso para su descarga de: <https://www.ncei.noaa.gov/access/monitoring/enso/sst>.

Figura 24

Imagen de la región Niño 1+2.



Nota. Obtenido del sitio web de la NOAA

(https://www.cpc.ncep.noaa.gov/products/analysis_monitoring/ensostuff/nino_regions.shtml)

3.5.5. Reporte de sequias y eventos el Niño

El niño costero fue reportado en el año 2017 por el ENFEN (https://www.dhn.mil.pe/Archivos/Oceanografia/ENFEN/nota_tecnica/01-2017.pdf). El

SENAMHI reporta sequía en los departamentos altoandinos del Perú en los años 2004, 2005 y 2016 (<https://www.senamhi.gob.pe/load/file/01401SENA-78.pdf>).

3.6. Procedimientos

Para desarrollar la presente investigación se ha seguido los pasos metodológicos siguientes

A. Estudios preliminares. Revisión bibliográfica de los estudios realizados sobre los bosques secos en el mundo y en el Perú.

B. Adquisición de datos. Los datos satelitales utilizados son productos generados por sensores a bordo de satélites. El Índice de Vegetación de Diferencia Normalizada (NDVI) es generado por el sensor MODIS el cual es un compuesto de 16 días con una resolución espacial de 250 m versión 6.1. La temperatura superficial del mar (TSM) mensual es proporcionada por la NOAA que de la región oceánica Niño 1+2 (0-10°S, 90°W-80°W). Se realizó una comparación de datos de precipitación mediante el cálculo del promedio mensual de todas las estaciones meteorológicas del SENAMHI en el periodo 1981-2013 y así obtener la serie de tiempo promedio in situ de SENAMHI, dicha serie se usó para correlacionar con los datos de precipitación satelital de CHIRPS en el mismo periodo mensual para analizar la idoneidad de utilizar datos de precipitación satelital para esta investigación en toda el área de la costa norte.

C. Delimitación del área de estudio. Se ha utilizado la capa de información del bosque Seco de la costa norte de Perú el cual fue elaborado por el MINAM. Esta información se encuentra en formato ráster. El bosque seco esta dividido en bosque seco llanura (Azul oscuro)

y bosque seco montaña(violeta) (Figura 19). Se puede revisar esta información de los bosques Secos en formato raster en el portal Web de geobosques administrado por el Programa Nacional de Conservación de Bosques para Mitigar el Cambio Climático (PNCBMCC): (<http://geobosques.minam.gob.pe/geobosque/view/index.php>).

D. Procesamiento y análisis de datos. Generación de las series de tiempo de los datos (producto NDVI, Precipitación satelital CHIRPS y temperatura superficial de mar en la región Niño 1+2). Generación de la climatología del NDVI Y precipitación satelital para realizar el análisis. Generación de la estacionalidad del NDVI Y precipitación satelital para las cuatro estaciones meteorológicas: verano (diciembre-enero-febrero), otoño (marzo-abril-mayo), invierno (junio-julio-agosto) y primavera (septiembre-octubre-noviembre). Generación de la climatología del NDVI Y precipitación satelital para realizar el análisis. Generación de la estacionalidad del NDVI Y precipitación satelital para las cuatro estaciones meteorológicas: verano (diciembre-enero-febrero), otoño (marzo-abril-mayo), invierno (junio-julio-agosto) y primavera (septiembre-octubre-noviembre). Generación de la Densidad espectral de potencia del NDVI, precipitación satelital CHIRPS y la temperatura superficial del mar. Cálculo del Diagrama de Hovmöller interanual del NDVI y Precipitación e interanual de la anomalía estandarizada del NDVI y precipitación satelital CHIRPS. Cálculo de la Anomalía estandarizada y la Anomalía estandarizada estacional de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura Niño 1+2. Aplicación del Modelo de regresión lineal múltiple de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura Niño 1+2. Aplicación del Modelo de regresión lineal múltiple de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura Niño 1+2. Correlación cruzada de NDVI, TSM y precipitación. Aplicación de los Modelos ARIMA a la anomalía estandarizada del NDVI con las variables exógenas anomalía estandarizada de precipitación satelital y temperatura superficial del mar en la región Niño 1+2.

E. Documentación de resultados.

3.7. Análisis de datos

La metodología que usamos para alcanzar los objetivos propuestos consiste fundamentalmente en el uso de herramientas estadísticas. Estas nos permiten realizar un análisis de la variabilidad espacial y temporal de los Bosques secos. El tratamiento estadístico básico (ej. promedio espacial) de las variables meteorológicas constituye el paso inicial en los estudios climatológicos. Utilizamos QGIS, GEE para todos los análisis geoespaciales y R, Octave (<https://octave.org/>) para todos los análisis estadísticos de los valores extraídos.

3.7.1. Convalidación y equiparación de los datos de precipitación *in situ* y satelital

Para confirmar la exactitud de los datos de precipitación satelital CRIRPS dentro de la costa norte, éstos se corroboran con los datos *in situ* de las 14 estaciones meteorológicas del SENAMHI empleando el siguiente criterio: teniendo la ubicación geográfica (Tabla 2) de cada una de las estaciones se ubicó en las imágenes CHIRPS y así obtener la serie temporal de precipitación en las coordenadas geográficas.

3.7.2. Cálculo de la anomalía estandarizada de las variables

Un método para eliminar el período en una serie de tiempo y hacerla estacionaria es usar la estandarización. La estandarización también tiene la ventaja de reducir el efecto de los saltos en una serie temporal y normaliza la serie temporal hasta cierto punto. Este método se puede aplicar tanto en el modelado estadístico como en el de inteligencia artificial y a menudo, se usa para limitar los datos a un rango conocido antes de realizar el ejercicio de modelado. Se ha demostrado que la normalización de los datos dentro de un rango determinado antes del modelado produce mejores resultados en algunos casos en los que los datos abarcan varios órdenes de magnitud. En este método, la serie original, con la eliminación de la media y la desviación estándar de la siguiente manera, se convierte en una serie de tiempo con media cero y desviación estándar de uno.

$$Std = \frac{x(t) - \bar{x}}{S_d}$$

Donde $x(t)$, S_d y \bar{x} son el valor observado, la desviación estándar y la media de la serie principal, respectivamente para las muestras. El valor Std resultante es la serie temporal transformada. Si consideramos el promedio y la desviación estándar estacional, la anomalía estandarizada se presenta de la siguiente forma, donde $SStd$ son los resultados de la estandarización estacional, $x(t, i)$ es la muestra en el t -ésimo año y la i -ésima temporada, si $\bar{x}(i)$ es la media de la i -ésima temporada y $S_d(i)$ es la desviación estándar de la i -ésima temporada. (Bonakdari y Zeynoddin, 2022).

$$SStd = \frac{x(t, i) - \bar{x}(i)}{S_d(i)}$$

3.7.3. Resumen del enfoque de análisis espectral estándar

En Emery y Thomson (2014) se resumen los pasos para las estimaciones de PSD, para la serie temporal $y(t)$ se pueden obtener de la siguiente manera utilizando los enfoques estándar de autocorrelación y periodograma:

1. Eliminar la media y la tendencia de la serie temporal. Si no se elimina la tendencia, se puede generar energía (potencia) espuria en frecuencias bajas. Elimine los "picos" obvios causados por respuestas erráticas del sensor u otras formas de fallas en la toma de datos. Eliminar picos no es tan fácil como parece. Sin embargo, si no se tienen en cuenta en la serie temporal original, los picos pueden dar lugar a distribuciones espectrales erróneas.

2. Si se va a utilizar el promedio de bloques para mejorar la confiabilidad estadística de las estimaciones espectrales (es decir, para aumentar el número de DoF) (DoF del inglés *degrees of freedom*), divida la serie de datos en M bloques secuenciales de N' valores de datos cada uno, donde $N' = N/M$. Según el tipo de ventana que se vaya a aplicar, los bloques secuenciales pueden tener hasta un 50% de superposición.

3. Para reducir parcialmente los efectos finales (fenómeno de Gibbs) o para aumentar la longitud de la serie a una potencia de dos para el análisis FFT, complete los datos con $K \leq N$ ceros. También completar el registro con ceros si desea aumentar la resolución de frecuencia o centrar las estimaciones espectrales en bandas de frecuencia específicas. Para reducir aún más los efectos finales y la fuga del lóbulo lateral, disminuye la serie temporal utilizando una ventana de Hanning (coseno elevado), una ventana de Kaiser-Bessel u otra ventana adecuada.

4. Calcule las transformadas de Fourier, $Y(f_k)$, $k= 0, 1, 2, \dots, N - 1$, para la serie de tiempo (por conveniencia, hemos tomado el número de valores de relleno como $K=0$). Para datos segmentados por bloques, calcule las transformadas de Fourier, $Y_m(f_k)$, para cada uno de los M bloques ($m = 1, \dots, M$) donde $k= 0, 1, \dots, N'-1$ y $N' < N$. Para reducir la varianza asociada con la disminución en el paso 3, las transformaciones se pueden calcular para segmentos superpuestos.

5. Volver a escalar los espectros para tener en cuenta la pérdida de "energía" durante la aplicación de la ventana. Es decir, ajuste el factor de escala de $Y(f_k)$ (o $Y_m(f_k)$ en el caso de un tamaño de bloque más pequeño particionado) para dar cuenta de la reducción energía espectral debido a la disminución en el paso 3. Para la ventana de Hanning, multiplique la amplitud de las transformadas de Fourier por $\sqrt{8/3}$. Los factores de cambio de escala son distintos dependiendo del tipo de ventana usada.

6. Calcule la PSD sin procesar para la serie de tiempo (o para cada bloque) donde para las estimaciones de densidad espectral bilateral:

$$S_{yy}(f_k) = \frac{1}{N\Delta t} [Y^*(f_k)Y(f_k)], k = 0,1,2, \dots, N - 1 \quad (\text{sin promediar bloques})$$

$$S_{yy}(f_k; m) = \frac{1}{N\Delta t} [Y_m^*(f_k)Y(f_k)], k = 0,1,2, \dots, N' - 1$$

(promedio de bloque) y para el espectral unilaterales estimaciones de densidad

$$G_{yy}(f_k) = \frac{2}{N\Delta t} [Y^*(f_k)Y(f_k)], k = 0,1,2, \dots, N/2 \quad (\text{sin promediar bloques})$$

$$G_{yy}(f_k; m) = \frac{2}{N\Delta t} [Y_m^*(f_k)Y(f_k)], k = 0,1,2, \dots, N'/2 \quad (\text{promedio de bloques})$$

7. En el caso de los datos segmentados por bloques, promedie las estimaciones de densidad espectral sin procesar de los M bloques de datos, banda de frecuencia por banda de frecuencia, para obtener el periodograma suavizado para $S_{yy}(f_k)$ o $G_{yy}(f_k)$. Recuerde, la compensación por una mayor suavización (más DoF) es una disminución en la resolución de frecuencia.

8. Incorpore límites de confianza del 80, 90 y/o 95 % en los gráficos espectrales para indicar la confiabilidad estadística de los picos espectrales. La mayoría de los autores utilizan los intervalos de confianza del 95%.

3.7.4. Resumen del enfoque de análisis de componentes principales

La siguiente metodología que fue usada por Albuquerque (2017), para obtener las componentes principales de la matriz de una matriz de datos (caso series de tiempo mensuales) I se construye la matriz de datos a partir de las series de tiempo mensuales, agrupándolas en columnas

II Se estandariza (anomalía estandarizada) cada columna de la matriz de datos.

Se obtiene la matriz de datos

$$X = \begin{matrix} & \text{estaciones} \rightarrow \\ \begin{bmatrix} y_1(1) & \cdots & y_P(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(N) & \cdots & y_P(N) \end{bmatrix} & \downarrow \text{ tiempo} \end{matrix}$$

III Se obtiene la matriz de covarianza

IV Con la matriz de covarianza evaluamos el problema de los eigenvalores y eigenvectores.

V Para obtener las series de tiempo del k-ésimo PCA se utiliza los autovectores encontrados, para obtener las Componentes Principales (PC)

$$PC^k(t) = \sum_{m=1}^M E_m^k \cdot X_m(t)$$

VI Obtenemos el porcentaje de varianza explicada para cada componente principal (PC^k).

$$\%varianza = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^k \lambda_k} * 100$$

3.7.5. Diagrama de Hovmöller

Un tipo especial de imagen llamado Diagrama de Hovmöller permite a los investigadores de ciencias ambientales condensar los mapas de un mes o año en una sola imagen. Un Hovmöller muestra el tiempo en un eje de una imagen y la latitud o la longitud en el otro (Hovmöller, 1949).

3.7.6. Coeficiente de variación (CV)

Es un cociente es sencillo se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$CV = \frac{S_x}{|\bar{X}|} \cdot 100\%$$

Donde S_x y \bar{X} son la desviación típica y la media del conjunto de observaciones, CV muestra el grado de variabilidad en relación con la media de la población (Wilks, 2006).

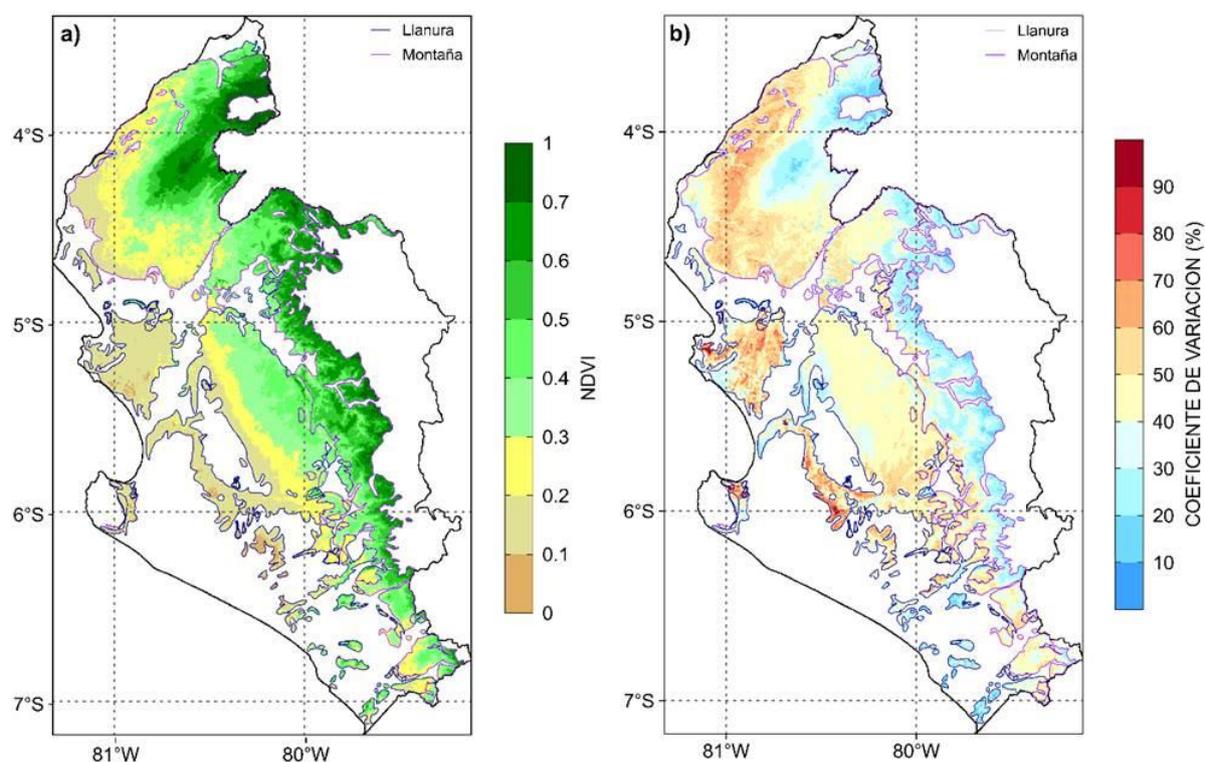
IV: RESULTADOS

4.1. Distribución espacial promedio de NDVI

Se obtiene el mapa de distribución espacial promedio de NDVI de la costa norte del Perú para el periodo 2003-2021 (Figura 24a), generado a partir de los promedios mensuales de NDVI (fusión de los datos NDVI/MODIS Terra y NDVI/MODIS Aqua) a una resolución espacial de 250 m x 250 m.

Figura 25

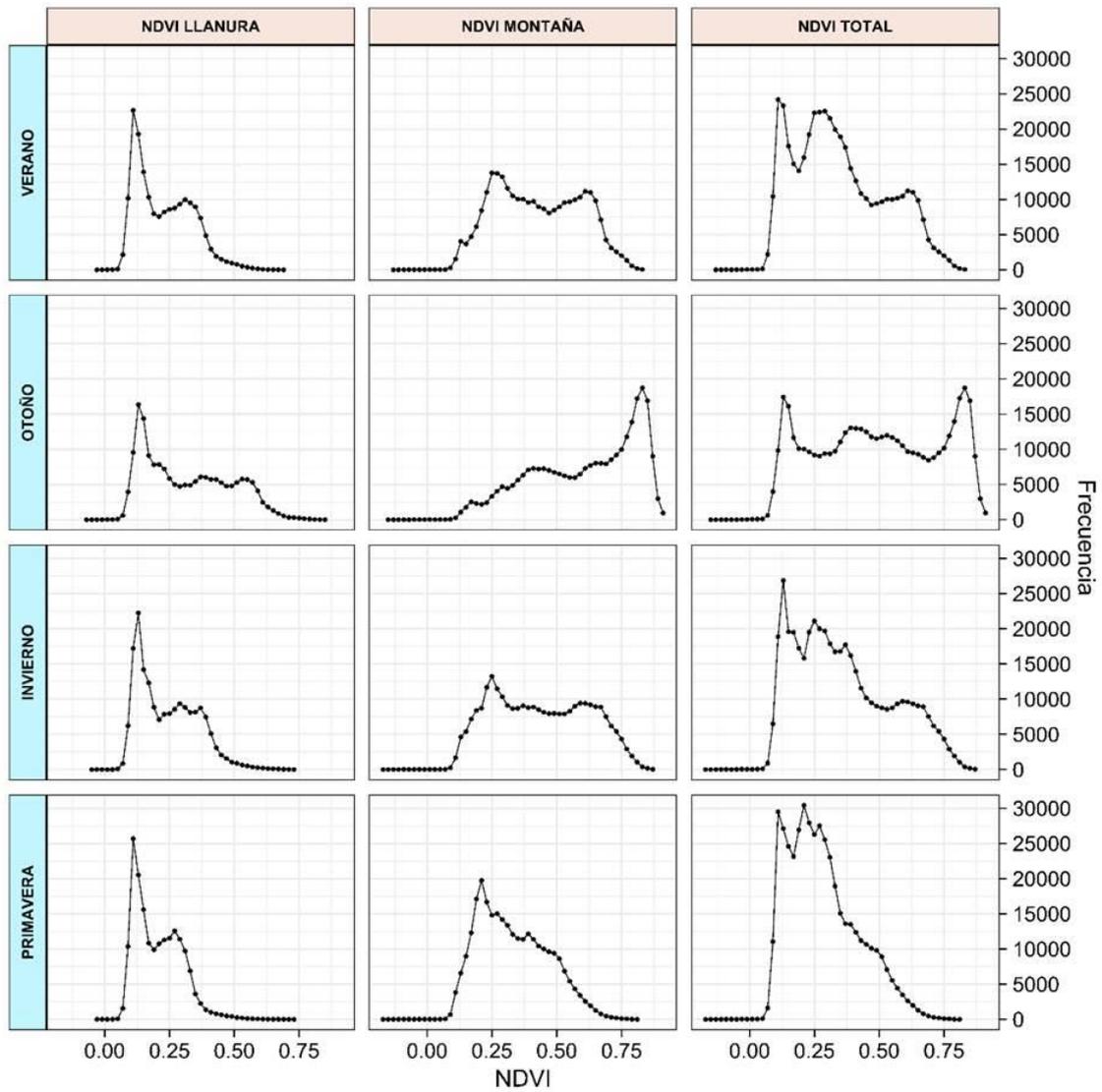
Distribución espacial promedio de NDVI y su coeficiente de variación del bosque seco para el periodo 2003 -2021.



Este mapa es de utilidad para ubicar las regiones con presencia de vegetación relacionada a la ecorregión del Bosque seco Tumbes-Piura, también se ha generado el mapa de coeficiente de variación de NDVI que nos muestra las áreas que muestran menor y mayor variabilidad espacial expresado en porcentaje (Figura 24b).

Figura 26

Histogramas de la distribución espacial promedio estacional de NDVI del bosque seco para el periodo 2003 -2021.

**Figura 27**

Distribución espacial promedio estacional de NDVI del bosque seco para el periodo 2003 - 2021.

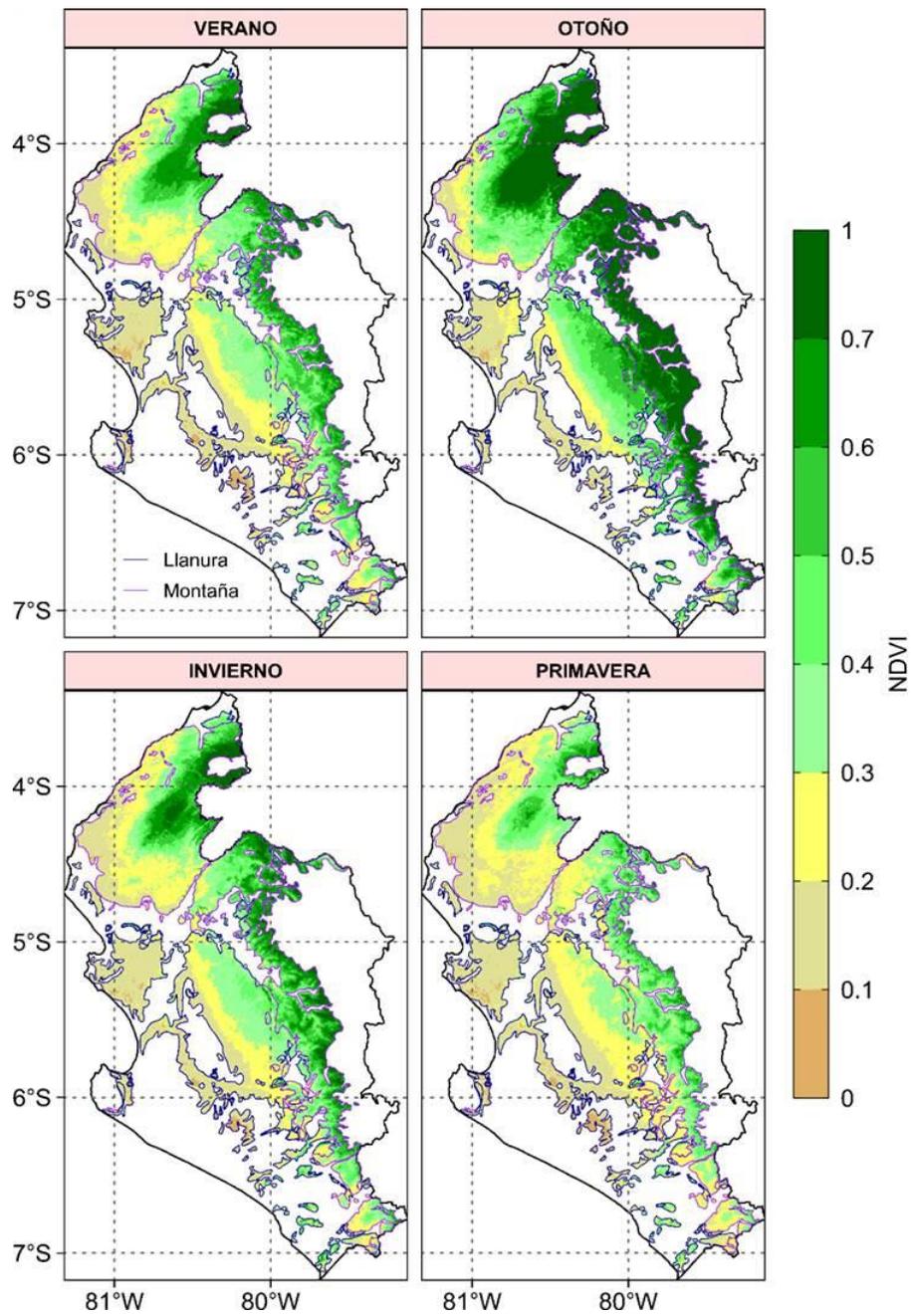
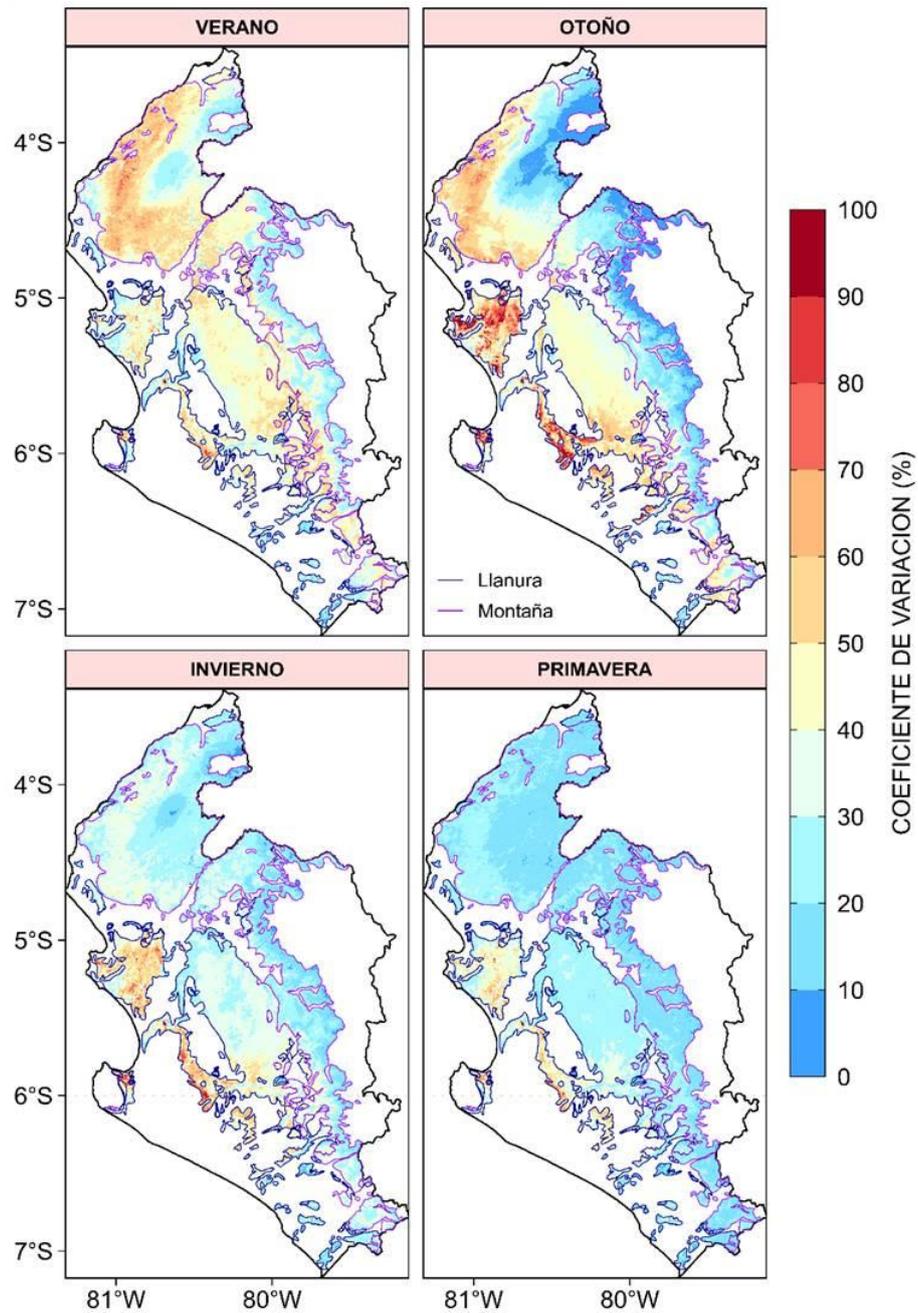


Figura 28

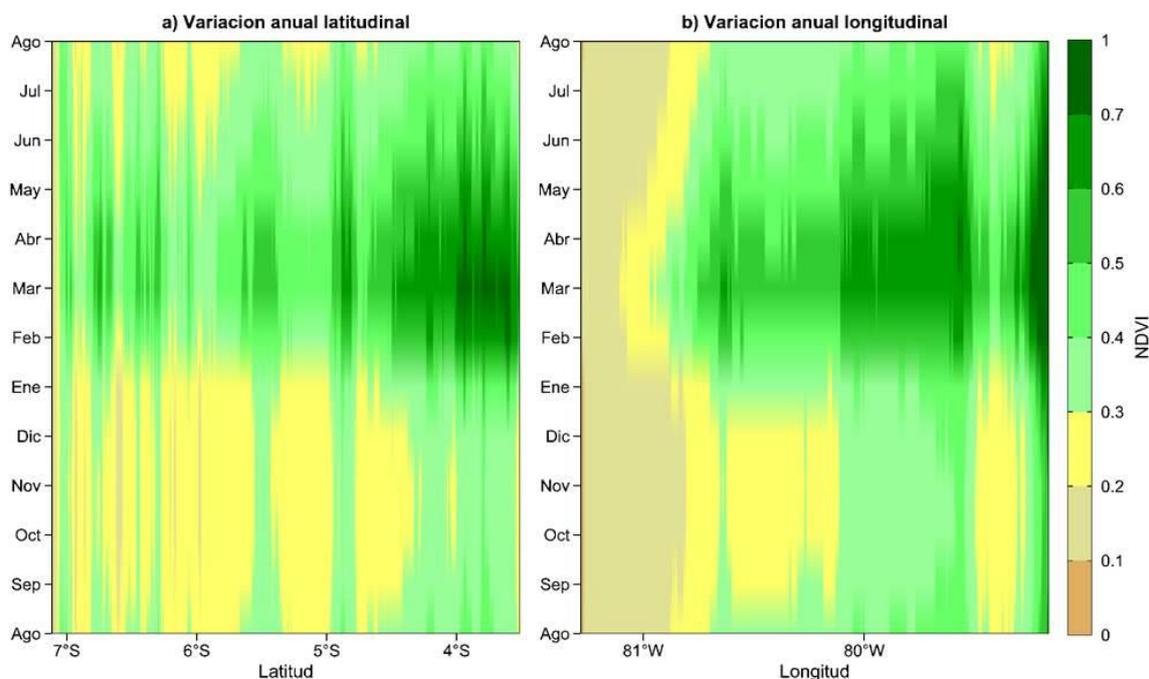
Distribución espacial promedio estacional del coeficiente de variación de NDVI del bosque seco para el periodo 2003 -2021.



La Figura 26 muestra la distribución espacial promedio del NDVI para las cuatro estaciones meteorológicas: verano (diciembre-enero-febrero), otoño (marzo-abril-mayo), invierno (junio-julio-agosto) y primavera (septiembre-octubre-noviembre). La franja de NDVI en la vecindad de $[0.2 \leq \text{NDVI} \leq 0.3]$ forma un límite invariante entre el desierto y el bosque. Los mapas muestran variación apreciable en zonas de vegetación ($\text{NDVI} \geq 0.4$). Las zonas cercanas a la franja mencionada muestran un marcado comportamiento estacional. Hay algunas zonas de vegetación permanente caracterizadas por un $\text{NDVI} \geq 0.7$.

Figura 29

Diagrama de Hovmöller estacional del NDVI del bosque seco total para el periodo 2003 - 2021.



La Figura 27 muestra la distribución espacial promedio estacional del coeficiente de variación de NDVI en el área de bosque seco para el periodo 2003 -2021, se observa que las áreas de menor variabilidad se encuentran en la parte oriental de la costa norte aproximadamente a unos 500 msnm cuyos valores oscilan entre 0 y 30%, en la estación de primavera se observa menor variabilidad espacial del NDVI en el área de bosque seco, mientras que las áreas de mayor variabilidad de la vegetación se encuentra en las proximidades de la costa sobre todo en la estación de otoño.

Figura 30

Diagrama de Hovmöller estacional del NDVI del bosque seco llanura para el periodo 2003 - 2021.

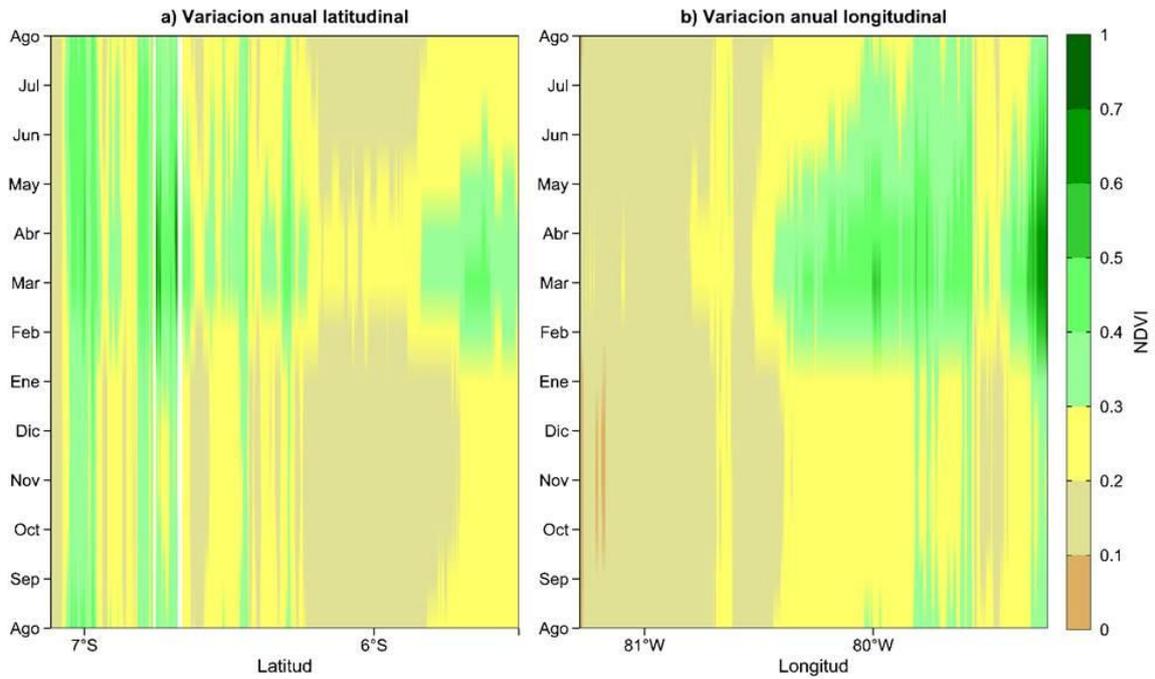


Figura 31

Diagrama de Hovmöller estacional del NDVI del bosque seco de montaña para el periodo 2003 -2021.

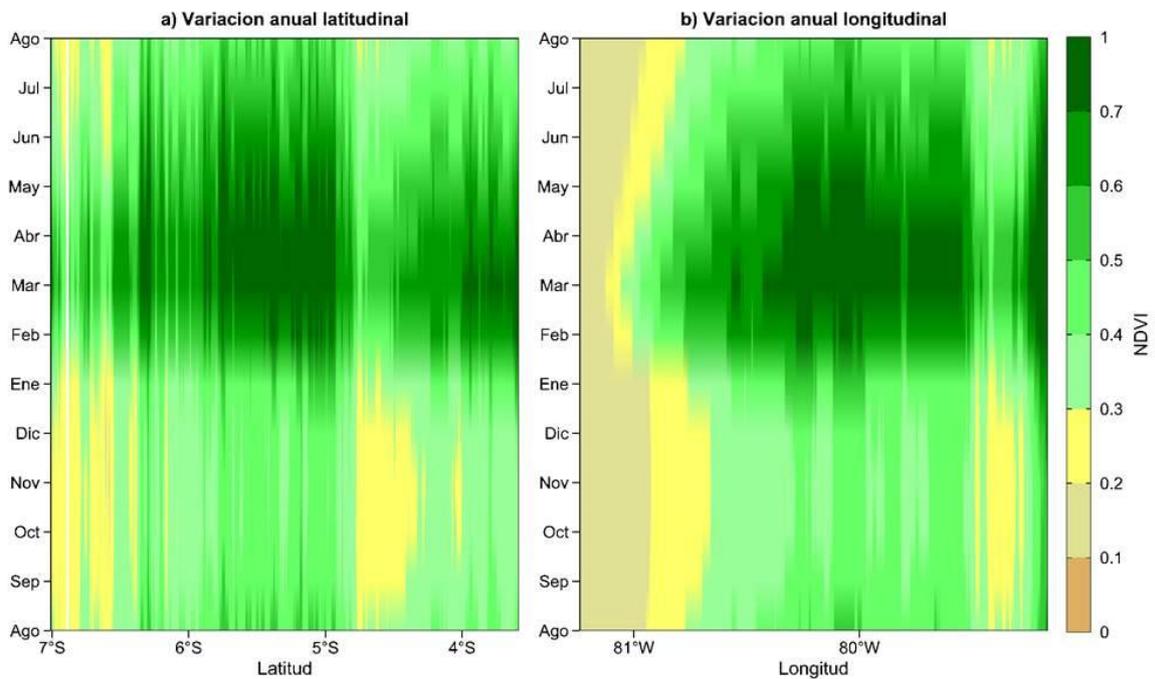
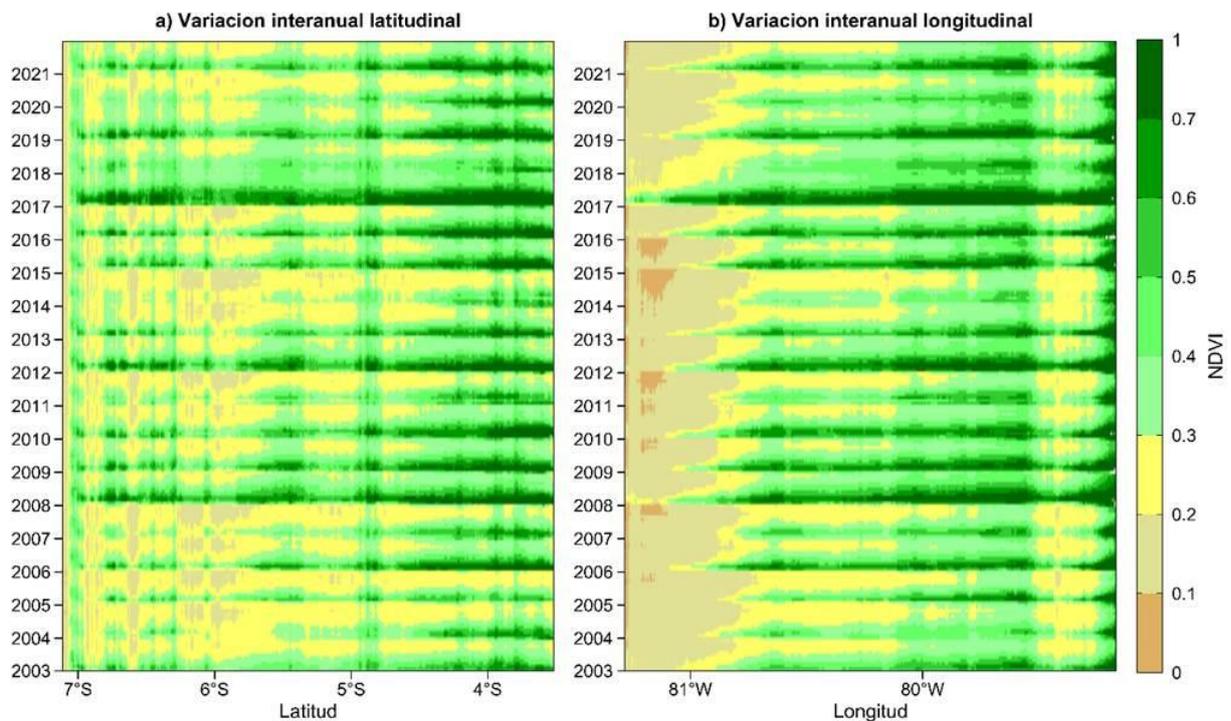


Figura 32

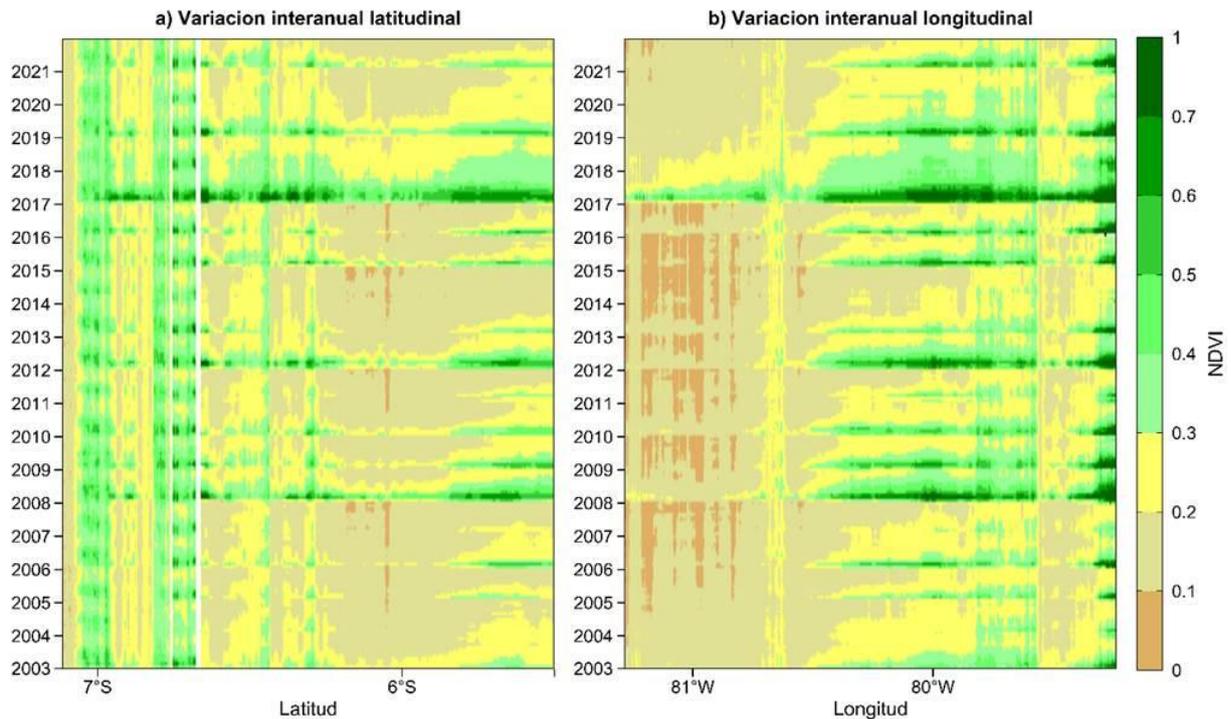
Diagrama de Hovmöller interanual del NDVI del bosque seco total para el periodo 2003 - 2021.



La Figura 28 se muestra el diagrama de Hovmöller estacional latitudinal y longitudinal de NDVI en el área de bosque seco total para el periodo 2003 -2021, observamos que la vegetación con mayor vigor está contenida en mayor grado en los meses de enero a mayo dentro del rango de latitud 3°S hasta 5°S y el rango de longitud de 79° W hasta 80° W. El mismo comportamiento se observa en las Figuras 29 y 30 con menor y mayor intensidad respectivamente.

Figura 33

Diagrama de Hovmöller interanual de NDVI del bosque seco de llanura para el periodo 2003 -2021.



En la Figura 31 se muestra el diagrama de Hovmöller interanual de la variación latitudinal y longitudinal de NDVI en el área de bosque seco para el periodo 2003 -2021, observamos que la variación interanual de NDVI (latitudinal) es aproximadamente uniforme para todos los años siendo el 2017 el que presenta ligeramente más vigor que los demás años, en la variación interanual de NDVI (longitudinal) manteniendo un contraste de intensidad entre el este y oeste, siendo el oeste el que presenta menos vegetación que presenta una interrupción en el año en los primeros meses del año 2017, manteniendo este comportamiento de intensidad del 2017 en las Figuras 32 y 33 del bosque de llanura y de montaña respectivamente.

En la Figura 34 se muestra el diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada NDVI en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021, observamos que la anomalía estandarizada interanual de NDVI (latitudinal y longitudinal) muestra con mayor detalle el contraste entre los años, es aproximadamente uniforme para todos los años siendo la anomalía positiva en el año 2017 el que más resalta, replicándose en los bosques secos de llanura y de montaña (Figuras 35 y 36).

Figura 34

Diagrama de Hovmöller interanual de NDVI del bosque seco montaña para el periodo 2003 - 2021.

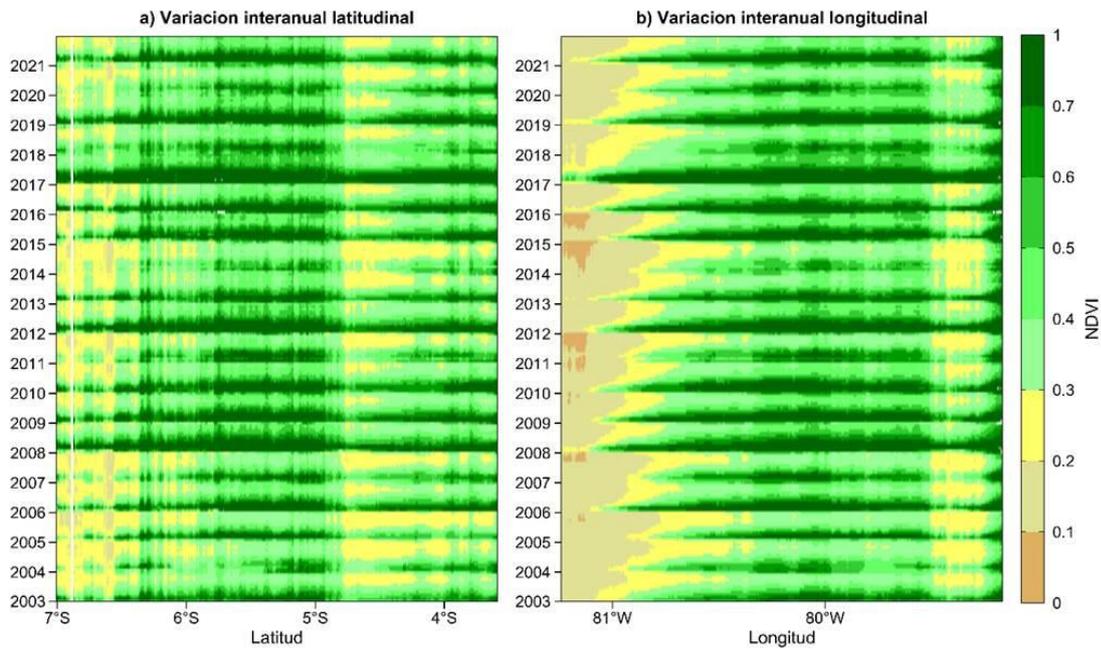
**Figura 35**

Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada NDVI del bosque seco total para el periodo 2003 -2021.

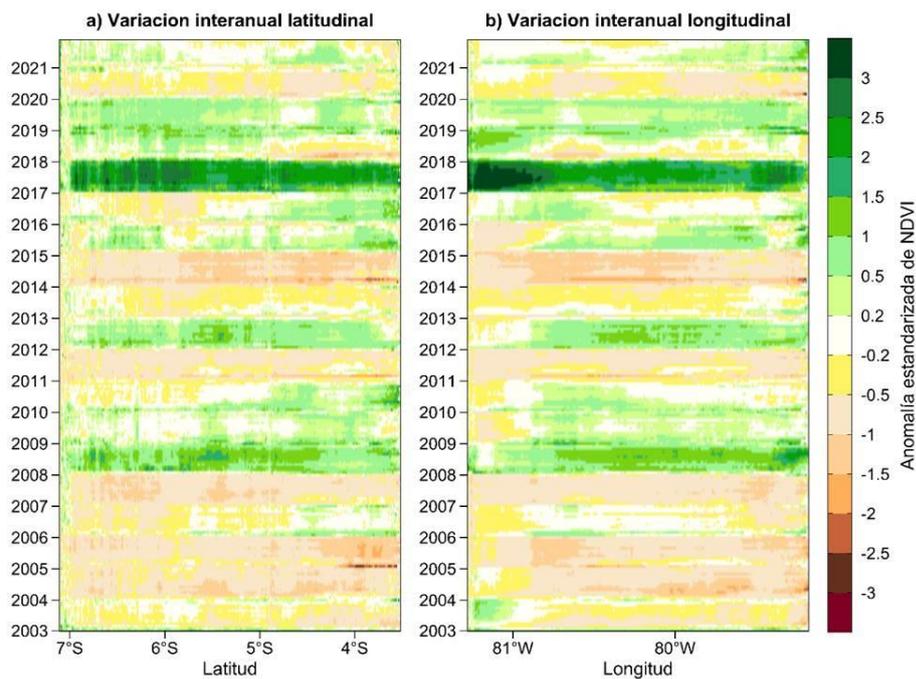
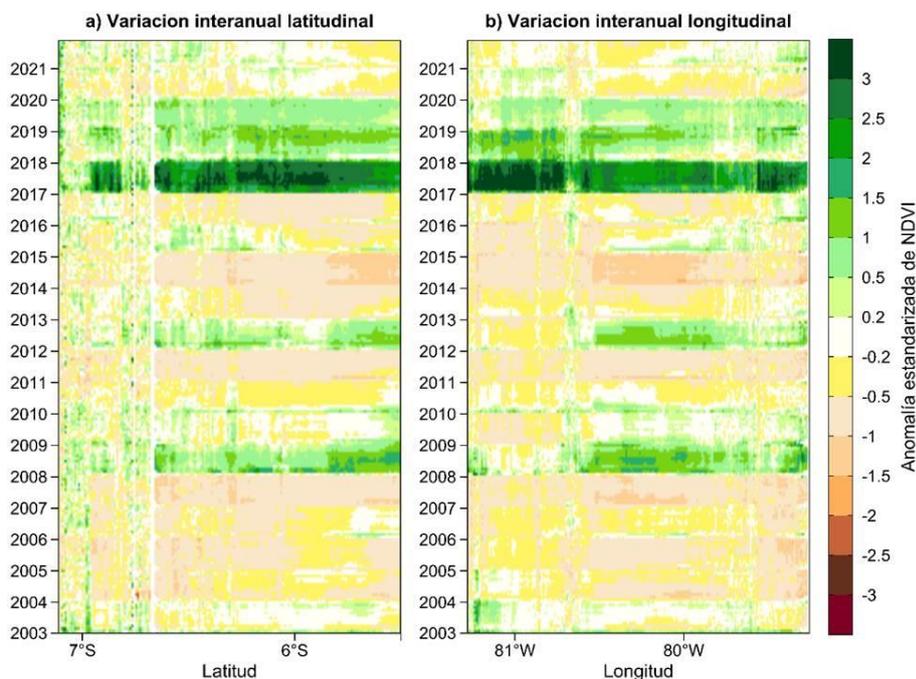


Figura 36

Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada NDVI del bosque seco llanura para el periodo 2003 -2021.



4.2. Distribución espacial promedio de precipitación

La Figura 37 muestra la distribución espacial promedio de precipitación y su coeficiente de variación en el bosque seco para el periodo 2003 -2021, donde se observa la división de dos zonas (extremo este y oeste) que presentan menos precipitación cercana a la costa y mayor precipitación cercana a la montaña, donde el coeficiente de variación indica que toda la costa norte muestra una alta variabilidad de precipitación.

Figura 37

Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada NDVI del bosque seco montaña para el periodo 2003 -2021.

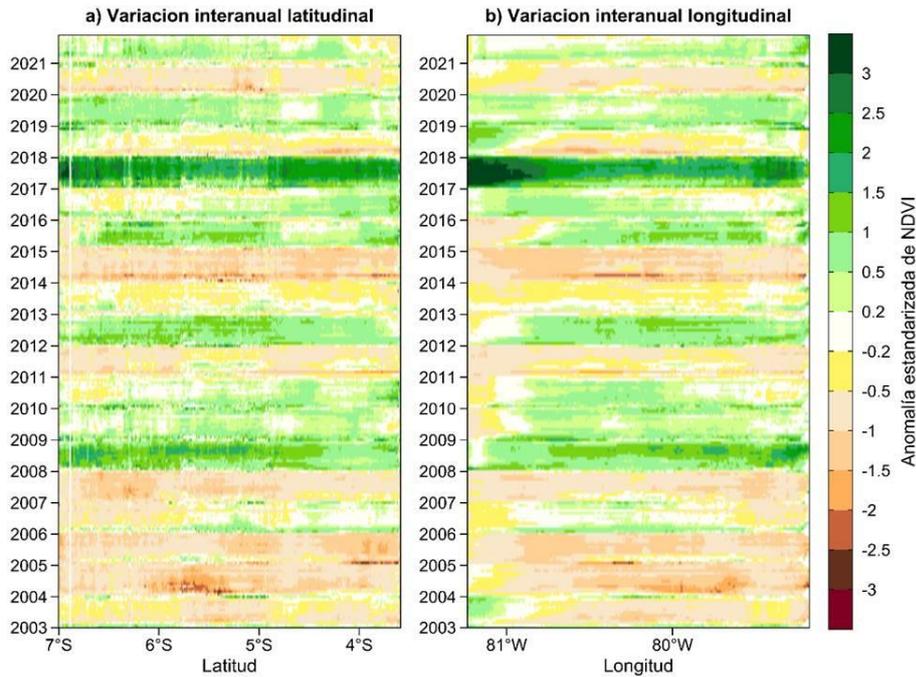
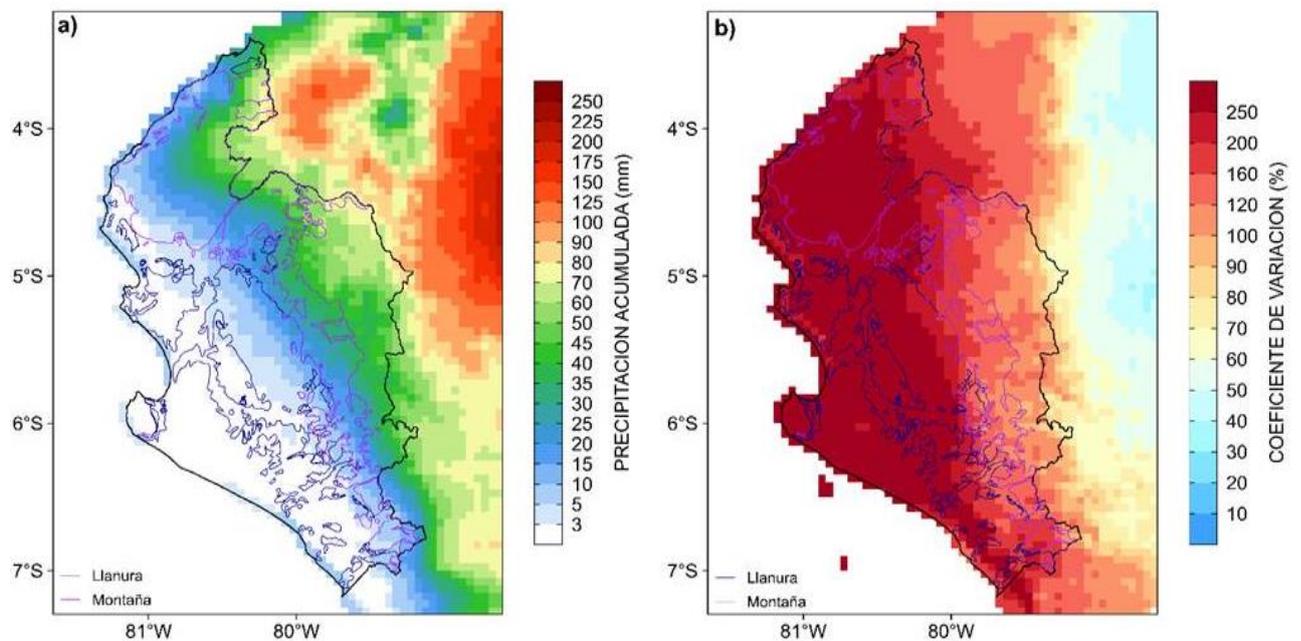


Figura 38

Distribución espacial promedio de precipitación y su coeficiente de variación en el bosque seco para el periodo 2003 -2021.



La Figura 38 muestra la distribución espacial promedio de precipitación para las cuatro estaciones meteorológicas: verano, otoño, invierno y primavera, siendo verano donde se muestra precipitación escasa en la cercanía a la costa.

Figura 39

Distribución espacial promedio por estación de precipitación de la costa norte del Perú para el periodo 2003 -2021.

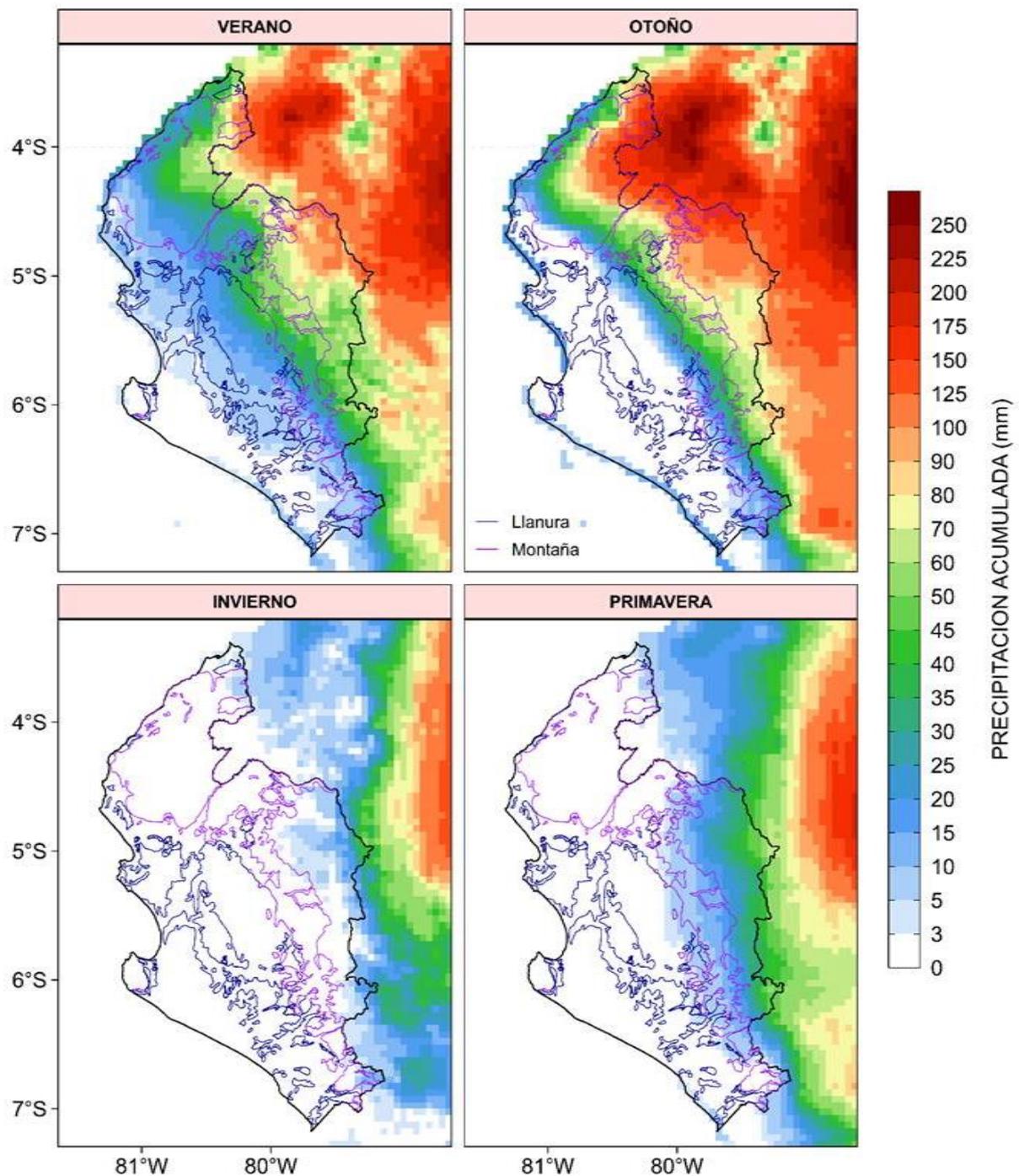
**Figura 40**

Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021.

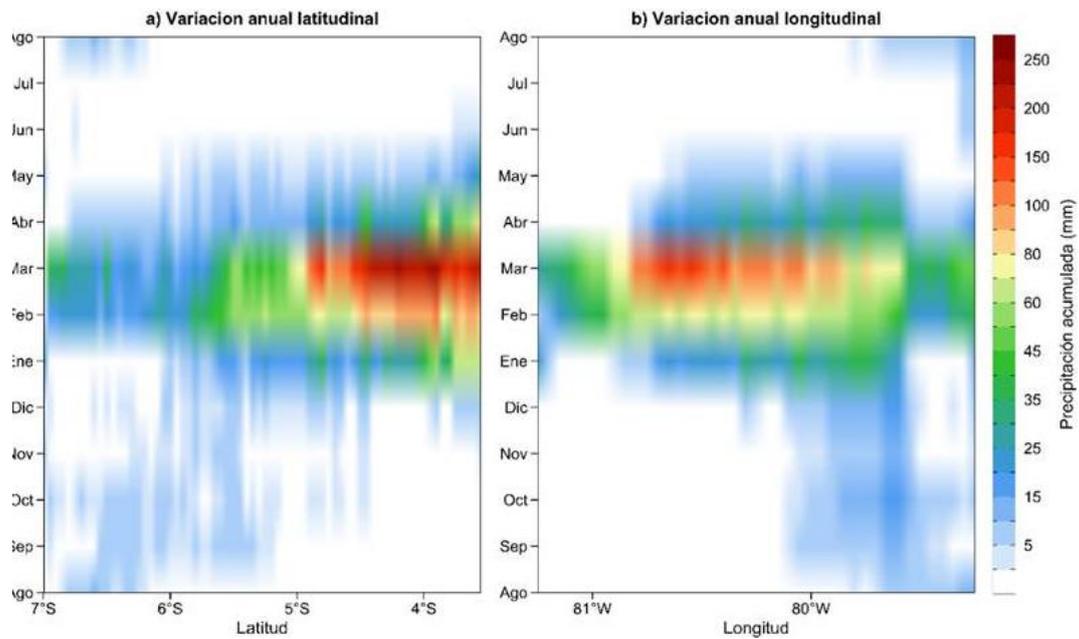


Figura 41

Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco llanura para el periodo 2003 -2021.

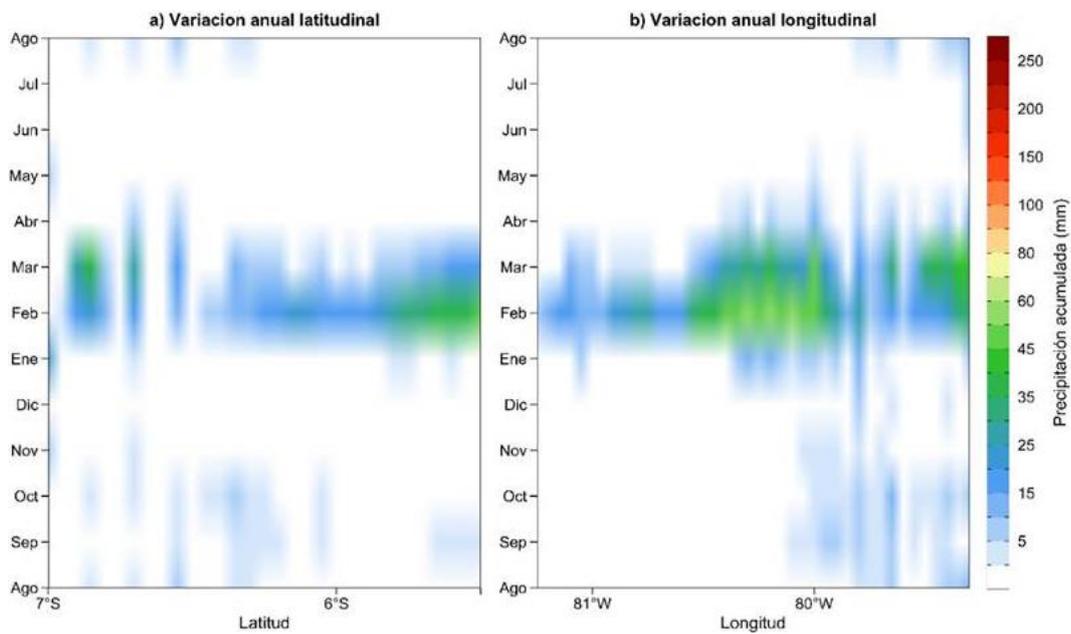
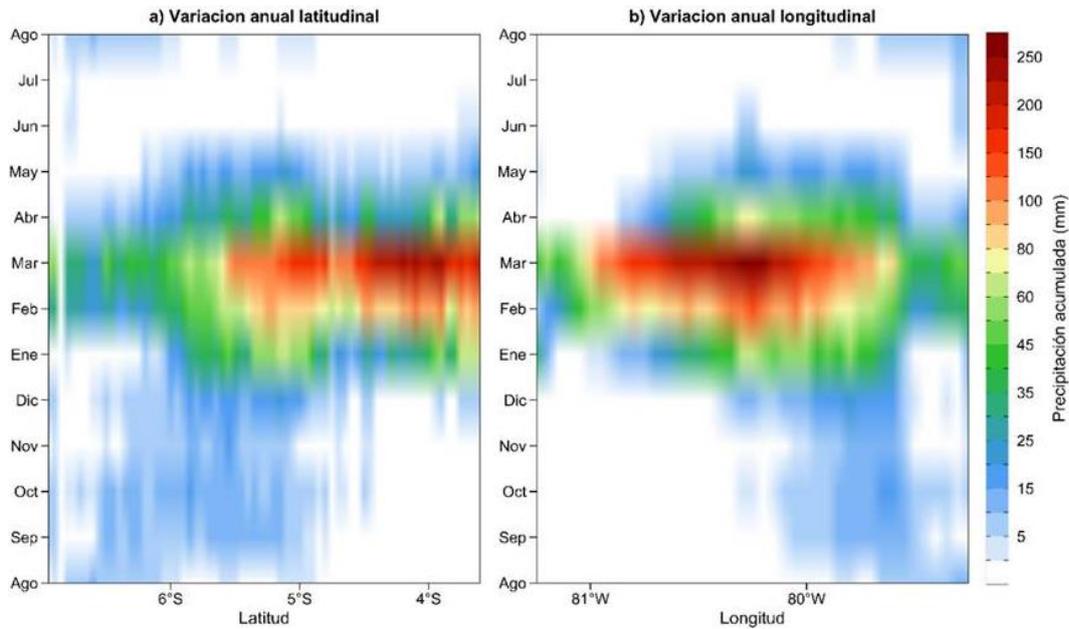


Figura 42

Diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco montaña para el periodo 2003 -2021.



La Figura 39 muestra el diagrama de Hovmöller estacional de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021, se observa que en las dos graficas latitudinal y longitudinal, que los meses de precipitación se dan alrededor del mes de marzo, esto se repite con mayor y menor intensidad en el bosque seco de llanura y de montaña respectivamente, donde la precipitación es mayor en los primeros meses del año (enero hasta mayo). La Figura 42 muestra el diagrama de Hovmöller interanual de la precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021, se observa que, en las dos gráficas latitudinal y longitudinal, presentan anomalías positivas de precipitación en los años 2006, 2008, 2009, 2016, 2017 y 2019, siendo el 2007 el que muestra mayor precipitación.

Figura 43

Diagrama de Hovmöller interanual de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021.

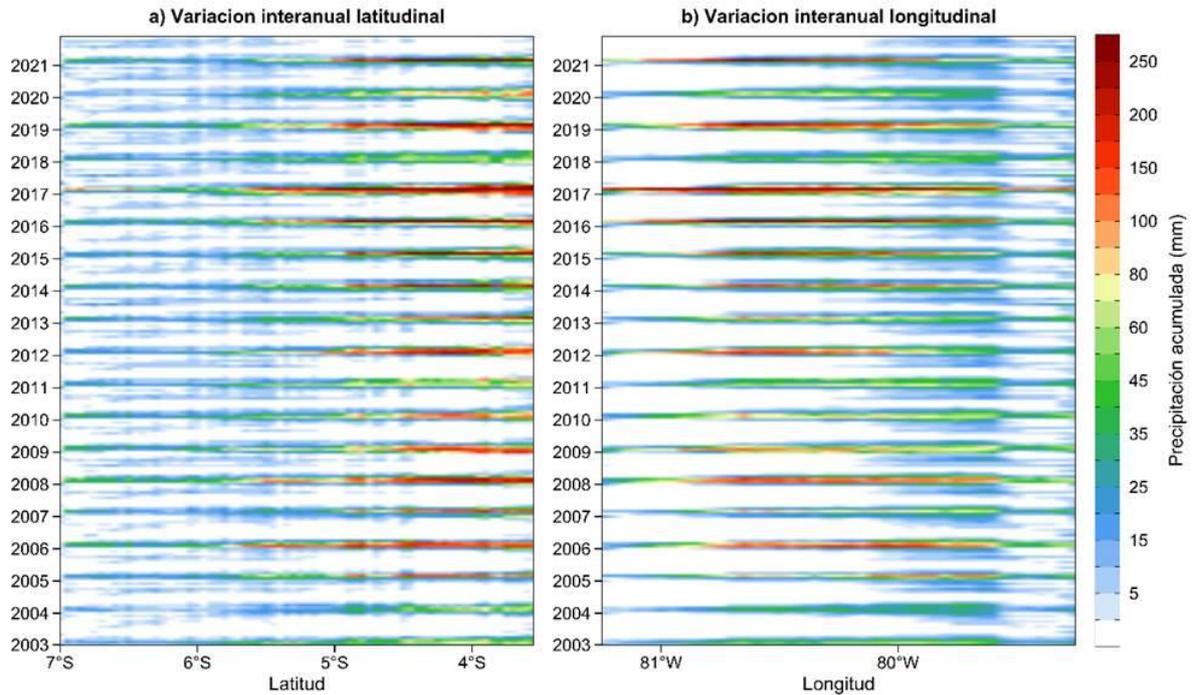


Figura 44

Diagramas de Hovmöller interanual de precipitación en el bosque seco llanura.

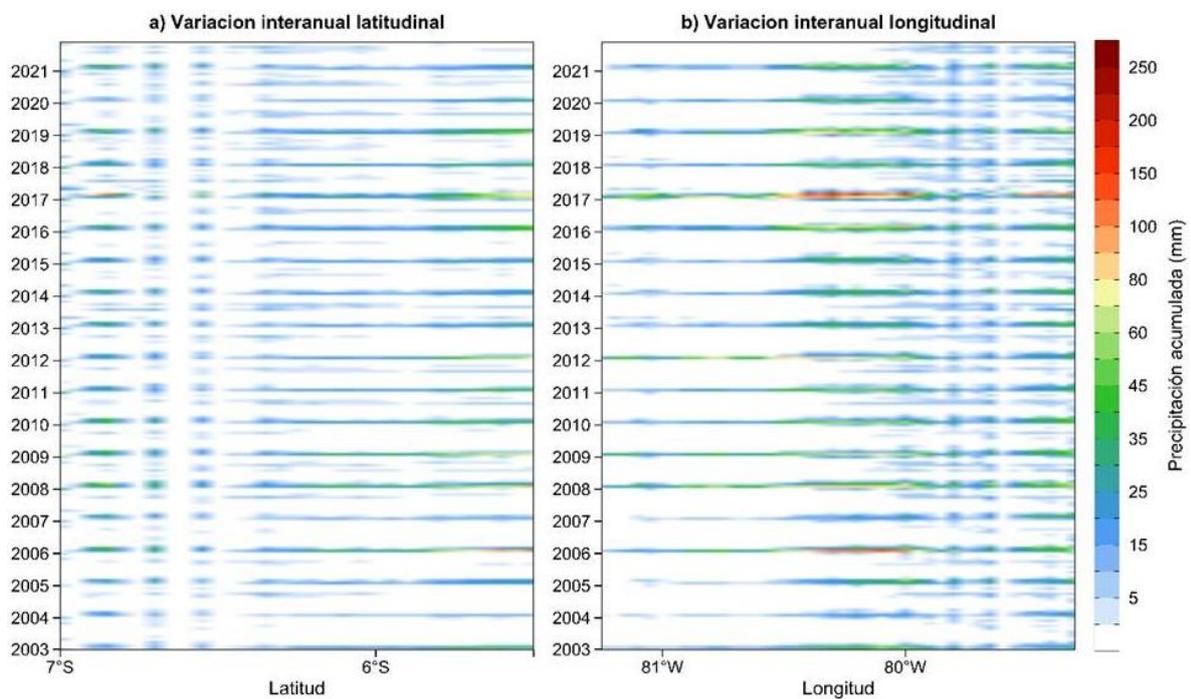


Figura 45

Diagrama de Hovmöller interanual de precipitación en el bosque seco montaña.

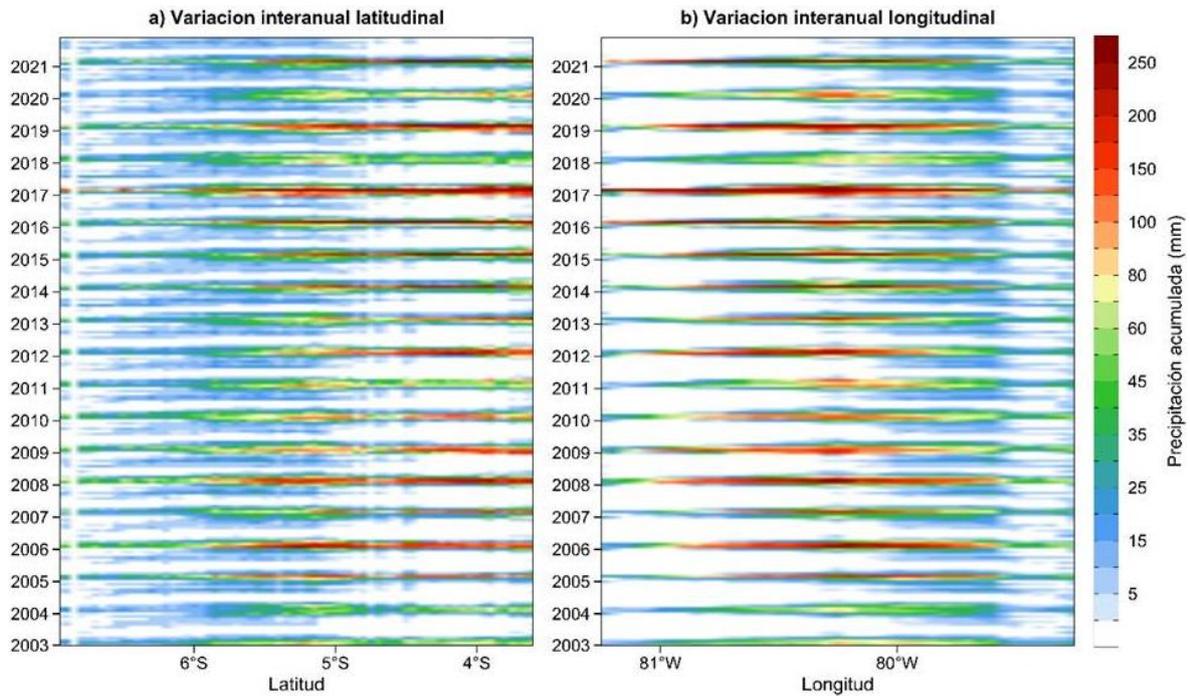
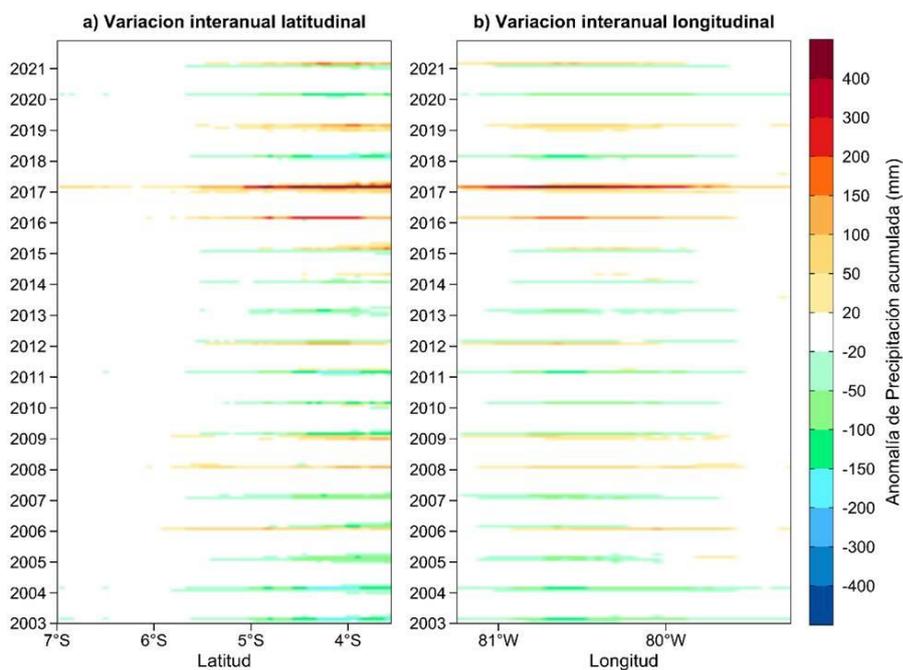


Figura 46

Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021.



La Figura 45 muestra el diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía estandarizada de precipitación en el bosque seco total para el periodo 2003 -2021, se observa que en las dos

gráficas latitudinal y longitudinal, presentan anomalías negativas de precipitación en los años 2003, 2004, 2005, 2007, 2010, 2011, 2013, 2018 y 2020 siendo el 2007 el que muestra una mayor anomalía positiva de precipitación, esta misma dinámica se presenta en el bosque de montaña (Figura 47), también estos eventos son desapercibidos en el bosque seco de llanura (Figura 46).

4.3. Relación de las series de tiempo de NDVI y precipitación en estaciones fijas

Figura 47

Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía de precipitación en el bosque seco de llanura para el periodo 2003 -2021.

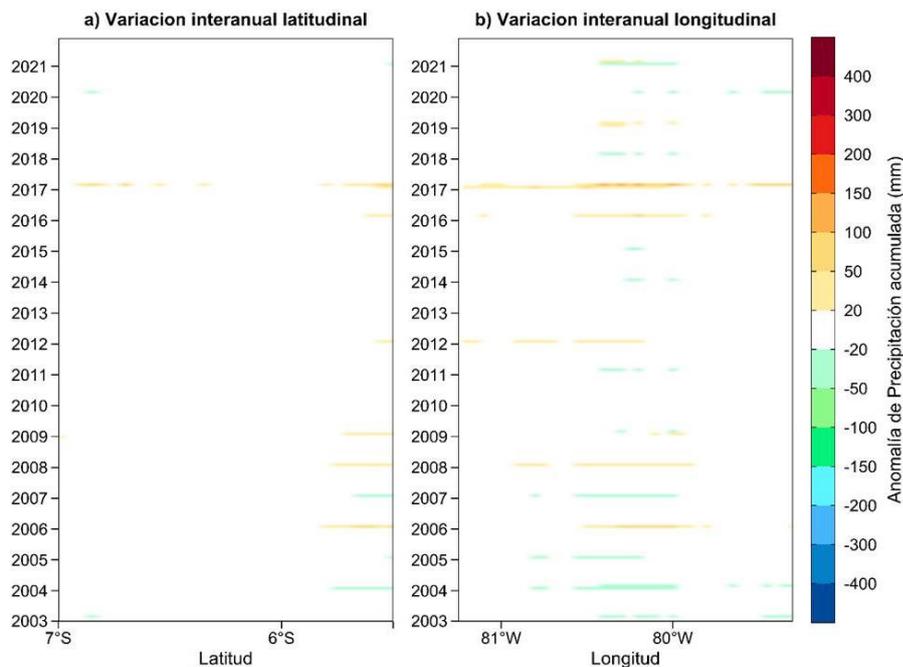
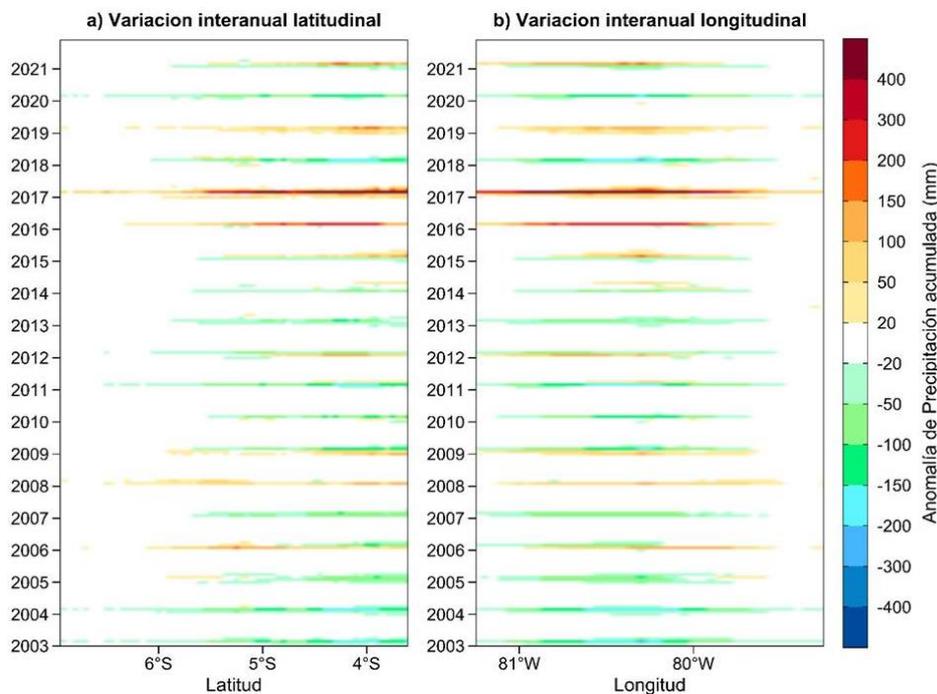


Figura 48

Diagrama de Hovmöller interanual de la anomalía de precipitación en el bosque seco de montaña para el periodo 2003 -2021.

Se encontró que la anomalía de NDVI observada en el año 2017, coincide con un evento del Niño costero de 2017 y el decrecimiento de la curva de NDVI en el año 2004 también coincide con un evento de sequía en el año 2004, una manera de comprobar estos casos es

examinar la data de precipitación en esos años y establecer si existe una relación significativa. Se dispone actualmente de datos de precipitación mensual de satélite, pero antes de usar la data de precipitación satelital CHIRPS en el periodo 2003-2021, se compara la precipitación mensual satelital (CHIRPS) y precipitación *in situ* de estaciones del SENAMHI para el periodo 1981 -2013, esta data de precipitación *in situ* corresponde a 14 estaciones del SENAMHI en la costa norte, esta comparación se analizará para el periodo común (Figura 48 y 49).



En la Figura 48 se observa que la precipitación registrada *in situ* y satelital muestra que, en los años 1983 y 1998 es mucho mayor que los demás años, que corresponde a los eventos de El Niño de 1982-1983 y 1997-1998. En la Figura 50 y 51 se muestra el ciclo estacional de las series de precipitación *in situ* y satelital ubicadas en las 14 estaciones de SENAMHI en el periodo 1981-2013, con una dinámica similar en el ciclo anual como en marzo, pero con distintos registros, siendo en promedio mucho mayor los valores de precipitación *in situ* que la precipitación satelital.

Figura 49

Serie de tiempo de precipitación de la estación meteorológica de Pizarro, Ayabaca, Lancones, Pananga, Bigote, El Tigre, Huarmaca.

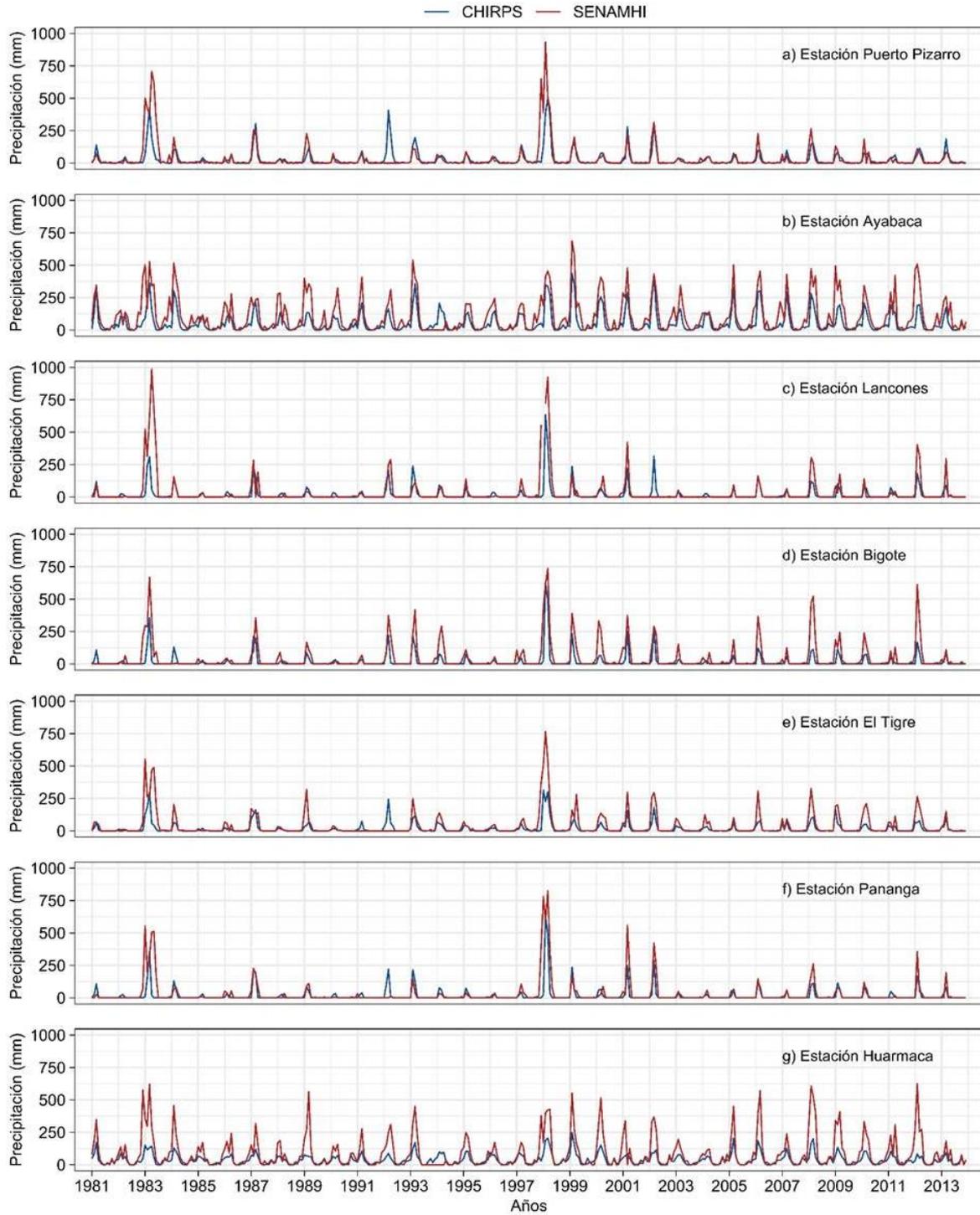


Figura 50

Serie de tiempo de precipitación de la estación meteorológica de Cueva Blanca, Puchaca, Jayanca, Cayalti, Reque, Lambayeque, Bernal.

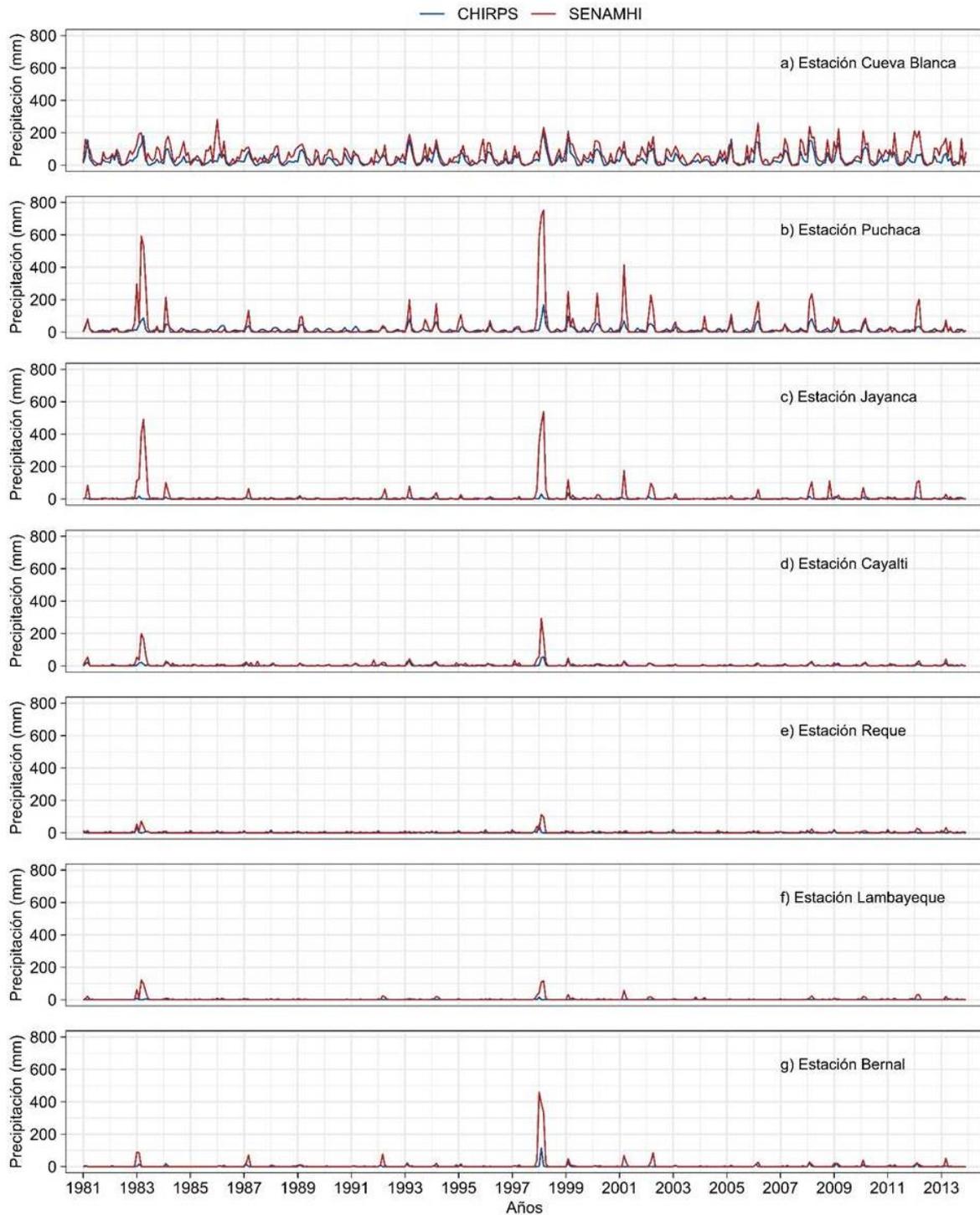
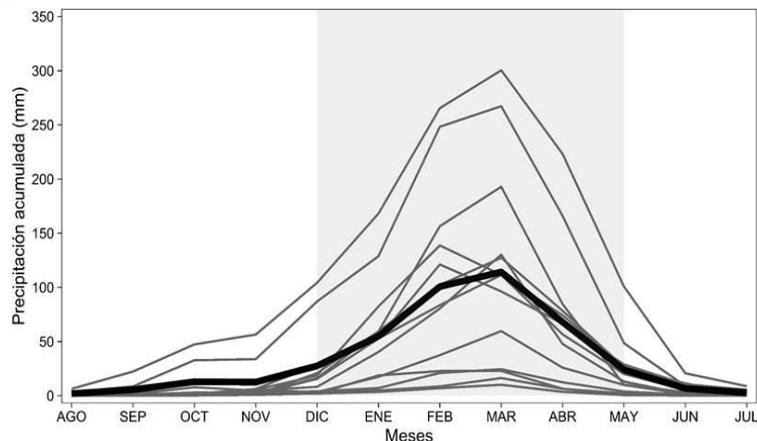
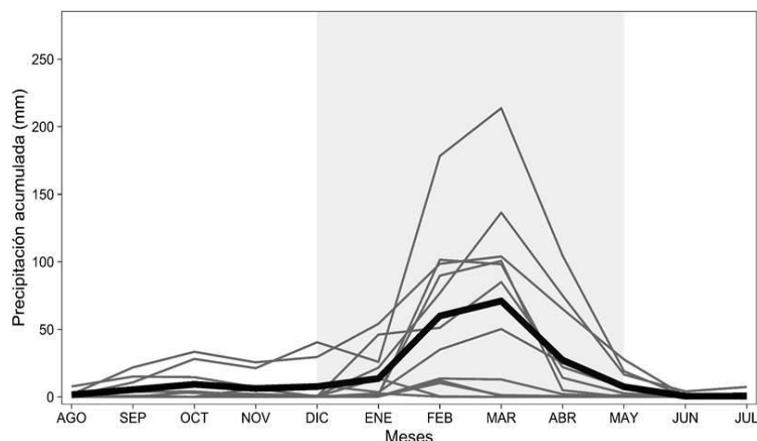


Figura 51

Ciclo estacional de las series de precipitación in situ ubicadas en las 14 estaciones de SENAMHI en el periodo 1981-2013.

**Figura 52**

Ciclo estacional de las series de precipitación satelital de CHIRPS ubicadas en las 14 estaciones de SENAMHI en el periodo 1981-2013.



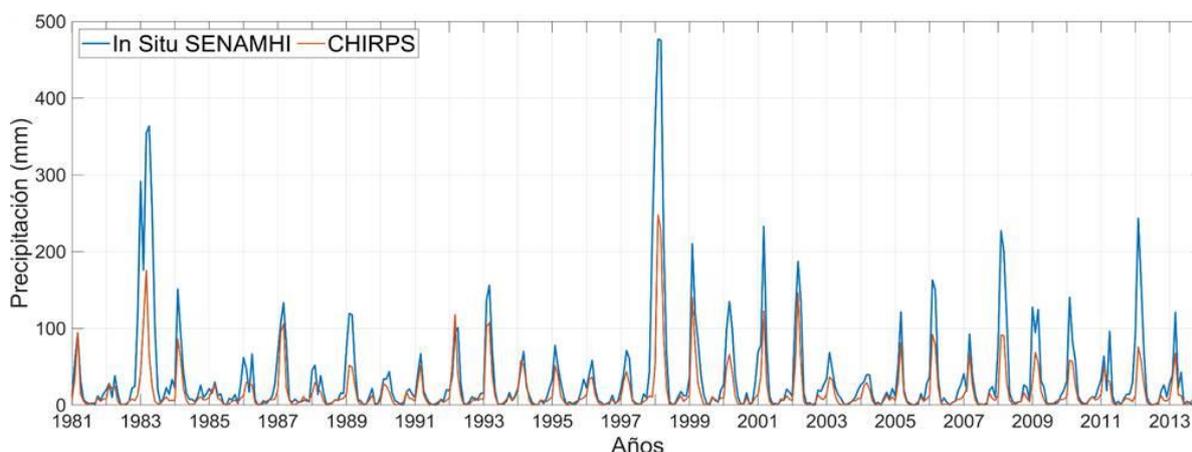
4.3.1. Precipitación *in situ* (SENAMHI) vs satelital (CHIRPS)

Esta comparación se realizó mediante el cálculo del promedio mensual de todas las estaciones meteorológicas del SENAMHI en el periodo 1981-2013 y así obtener la serie de tiempo promedio *in situ* de SENAMHI, dicha serie se usará para correlacionar con los datos de precipitación satelital de CHIRPS en el mismo periodo 1981-2013 (Figura 52) y toda el área de la costa norte, la estadística usada para comparar dichas series es el coeficiente de

correlación de Pearson con valor de $r = 0.86$ con $p < 0.0001$ (Figura 53) para un nivel de confianza del 95%, este valor demuestra que se puede establecer que los datos de precipitación CHIRPS es adecuado para su uso en este estudio en el periodo de 2003-2021 (Figura 61).

Figura 53

Serie de tiempo del promedio mensual de las estaciones meteorológicas (azul) y serie de tiempo de promedio espacial de precipitación mensual de CHIRPS (rojo).



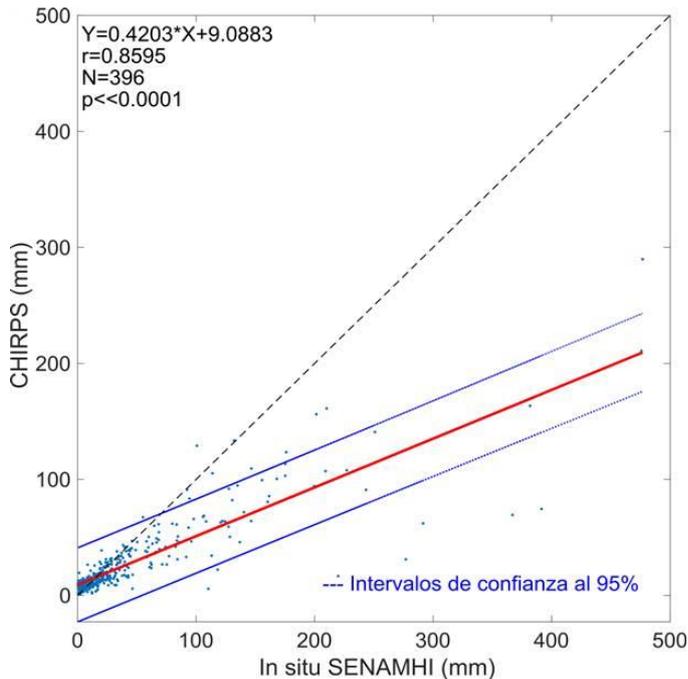
4.3.2 Precipitación satelital (CHIRPS) vs NDVI (MODIS)

Posteriormente se procede a correlacionar las series de tiempo de precipitación satelital CHIRPS y NDVI de MODIS para el periodo de enero 2003 a diciembre del 2021, en cada una de las ubicaciones de las estaciones meteorológicas (ver Tabla 2). En la Figura 54 y 55, se muestran las series de tiempo de precipitación y NDVI para dichas estaciones meteorológicas. En algunas series de tiempo se ve un comportamiento similar entre las series de tiempo de NDVI y precipitación con cierto retraso en la serie de NDVI con respecto a la precipitación. Para las estaciones meteorológicas de Cueva blanca, Ayabaca, Huarmaca, Puchaca, Tigre, Reque y Cayalti se observa que el déficit de precipitación de la sequía del año 2004 no afecta a la curva de NDVI, por tanto, no afectó a la vegetación entorno a esas estaciones meteorológicas, también, en las estaciones de Lambayeque, Bernal, Jayanca, Lancones, Pananga y Bigote presentan también un déficit de precipitación de la sequía del año 2004 que

se refleja en la curva de NDVI en dichas zonas, es decir una disminución de la vegetación entorno a esas estaciones meteorológicas.

Figura 54

Correlación de las series de tiempo de precipitación mensual de las estaciones meteorológicas y serie de tiempo de promedio espacial de precipitación mensual de CHIRPS.



Por otra parte, en las estaciones de Pizarro, Lambayeque, Tigre, Bigote, Puchaca, Huarmaca, Ayabaca y Cueva blanca la precipitación es muy elevada debido al evento Niño intenso en 2017, se observa que la precipitación no influye en la curva del NDVI en esas estaciones meteorológicas. Pero en la estación Bernal, Cayalti, Lancones, Pananga la precipitación también es elevada con valores máximos de precipitación debido al evento del Niño intenso 2017, se observa que la precipitación influye en la curva del NDVI en esas estaciones meteorológicas. Por otra parte, en la estación Reque la precipitación no es intensa y la curva de NDVI no muestra cambios en relación a los demás años. En la Figura 56 y 57, se muestra el ciclo estacional y las series de tiempo de precipitación y NDVI para dichas estaciones meteorológicas en el periodo 2023-2021, siendo en promedio que marzo es el mes que presenta mayor intensidad de NDVI y precipitación.

Figura 55

Series de tiempo de NDVI y Precipitación de la estación meteorológica de Pizarro, Ayabaca, Lancones, Pananga. Bigote, El Tigre, Huarmaca.

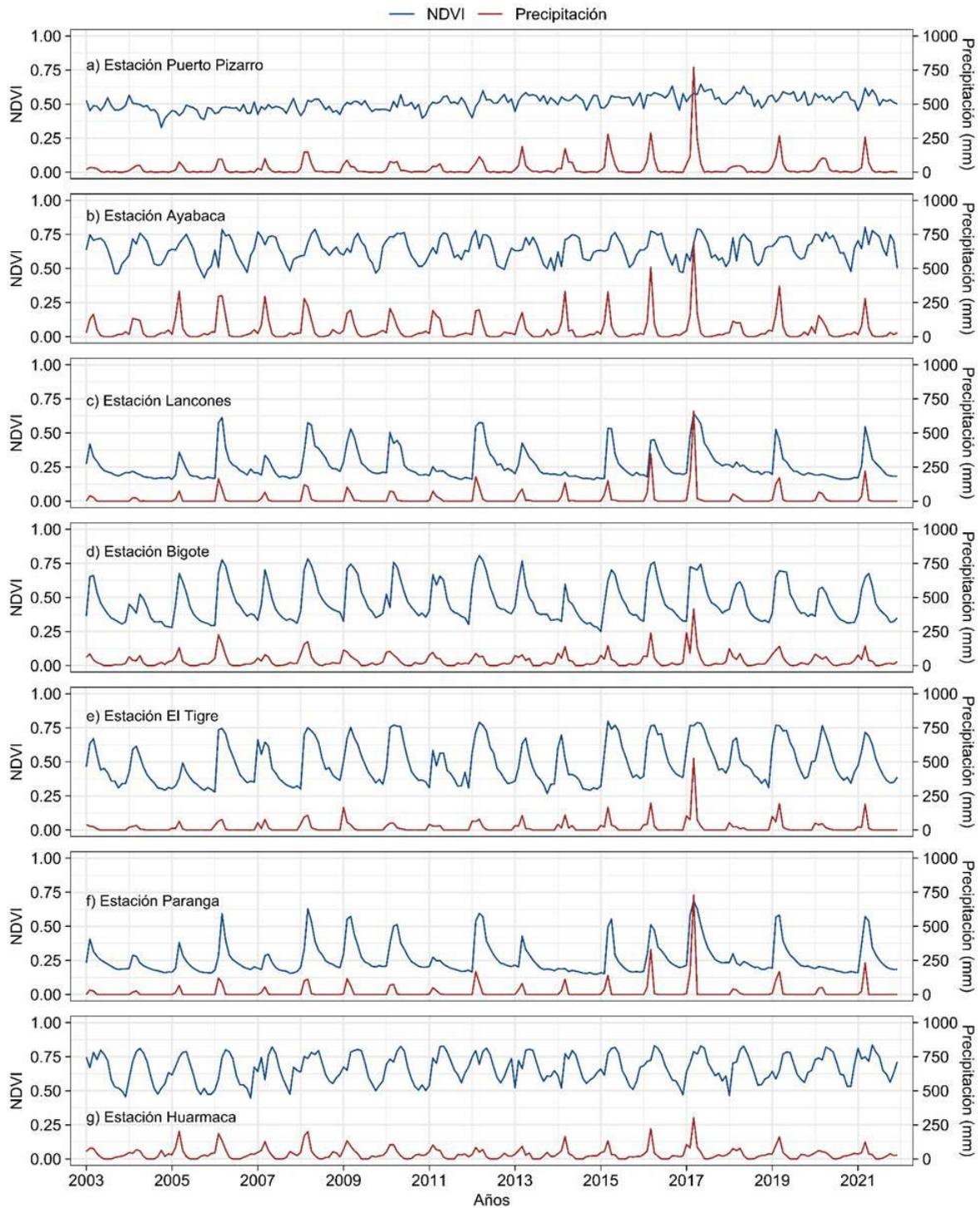


Figura 56

Serie de tiempo de NDVI y Precipitación de la estación meteorológica de Cueva Blanca, Puchaca, Jayanca, Cayalti, Reque, Lambayeque, Bernal.

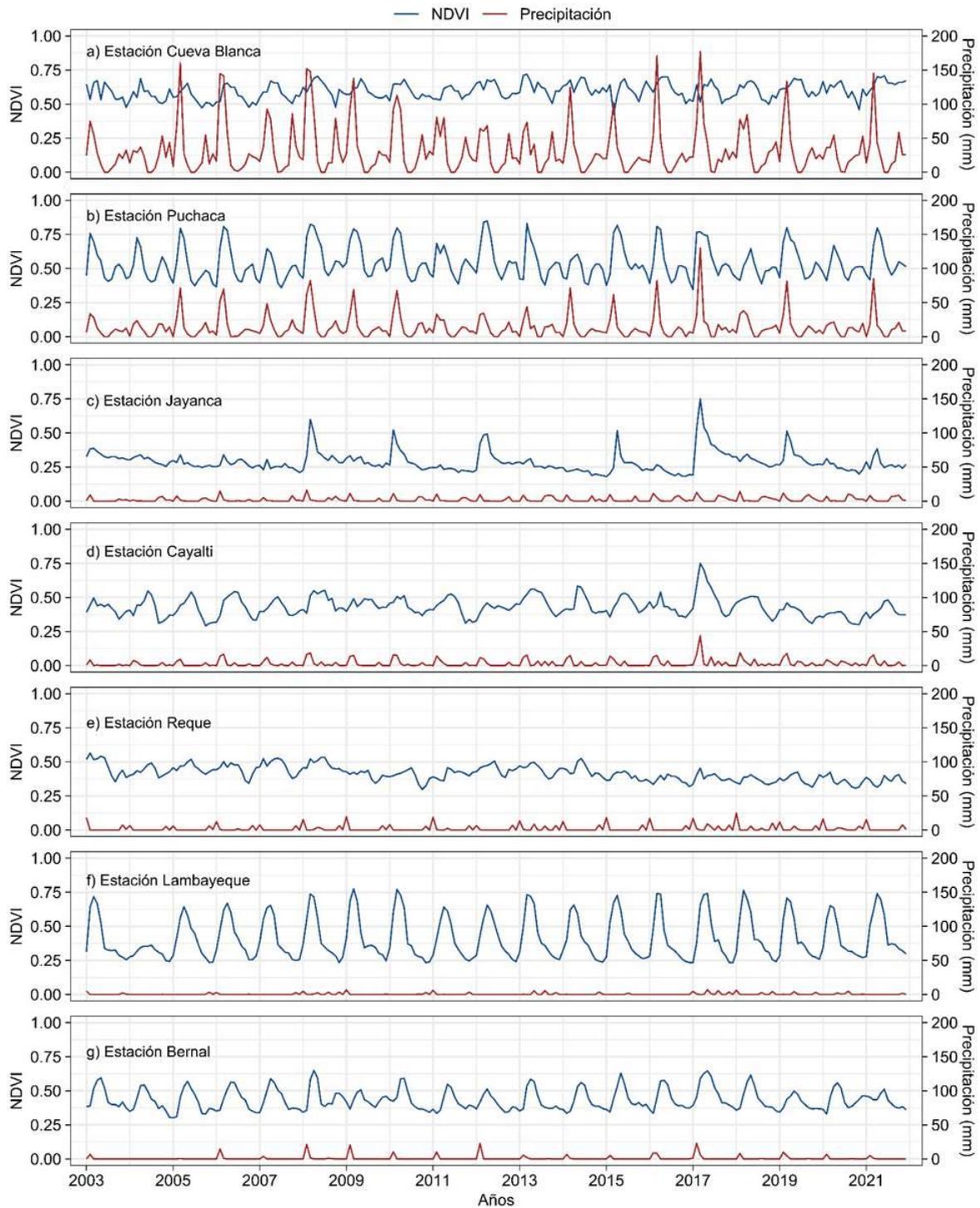
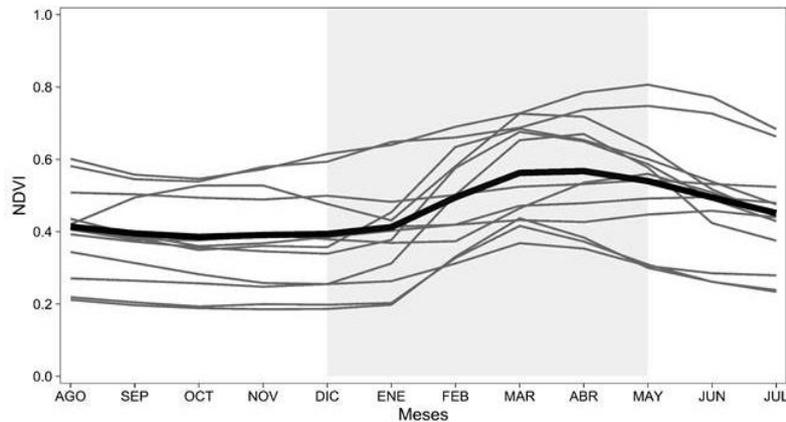
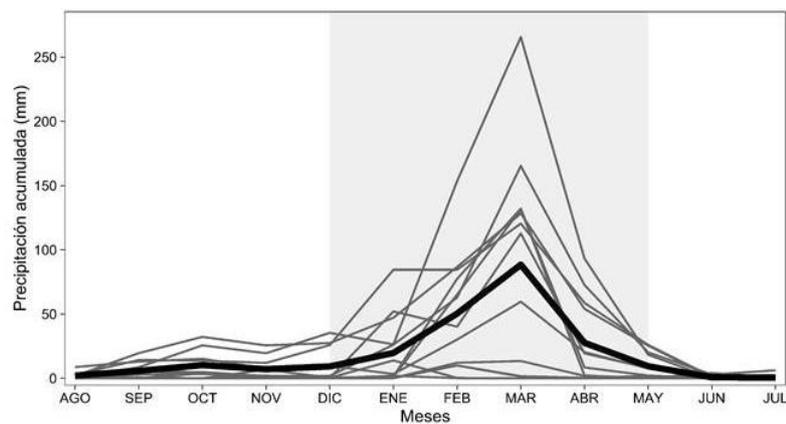


Figura 57

Ciclo estacional de las series de NDVI ubicadas en las estaciones de SENAMHI en el periodo 2023-2021.

**Figura 58**

Ciclo estacional de las series de precipitación ubicadas en las estaciones de SENAMHI en el periodo 2023-2021.



Procedemos a calcular las correlaciones entre las series de tiempo de NDVI y precipitación, Tabla 3. Se observa que en la mayoría de las estaciones está dada con un desfase de 1 mes ($lag=1$) algunos con desfases de 2 o 3 meses. Por lo que se procede a realizar el análisis de componentes principales como una alternativa al clásico promedio de las 14 series de precipitación de CHIRPS y 14 series de NDVI, con el fin de reducir la información redundante en las series y obtener series que contengan mayor información y establecer su correlación cruzada.

Tabla 3

Correlación cruzada entre la serie de tiempo mensual de precipitación y promedio espacial de NDVI, por cada estación meteorológica (2003-2021).

Estaciones de SENAMHI	Desfase entre Precipitación y NDVI						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
PUERTO PIZARRO	0.028	-0.094	0.047	0.190	0.299	0.360	0.293
LAMBAYEQUE	-0.002	-0.052	-0.099	-0.118	-0.065	0.060	0.171
BERNAL	-0.132	-0.168	-0.207	-0.134	0.193	0.403	0.427
REQUE	-0.227	-0.223	-0.186	-0.097	-0.056	0.025	-0.016
EL TIGRE	-0.294	-0.085	0.191	0.437	0.530	0.476	0.336
CAYALTI	-0.184	-0.103	0.012	0.228	0.360	0.342	0.331
JAYANCA	-0.168	-0.201	-0.169	0.030	0.202	0.114	-0.011
LANCONES	-0.180	-0.161	0.108	0.542	0.538	0.366	0.174
PANANGA	-0.173	-0.154	0.174	0.546	0.546	0.319	0.154
HACIENDA BIGOTE	-0.477	-0.313	0.105	0.475	0.684	0.638	0.407
PUCHACA	-0.337	-0.393	0.052	0.597	0.657	0.377	-0.010
HUARMACA	-0.454	-0.335	-0.163	0.172	0.468	0.650	0.575
AYABACA	-0.321	-0.138	-0.038	0.238	0.460	0.564	0.473
CUEVA BLANCA	-0.253	-0.267	-0.182	0.003	0.308	0.482	0.464
	Desfase entre PC1 de Precipitación y PC1 de NDVI						
Estaciones de SENAMHI	-0.421	-0.313	0.034	0.479	0.660	0.601	0.407

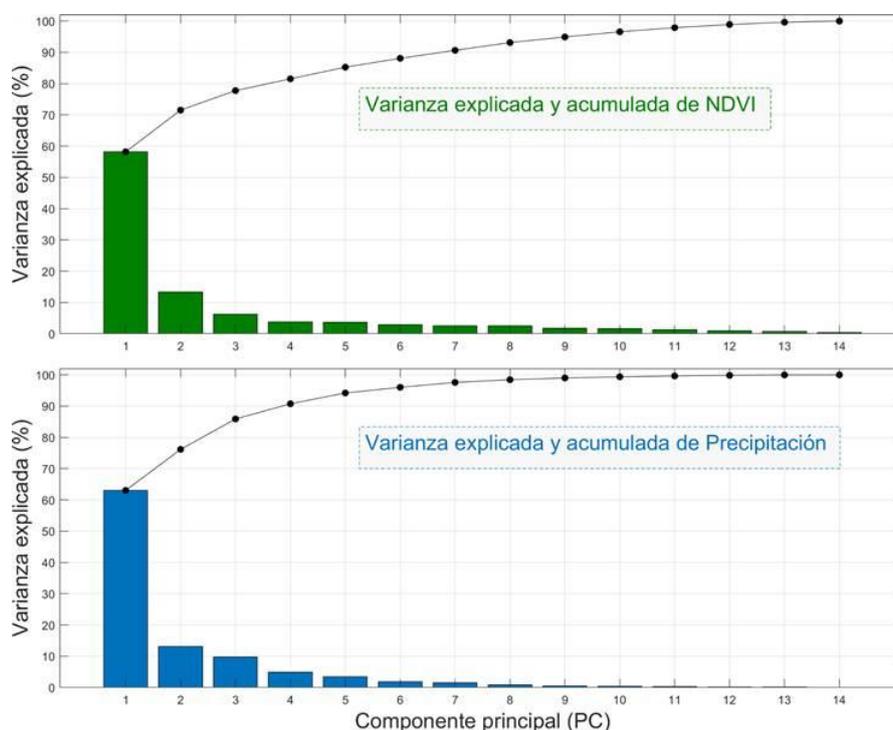
4.3.2.1. Componente principal de NDVI y precipitación

Para establecer la relación entre las series de NDVI y precipitación se ha optado por relacionar las primeras componentes principales de NDVI y precipitación. En la Figura 58 se

observa el número de componentes principales que son relevantes en función de la varianza explicada en donde las primeras componentes de NDVI y precipitación son las que tienen mayor importancia. El primer componente principal de NDVI mensual sobre las estaciones meteorológicas del SENAMHI claramente representa el patrón anual y explica un 58.19% de la varianza total del NDVI mostrando anomalía positiva en el año 2017.

Figura 59

Gráfica de la varianza explicada de las componentes principales de NDVI y precipitación.

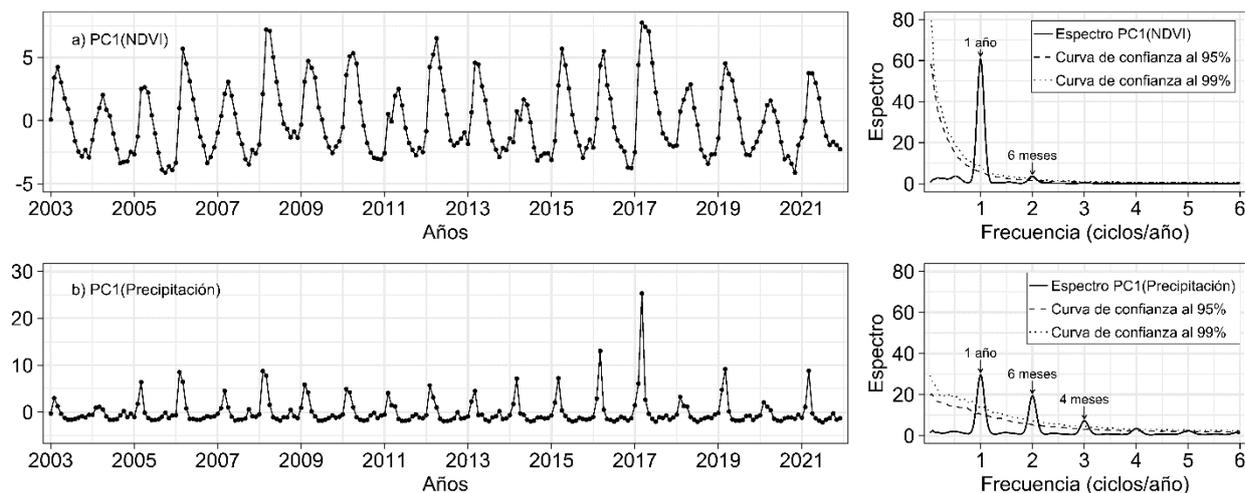


El primer componente principal de precipitación mensual de CHIRPS sobre las estaciones meteorológicas del SENAMHI claramente representa el patrón anual y explica un 63.04% de la varianza total de la precipitación mostrando anomalía positiva en el año 2017. En la Figura 59 se muestra la serie de tiempo de la primera componente principal de precipitación y la serie de tiempo de la primera componente principal de NDVI para el periodo de enero de 2003 a diciembre 2021, en las series de tiempo se observa un desfase de la serie de tiempo de PC1-NDVI comparado con la serie de tiempo de PC1-Precipitación. La densidad espectral de potencia (Figura 59-derecha) de la PC1 (NDVI) muestra que el rango dominante

de periodos es 6 – 12 meses. La densidad espectral de potencia de la PC1 (precipitación) muestra que el rango dominante de periodos es 4 – 6 – 12 meses.

Figura 60

Series de tiempo de la primera componente principal de NDVI y Precipitación y su respectiva densidad espectral de potencia.



4.4. Series de tiempo de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura superficial en la región Niño 1+2

En la Figura 60 se muestran los niveles mensuales de NDVI del bosque seco desde enero de 2003 hasta diciembre de 2021, para esta observación se utilizó la serie de tiempo de promedio espacial mensual de NDVI en el bosque seco (bosque seco de llanura y de montaña) (ver Anexo E). Se observa que alrededor del mes de marzo encontramos los máximos valores de NDVI. También que la serie de tiempo de promedio espacial de NDVI-MODIS AQUA/TERRA del bosque seco, en la cual se observa un incremento y ensanchamiento de la curva de NDVI en el año 2017, que corresponden al Niño costero de 2017 (Martínez y Morón, 2017).

4.4.1 Densidad espectral de potencia de NDVI del bosque seco

Para identificar los ciclos presentes en la serie de NDVI, se obtuvo la gráfica correspondiente a la densidad espectral de potencia de la serie de tiempo de promedio mensual

de NDVI del área de bosque seco en la costa norte del Perú para el periodo 2003-2021 (Figura 60 izquierda) que son 19 años de datos mensuales, donde se observa 2 frecuencias que resaltan en la Figura 60 como f_1 equivalente en periodo a 12 meses, por cual se confirma que el ciclo dominante en esta serie de NDVI de bosque seco es el ciclo anual, luego en menor importancia se encuentra la frecuencia de f_2 que equivale a 6 meses, ahora existen picos a la izquierda de la primera frecuencia f_1 que no se consideran en el análisis ya que escapan del análisis porque estos ciclos/año sobrepasan la cantidad de datos mencionados de 19 años de datos mensuales. Se obtiene la anomalía estandarizada estacional para los valores de NDVI en el área de bosque seco de la costa norte para el periodo 2003-2021 (Figura 63).

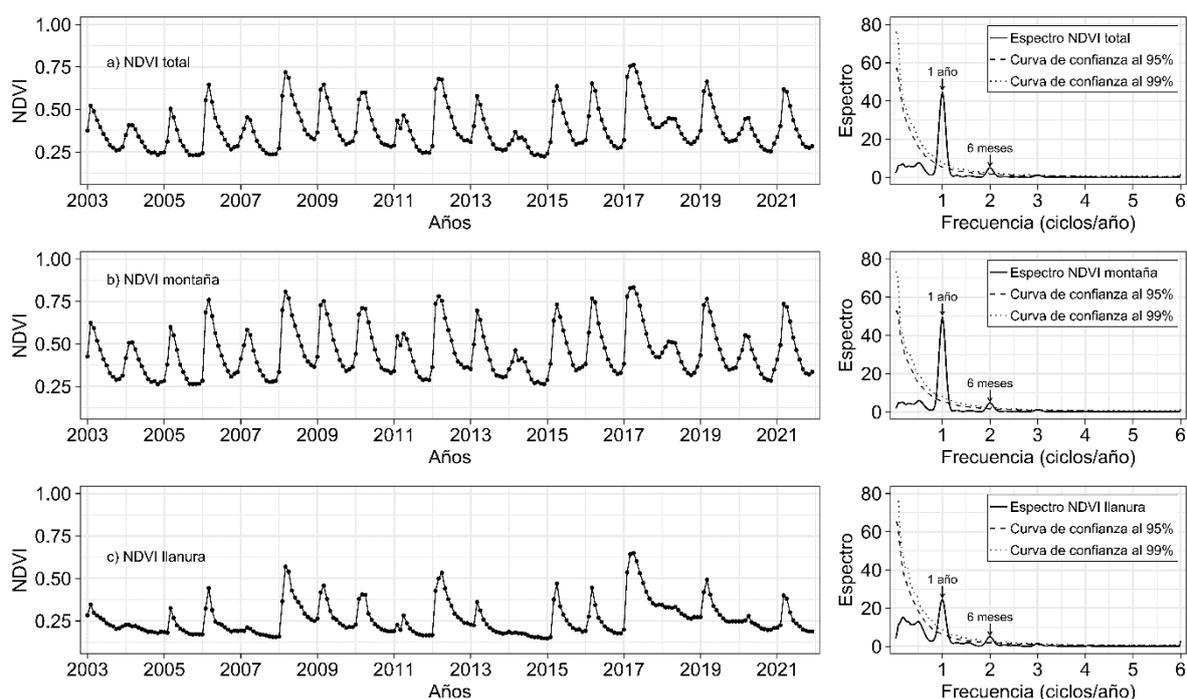
4.4.2 Densidad espectral de potencia de precipitación del bosque seco

Una vez verificado la idoneidad del uso de la data de precipitación satelital CHIRPS versus dato precipitación in situ ($r=0.8595$), se genera la serie de tiempo mensual a partir del promedio espacial de enero 2003 hasta diciembre 2021 (ver Anexo E), a partir de esta serie de tiempo se procede a calcular la estacionalidad promedio de la serie de tiempo de CHIRPS (Figura 61) en esta figura se observa el comportamiento de la precipitación en el bosque seco de la costa norte, alcanzando su valor máximo de precipitación acumulada mensual en el mes de marzo. Para identificar los ciclos presentes en la serie de precipitación, se obtuvo la gráfica correspondiente a la densidad espectral de potencia de la serie de tiempo de promedio mensual de precipitación del área de bosque seco en la costa norte del Perú para el periodo 2003-2021 (Figura 61 izquierda) que son 19 años de datos mensuales, donde se observa 3 frecuencias que resaltan en la Figura como f_1 equivalente en periodo a 12 meses, por cual se confirma que el ciclo dominante en esta serie de precipitación de bosque seco es el ciclo anual, luego en menor importancia se encuentra la frecuencia de f_2 que equivale a 6 meses y último f_3 equivalente a un periodo de 4 meses, ahora existen picos a la izquierda de la primera frecuencia f_1 que no se consideran en el análisis ya que escapan del análisis porque estos ciclos/año sobrepasan la

cantidad de datos mencionados de 19 años de datos mensuales. Se obtiene la anomalía estandarizada estacional para los valores de precipitación en el área de bosque seco de la costa norte para el periodo 2003-2021 (Figura 64).

Figura 61

Series de tiempo mensual de NDVI MODIS del bosque seco en la costa norte y sus correspondientes densidades espectrales de potencia.



4.4.3 Densidad espectral de temperatura superficial del mar en la región Niño 1+2

Se usa los datos de temperatura superficial del mar en la región Niño 1+2 reportado por la NOAA, se usa esta región Niño 1+2 ya que está más cerca de la costa norte (ver Anexo E). En la Figura 62a se muestra la serie de tiempo de temperatura superficial del mar en la región del Niño 1+2 obtenido de la NOAA, la temperatura superficial alcanza su máximo valor en el mes de marzo y su mínimo valor en el mes de septiembre. Para identificar los ciclos presentes en la serie de temperatura, se obtuvo la gráfica correspondiente a la densidad espectral de potencia de la serie de tiempo de promedio mensual de precipitación de la región Niño 1+2 para el periodo 2003-2021 (Figura 62b) que son 19 años de datos mensuales, donde se observa

una frecuencia que resalta en la Figura 62b como f1 equivalente en periodo a 12 meses, por cual se confirma que el ciclo dominante en esta serie de temperatura de la región Niño 1+2 es el ciclo anual. Se obtiene la anomalía estandarizada estacional para los valores de temperatura en la región Niño 1+2 para el periodo 2003-2021 (Figura 65).

Figura 62

Series de tiempo mensual de precipitación satelital CHIRPS del bosque seco en la costa norte y sus correspondientes densidades espectrales de potencia.

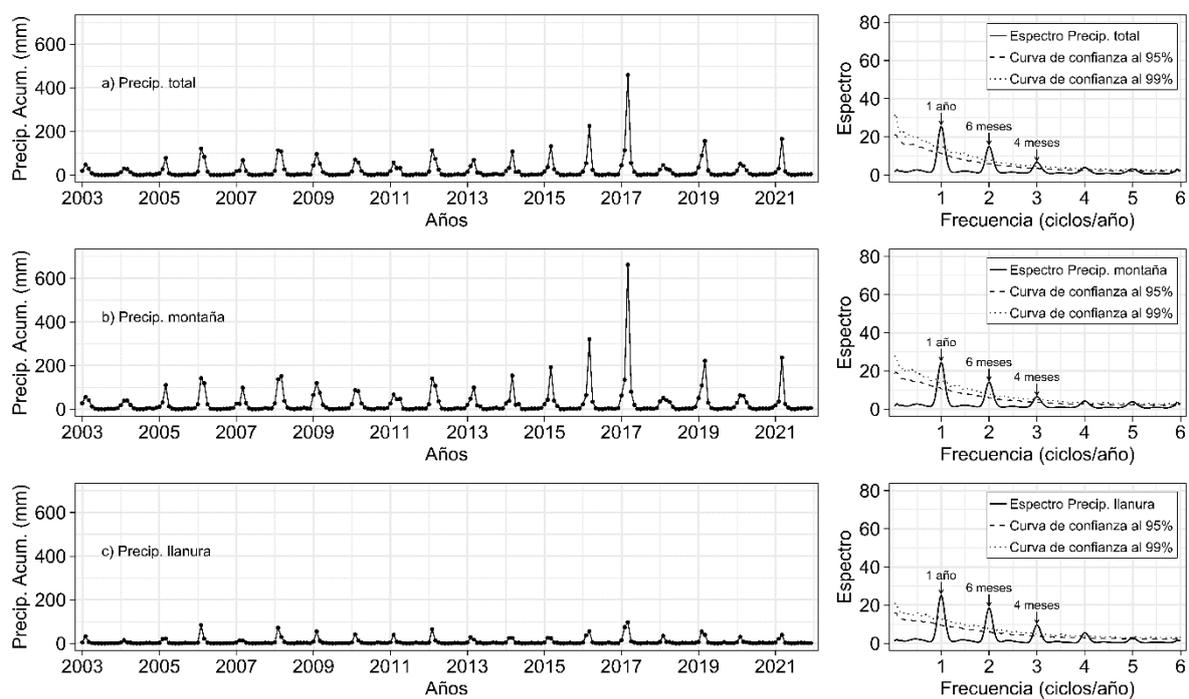
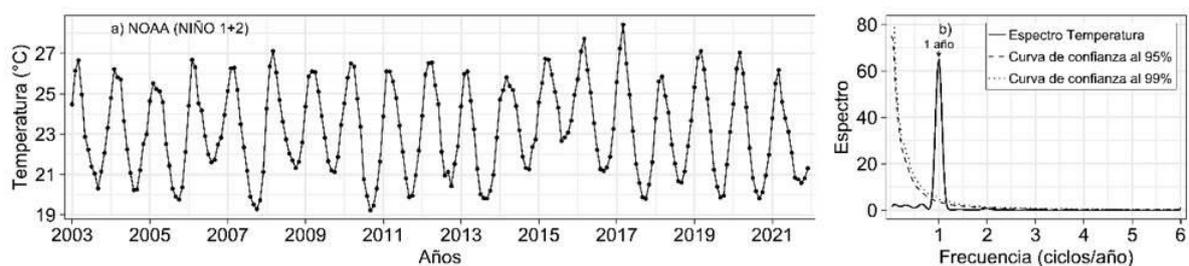


Figura 63

a) Serie de tiempo de Temperatura superficial del mar para la región Niño 1+2 y b) densidad espectral de potencia de la serie de tiempo mensual de TSM en el área Niño 1+2.



4.5. Anomalía estandarizada estacional de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura Niño 1+2

Se procede a obtener la anomalía estandarizada estacional de los parámetros de TSM Niño 1+2, NDVI y precipitación del bosque seco en la costa norte del Perú, esta serie de datos serán convertidos mediante la fórmula de anomalía estandarizada estacional para su análisis. Donde observamos que la anomalía positiva en el año 2017 está presente en los tres parámetros siendo el NDVI el parámetro que presenta mayor incidencia a lo largo de todo el año 2017, mientras que en la precipitación y temperatura su incidencia no es durante todo el 2017 sino una parte de este año.

Figura 64

Gráficas de anomalía estandarizada estacional de las series de tiempo mensual de NDVI en el bosque seco.

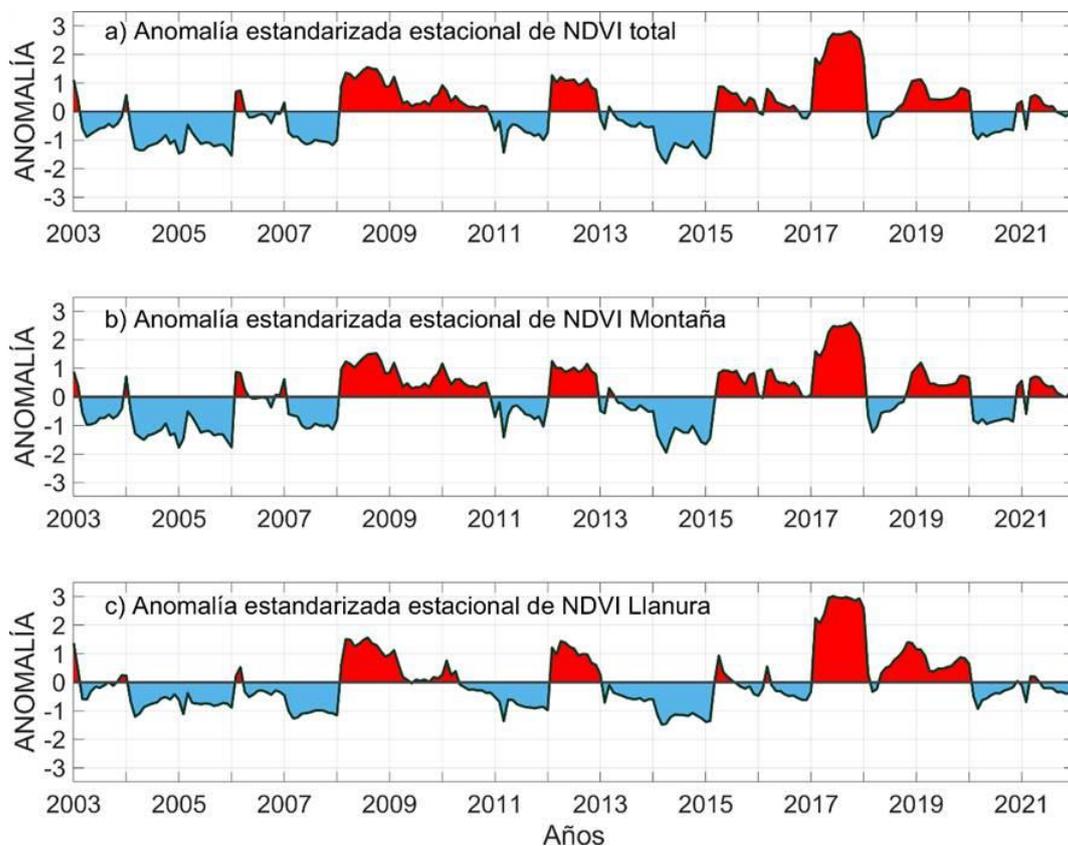
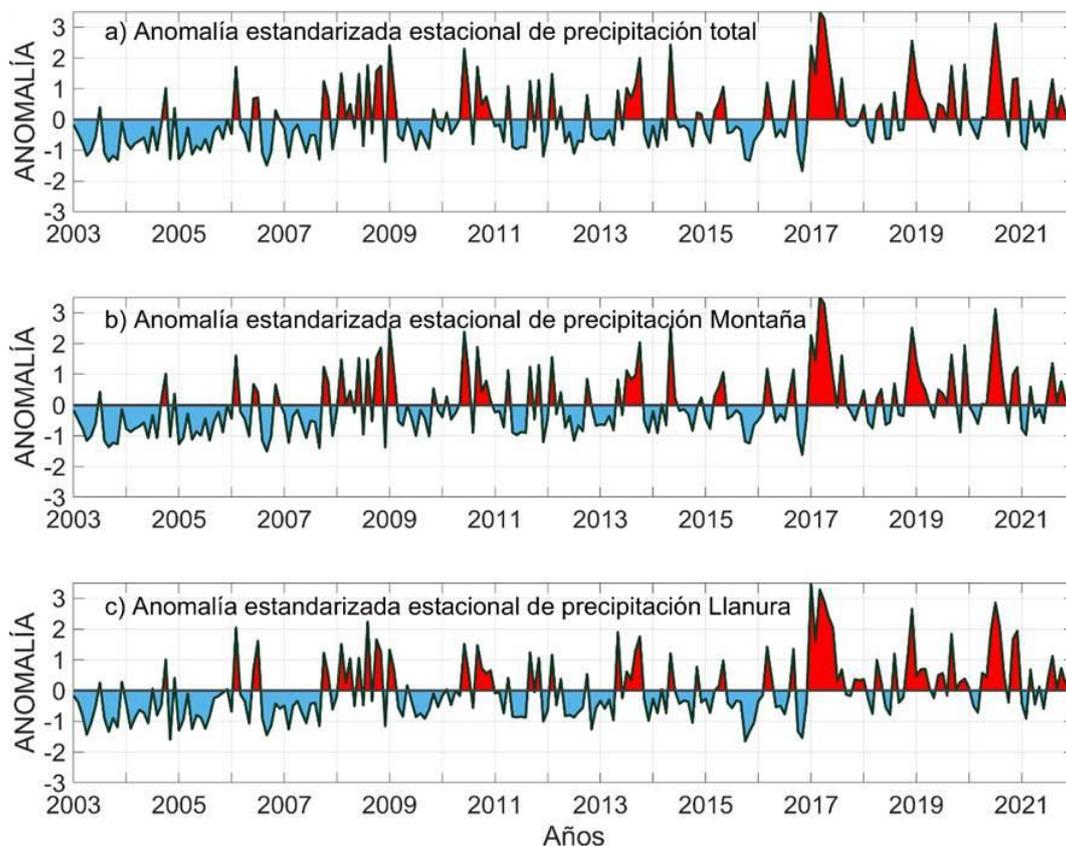


Figura 65

Gráficas de anomalía estandarizada estacional de las series de tiempo mensual de precipitación en el bosque seco.

**Figura 66**

Gráficas de anomalía estandarizada estacional de la serie de tiempo mensual de TSM en el área Niño 1+2.



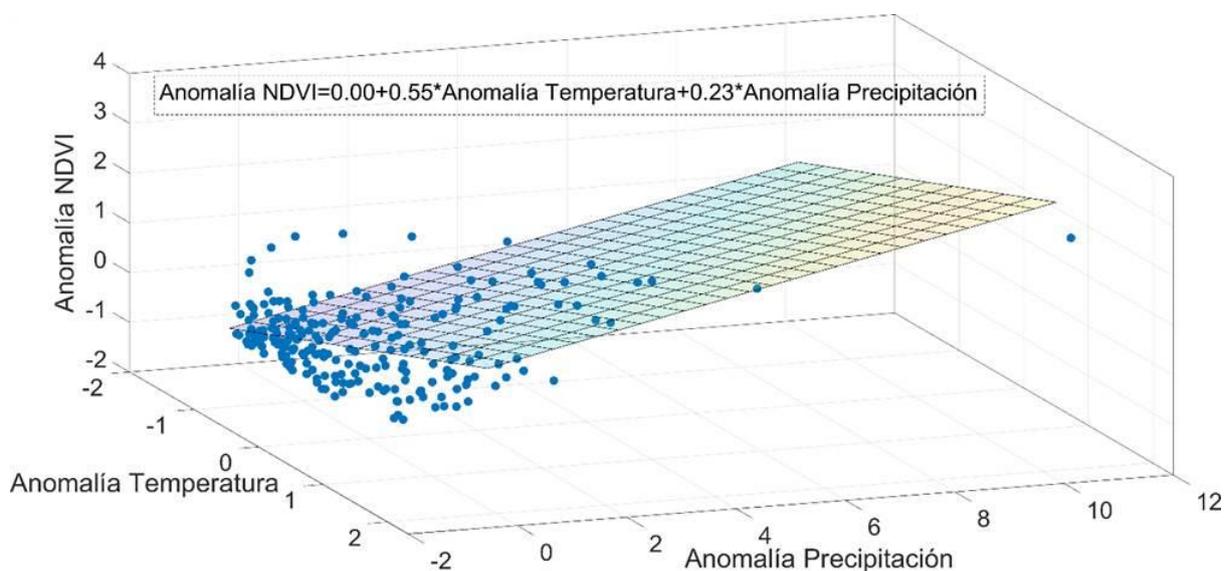
Se procede a establecer la relación entre los parámetros de TSM Niño 1+2, NDVI y precipitación del bosque seco en la costa norte del Perú, esta serie de datos serán convertidos mediante la fórmula de anomalía estandarizada para su análisis. Establecemos las relaciones

entre los parámetros mediante distintos modelos considerando al NDVI del bosque seco como la variable dependiente de la temperatura y precipitación.

4.6. Modelo de regresión lineal múltiple de NDVI, precipitación en el bosque seco y temperatura Niño 1+2

Figura 67

Representación de las observaciones a partir de las cuales se ha creado la superficie modelada.

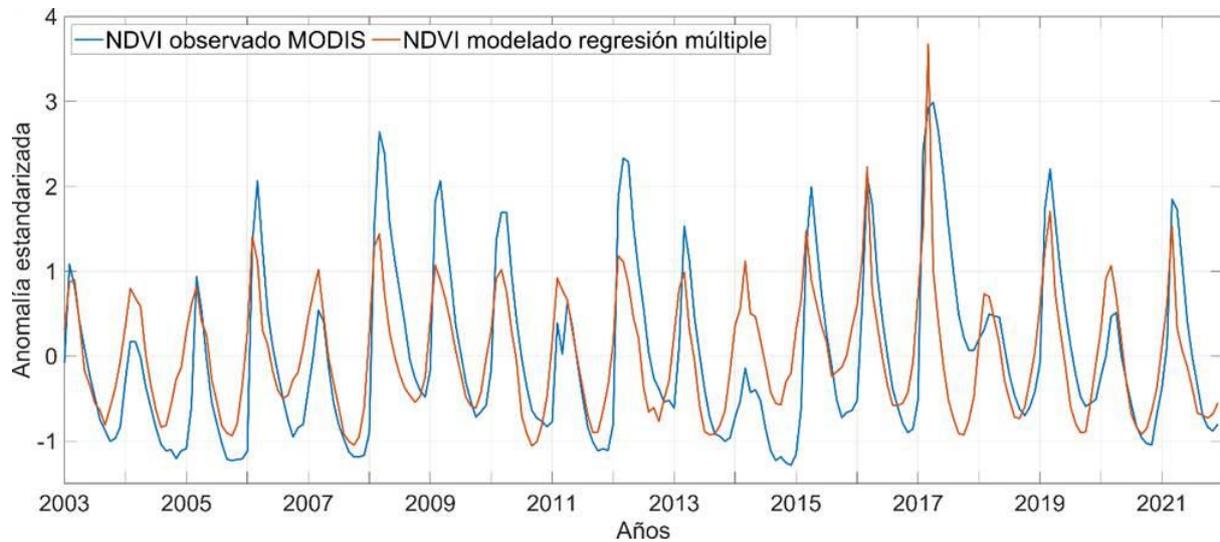


Establecemos la relación entre la temperatura superficial del mar en la región Niño1+2 con la precipitación y el NDVI del bosque seco en la costa norte peruana para el periodo 2003-2021 mediante la regresión lineal múltiple, considerando al NDVI como la variable dependiente y a la temperatura y precipitación como independientes. En la Figura 66, se muestra la correlación múltiple entre las variables predictoras y el NDVI. Desde esta perspectiva se ha logrado confirmar que existe relación entre la combinación de anomalía estandarizada de temperatura y precipitación versus el NDVI. La ecuación que se obtiene mediante la regresión lineal múltiple es:

$$Anomalía_NDVI(t) = 0.55 * Anomalía_TSM(t) + 0.23 * Anomalía_Precipitación(t) + e(t)$$

Figura 68

Comparación del NDVI observado y NDVI modelado mediante regresión múltiple.



De la tabla 4 podemos mencionar que SE representa el error estándar de los coeficientes y $tStat = \text{Estimación}/SE$ es el estadístico t de cada coeficiente se obtiene que el *pValue* del intercepto ($pValue=1$) es mayor que 0.05, por lo que este término no es significativo, el valor de Coeficiente de determinación indica que el modelo explica aproximadamente el 51% de la variabilidad en la variable de respuesta Anomalia NDVI y el modelo es significativo con un valor de $p\text{-value} = 2.33e-35$.

A partir de este resultado usando la regresión lineal múltiple se infiere que no es el más adecuado para establecer una relación entre los parámetros, esto lo confirmamos modelado los valores mensuales de NDVI en función de la temperatura y precipitación, este modelado no es el más adecuado debido a las respuestas (desfases) que hay entre los parámetros, por eso se opta por realizar la correlación cruzada de estas series de tiempo y encontrar el desfase entre las series.

Tabla 4

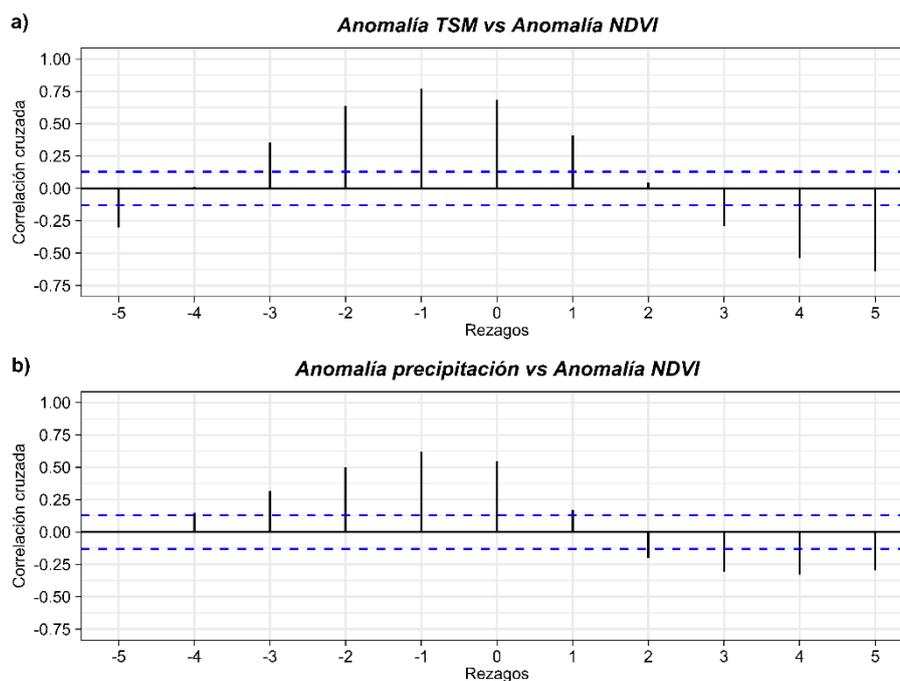
Parámetros estimados del modelo de regresión lineal múltiple con el efecto de las variables exógenas.

Modelo Regresión Múltiple: Anomalía NDVI ~ I + Var1 + Var2				
	Estimación	SE	tStat	pValue
Intercepto (I)	-3.8361e-15≈0.0	0.046669	-8.2198e-14	1
Anomalía Temperatura (Var1)	0.55246	0.056538	9.7715	5.0293e-19
Anomalía Precipitación (Var2)	0.23635	0.056538	4.1804	4.1689e-05
Las estadísticas descriptivas del modelo son:				
Numero de observaciones: 228, Error grados de libertad: 228-3=225				
Raíz cuadrada del error cuadrático medio (RMSE): 0.705				
Coeficiente de determinación: 0.508				
Coeficiente de determinación ajustado: 0.503				
Estadístico de la prueba F realizada en el modelo de regresión: 116				
Valor de p de la prueba F realizada en el modelo (p-value) = 2.33e-35				

4.7. Correlación cruzada de NDVI, TSM y precipitación

Figura 69

Gráfica de la correlación cruzada de serie de tiempo de anomalía estandarizada de NDVI, TSM y precipitación.



Luego se procede a obtener la correlación cruzada (Figura 68) entre las series de tiempo de anomalía estandarizada de TSM y precipitación con respecto a la anomalía estandarizada de NDVI, para diferentes desfases (Tabla 5), se encontró la mayor correlación entre la anomalía de TSM Niño1+2 y NDVI de 0.770 con un desfase de 1 mes, seguido de una correlación entre la anomalía de precipitación y NDVI de 0.623 con un desfase de 1 mes.

Tabla 5

Correlación cruzada entre la serie de tiempo de TSM región Niño 1+2, precipitación y NDVI.

Variables exógenas	Desfase entre variables vs NDVI						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
Anomalía temperatura	0.353	0.638	0.770	0.685	0.406	0.046	-0.292
Anomalía precipitación	0.317	0.497	0.623	0.547	0.171	-0.198	-0.309

Luego de obtener los desfases entre la serie de tiempo de TSM región Niño 1+2, precipitación y NDVI, aplicamos 4 modelos ARIMA para escoger el que mejor relaciona los tres parámetros.

4.8. Modelos ARIMA

Los modelos como la regresión lineal múltiple o más aún el ajuste por análisis de Fourier ciertamente podrían considerarse aceptables, pero analizaremos otro enfoque para explicar el comportamiento de esta serie de tiempo.

4.8.1. Modelo (1)

Aplicaremos el modelo estocástico autorregresivo AR a la serie de tiempo. No lo aplicaremos directamente a los datos de NDVI sino a los datos de anomalía estandarizada de los parámetros de NDVI, precipitación, TSM y Niño 1+2, debido a que es el mejor formato para trabajar con variables exógenas que en nuestro caso son las variables de TSM y precipitación. La anomalía estandarizada elimina las unidades de medida y con ello se puede

involucrar diferentes variables físicas. Veremos que un modelo estocástico funciona bien para esta serie. Se ha encontrado empíricamente que muchas series de tiempo pueden ajustarse adecuadamente con este modelo, generalmente con una pequeña cantidad de parámetros, digamos tres, cuatro o menos. Ajustaremos la serie de tiempo de NDVI denotada por $\{Y_t\}$ a un modelo autorregresivo AR(p) de orden p. El modelo AR es un caso simple del modelo general ARIMA(p,d,q)×(P,D,Q)s. En la práctica, normalmente no conocemos el orden del proceso autorregresivo y el orden debe especificarse a partir de los datos. Para ello se usan las gráficas de autocorrelación (ACF: siglas en inglés) y autocorrelación parcial (PACF: siglas en inglés). La función ACF es usada para identificar el proceso de media móvil (MA); mientras que la función PACF se usa para identificar los valores de la parte del proceso autorregresivo (AR). El modelo propuesto es sencillo pero muy efectivo. Finalmente, comprobamos la influencia de las variables exógenas en el modelamiento de la serie de anomalías del NDVI.

- **Especificación, ajuste y verificación del modelo**

Se muestran las especificaciones del modelo, el ajuste y la verificación del modelo. Primero ajustaremos el modelo sin considerar las variables exógenas y en la verificación del modelo las añadiremos.

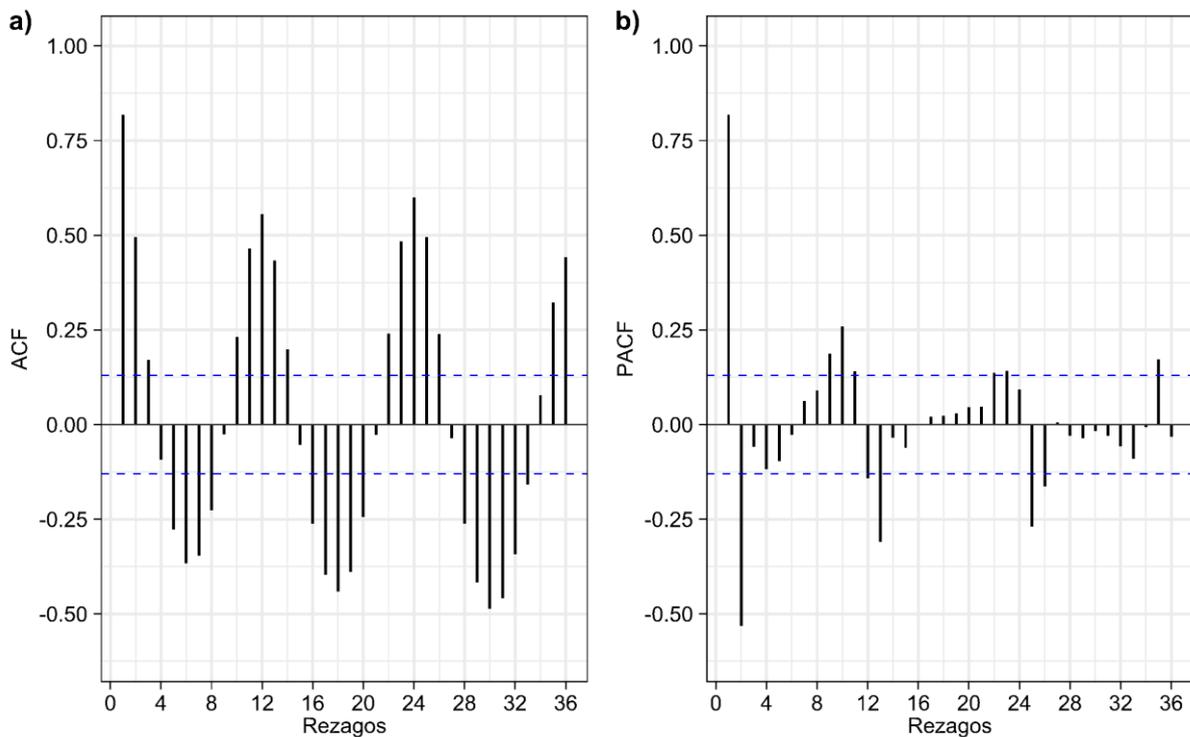
- **Especificación del modelo**

Para la especificación del modelo se usan las funciones ACF y PACF. Los gráficos generados a partir de estas funciones se denominan correlogramas, los cuales contienen bandas con un intervalo de confianza del 95%. Las gráficas en conjunto sugieren proponer un modelo autorregresivo AR(p).

La Figura 69a muestra el ACF para la serie de anomalías de NDVI. Las relaciones de autocorrelación estacional se muestran de manera bastante destacada en esta imagen. Observe la fuerte correlación en los retrasos 12, 24, 36, etc. Aparte de ello, la gráfica de ACF no parece darnos otra información relevante.

Figura 70

a) ACF y b) PACF de la serie de anomalías de NDVI.



Determinar el orden de un proceso autorregresivo a partir del ACF es difícil, ya que esta función es una mezcla de crecimientos exponenciales y sinusoidales, que se amortiguan al avanzar el retardo, y no presenta rasgos fácilmente identificables para determinar el orden del proceso (Peña, 2002). Para resolver este problema usamos el PACF. El ACF es una herramienta que aprovecha el hecho de que, mientras que un proceso $AR(p)$ tiene una función de autocorrelación que es infinita en extensión, las autocorrelaciones parciales PACF son cero más allá del rezago p . Es por ello por lo que la gráfica de PACF será de mayor utilidad para los propósitos del modelo. El PACF mide la asociación entre las variables una vez que hemos eliminado la dependencia respecto de las variables intermedias. El PACF de la Figura 69b muestra un valor alto en los rezagos 1 y 2. Existen otros rezagos significativos, pero en la práctica se suelen considerar hasta los primeros cuatro rezagos. La gráfica sugiere un modelo simple donde la incorporación de las autocorrelaciones de los rezagos 1 y 2 podría ser adecuada. En vista de ello proponemos un modelo autorregresivo AR de orden $p=2$. Como es

habitual, todos los modelos son provisionales y están sujetos a revisión en la etapa de diagnóstico de la construcción del modelo.

- **Ajuste del modelo**

Habiendo especificado un modelo AR(2) tentativo para la serie de anomalías de NDVI, procedemos a estimar los parámetros de este modelo de la manera más eficiente posible. La Tabla 6 proporciona las estimaciones de máxima verosimilitud y sus errores estándar para el modelo AR(2). La estimación de los coeficientes ϕ_1 y ϕ_2 son altamente significativo a excepción del valor de la media μ . El valor de μ debería ser cero ya que los datos están estandarizados, sin embargo, el modelo le asigna un valor pequeño. Procedemos a verificar más este modelo.

Tabla 6

Parámetros estimados del modelo (1).

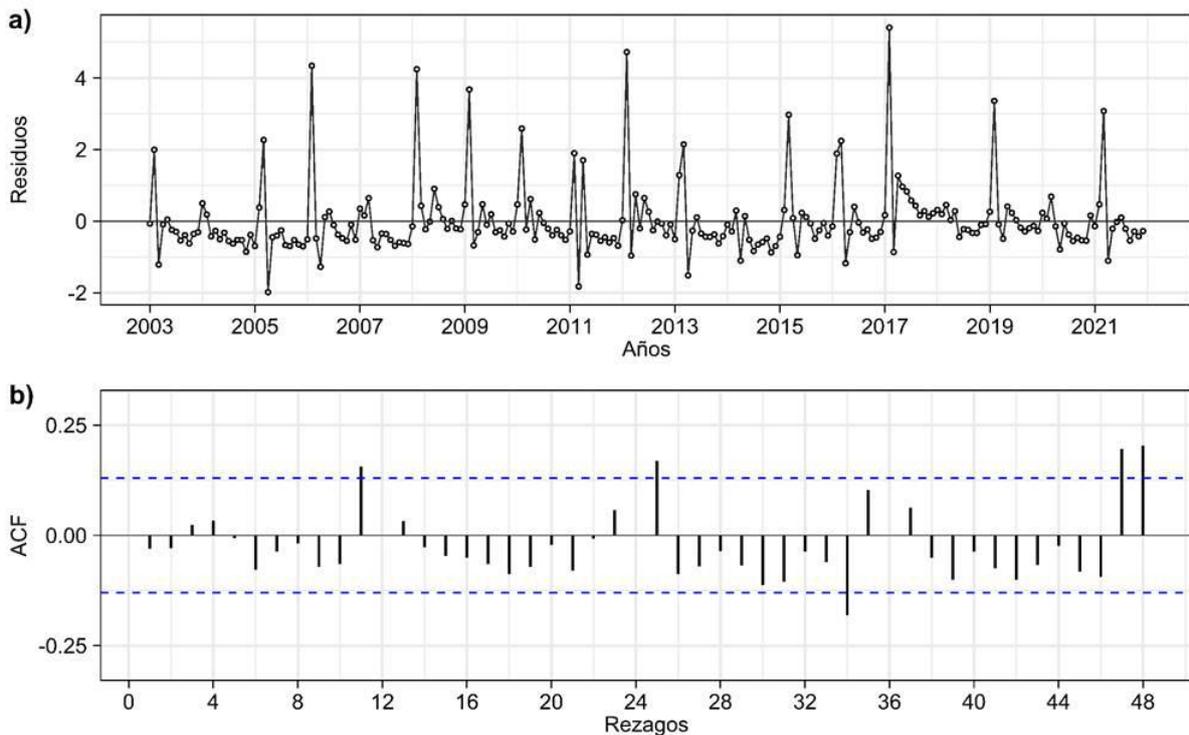
Coeficiente	ϕ_1	ϕ_2	μ
Estimado	1.2618	-0.5406	-0.0116
Error estándar	0.0558	0.0559	0.1139
$\hat{\sigma}_e^2 = 0.2344$: log-likelihood= -157.53, AIC=323.07			

- **Comprobación de modelo**

Para comprobar el modelo AR(2) estimado, primero observamos el gráfico de serie temporal de los residuos. La Figura 70a proporciona este gráfico para residuos estandarizados. Este gráfico no sugiere ninguna irregularidad importante en el modelo, aunque es posible que debamos investigar más el modelo en busca de valores atípicos ya que el residual estandarizado en abril de 2017 parece sospechoso.

Figura 71

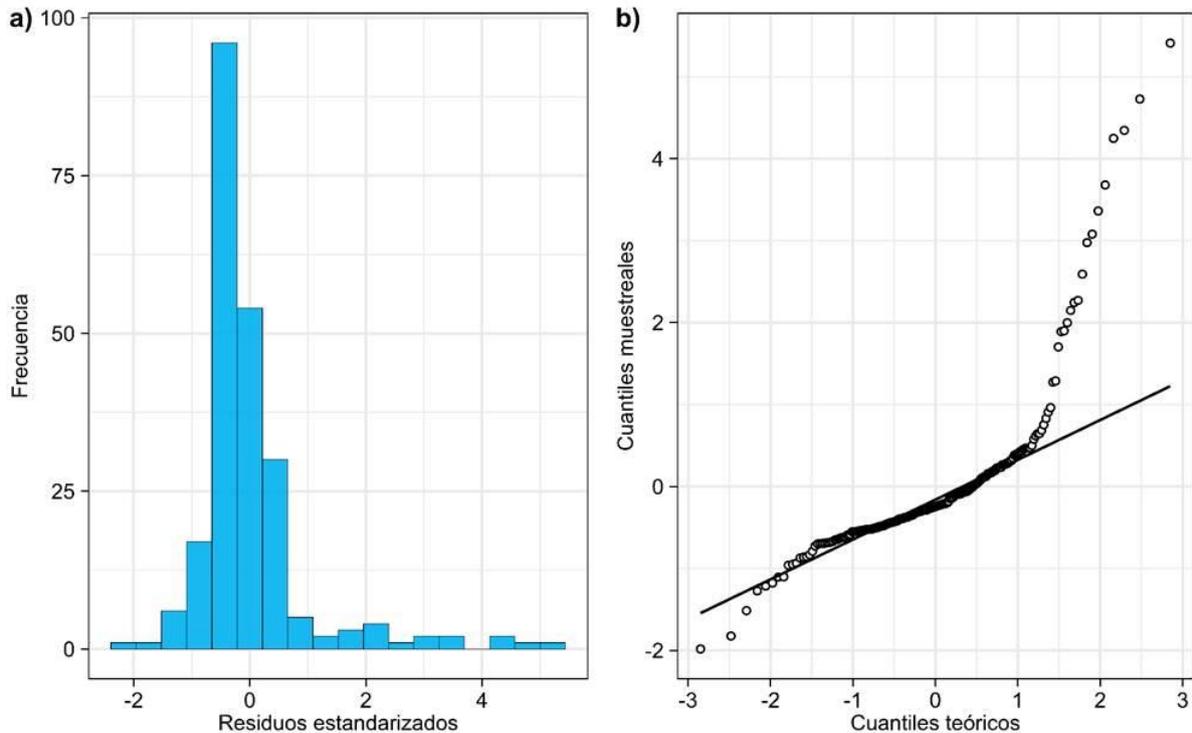
a) Residuales estandarizados y b) ACF de los residuales.



Para ver más, graficamos la muestra ACF de los residuales en la Figura 70b. Una correlación "estadísticamente significativa" se encuentra en el rezago 11, y esta correlación tiene un valor de solo 0.16, una correlación muy pequeña. Además, no podemos pensar en ninguna interpretación razonable para la dependencia en el rezago 25 y 34. Finalmente, no debería sorprendernos que unas poquísimas autocorrelaciones de las 48 mostradas sean estadísticamente significativas. Esto podría suceder fácilmente solo por casualidad. Descartando la importancia marginal de los rezagos 11, 25 y 34, el modelo parece haber capturado la esencia de la dependencia en la serie. A continuación, investigamos la normalidad de los residuos. La Figura 71a muestra el histograma de los residuos. La forma es algo "en forma de campana", pero ciertamente no es ideal. Quizás un gráfico Q-Q (cuantil-cuantil) nos diga más. La gráfica Q-Q (cuantil-cuantil) es útil para comprobar si los residuos están distribuidos normalmente. La Figura 71b muestra la gráfica Q-Q normal para los residuales. Los valores de la cola superior divergen de la línea recta, reflejando que los datos no están distribuidos normalmente. Este resultado afecta la robustez del modelo. Significa que los residuales contienen información que el modelo no ha podido capturar.

Figura 72

a) Histograma de los residuales y b) Gráfico Q-Q de los residuales. Las colas superiores están desviadas de una distribución normal.



- **Verificación del modelo**

Usamos los parámetros de la Tabla 6 para obtener la ecuación de nuestro modelo AR(2):

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t$$

Donde $\mu = -0.0116$; $\phi_1 = 1.2618$; $\phi_2 = -0.5406$ y e_t es el ruido aleatorio.

El modelo plantea que los valores actuales dependen fuertemente de los dos primeros rezagos. Por ejemplo, los valores de septiembre dependen de los valores de julio y agosto. Los valores estimados del modelo versus los valores reales (anomalías de NDVI) se han graficado en la Figura 72.

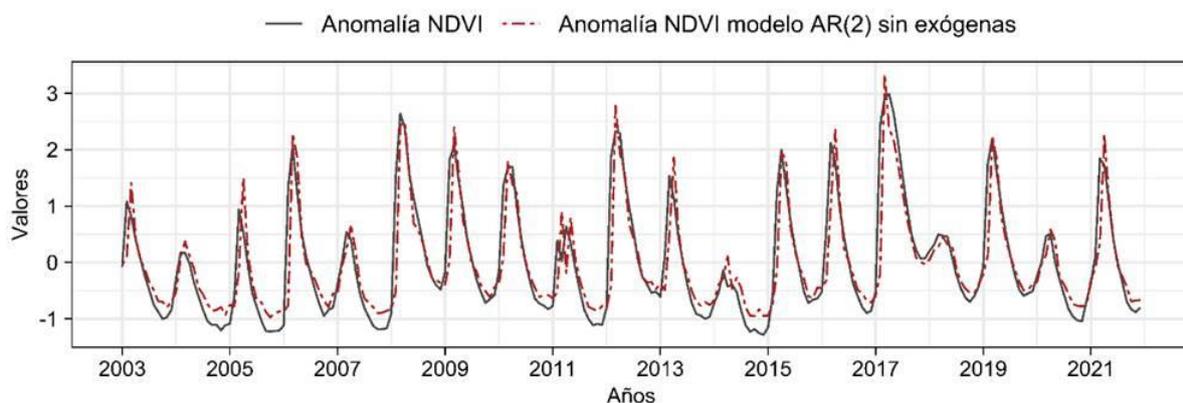
El modelo se ajusta bien a los datos en los meses de mayor valor de NDVI, pero en los meses con valores bajos el modelo sobreestima. Mejoraremos este modelo a continuación.

- **Optimización del modelo propuesto**

Se ha comprobado que el modelo mejora si incluimos variables exógenas que tienen efecto en el comportamiento de la anomalía del NDVI. Incluiremos las anomalías estandarizadas de TSM (A_TSM) y precipitación (A_Precipitación).

Figura 73

Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2).



- **Incorporación de variables exógenas**

A nuestro modelo autorregresivo AR(2) se le pueden añadir variables exógenas que pueden contribuir a explicar la variabilidad, por ejemplo, si añadimos dos variables exógenas X_1 y X_2 el modelo sería:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e_t$$

Donde β_1 y β_2 son los coeficientes de las variables exógenas. Mientras más significativos sean estos coeficientes mayores serán sus efectos en la serie temporal.

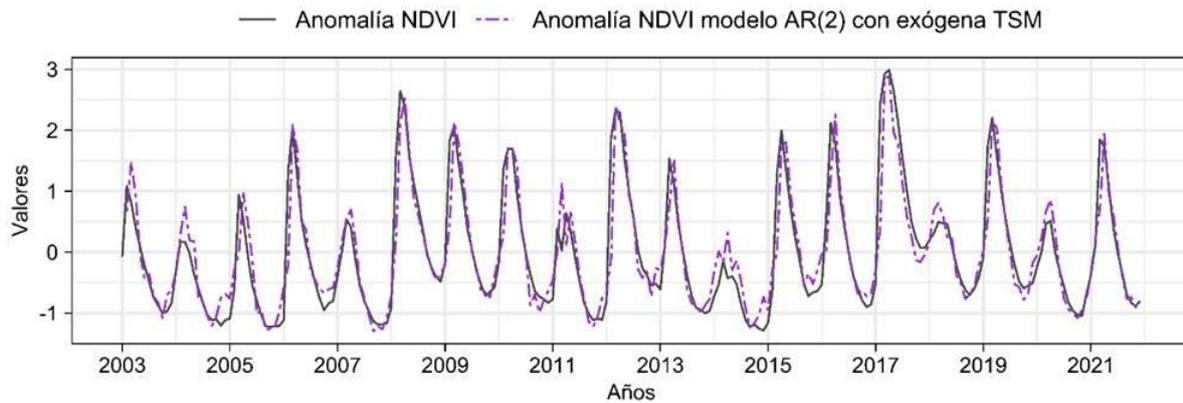
4.8.2. Modelo (2)

- **Efecto de la TSM.**

Incorporamos sólo el efecto de la A_TSM con un rezago de 1 mes. El valor del coeficiente β_1 de la variable A_TSM es significativo (Tabla 7). Se evidencia una mejora en el modelo notablemente (Figura 73).

Figura 74

Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2) con la variable exógena de A_TSM.



Los valores en los mínimos del modelo han mejorado y se ajusta bien a la serie real.

Tabla 7

Parámetros estimados del modelo AR(2) con el efecto de la variable exógena A_TSM.

Coeficiente	ϕ_1	ϕ_2	μ	β_1
Estimado	0.8696	-0.1366	0.0059	0.7506
Error estándar	0.0671	0.0674	0.0999	0.0593
$\hat{\sigma}_e^2 = 0.1677$: log-likelihood= -117.87, AIC= 245.74				

4.8.3. Modelo (3)

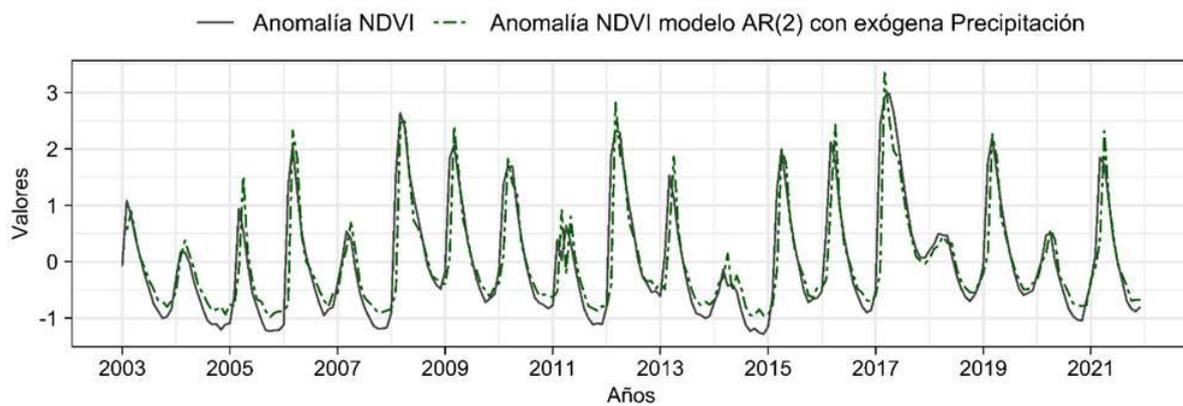
- **Efecto de la precipitación.**

Incorporamos el efecto de sólo la A_Precipitación con un rezago de 2 meses. El valor del coeficiente β_2 de la variable A_Precipitación es poco significativo (Tabla 8). No se evidencia una mejora en el modelo (Figura 74).

Al ser el coeficiente β_2 muy pequeño, nos da un resultado importante, la precipitación prácticamente no influye en la variabilidad del NDVI.

Figura 75

Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2) con la variable exógena de A_Precipitación.

**Tabla 8**

Parámetros estimados del modelo AR(2) con el efecto de la variable exógena A_Precipitación.

Coefficiente	ϕ_1	ϕ_2	μ	β_2
Estimado	1.2552	-0.5280	0.0043	0.0218
Error estándar	0.0585	0.0591	0.1156	0.0268
$\hat{\sigma}_e^2 = 0.2313$; log-likelihood= -154.82, AIC= 319.63				

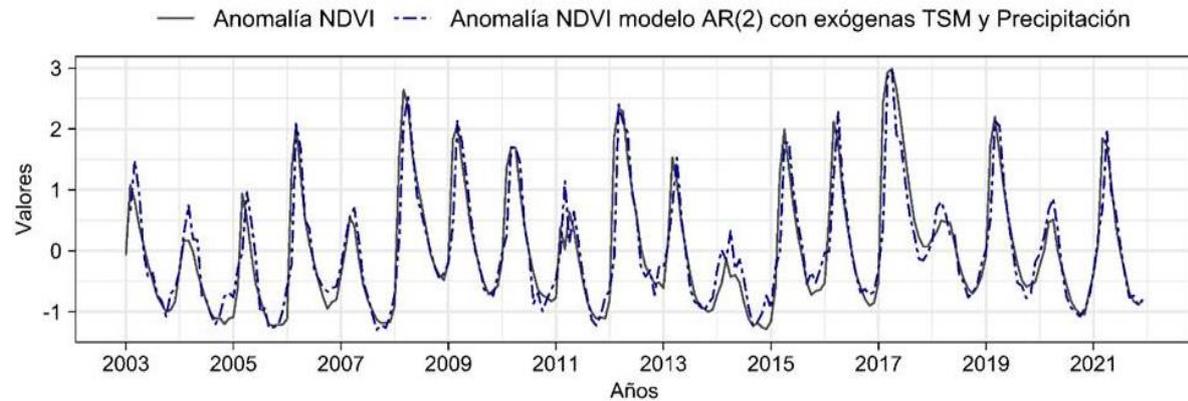
4.8.4. Modelo (4)

- **Efecto conjunto de la precipitación y TSM.**

Incorporamos el efecto conjunto de A_TSM con rezago de 1 mes y A_Precipitación con rezago de 2 meses. La serie obtenida en la Figura 75 es semejante al de la Figura 73. Se mantiene la no influencia de la precipitación. Esto se evidencia en el valor pequeño β_2 de la Tabla 9. La estimación de los coeficientes de la Tabla 9 es significativa con excepción del valor de la media μ . Al analizar el valor de los coeficientes, se comprueba nuevamente que la A_TSM tiene mayor efecto en el comportamiento de la serie de NDVI en comparación con la A_Precipitación donde su efecto es prácticamente despreciable.

Figura 76

Serie de tiempo de valores reales de NDVI versus los valores estimados por el modelo AR(2) con las variables exógena de precipitación y TSM.

**Tabla 9**

Parámetros estimados del modelo AR(2) con el efecto de las variables exógenas. Los coeficientes β_1 y β_2 son de las variables A_TSM y A_PRE respectivamente.

Coeficiente	ϕ_1	ϕ_2	μ	β_1	β_2
Estimado	0.8616	-0.1282	0.0059	0.7454	0.0083
Error estándar	0.0737	0.0746	0.1000	0.0620	0.0309
$\hat{\sigma}_e^2 = 0.1684$; log-likelihood= -117.83, AIC=247.67					

En conclusión, el modelo optimizado sería con los parámetros de la Tabla 7 considerando la temperatura (mejor AIC=245.74 y r=0.914) del modelo (2) considerando el efecto de la TSM:

$$Y_t = 0.0059 + 0.8696 * Y_{t-1} - 0.1366 * Y_{t-2} + 0.7506 * A(TSM) + e_t$$

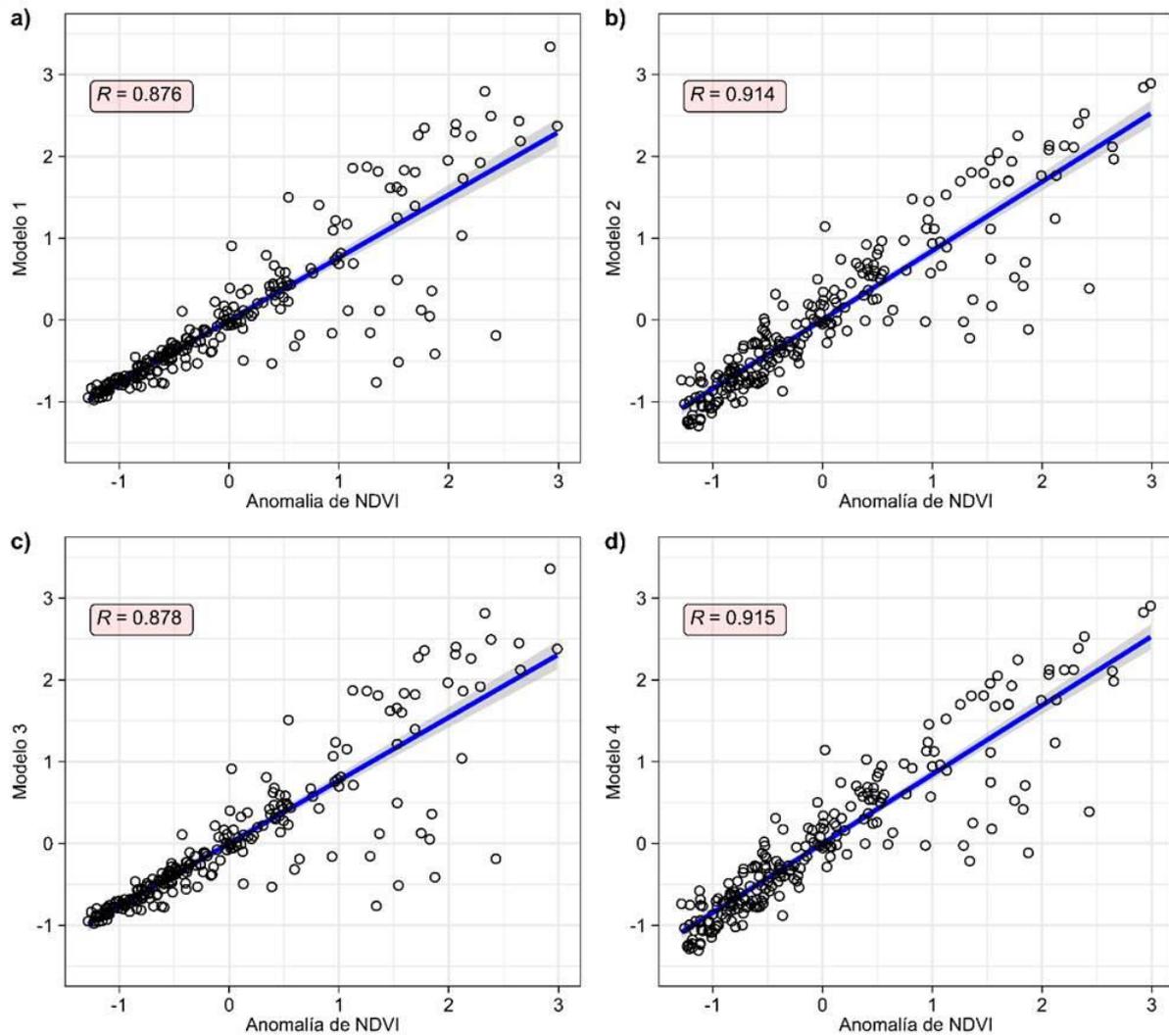
V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El tratamiento de los datos NDVI como indicador de la vegetación como el bosque seco, permite establecer una serie de tiempo de la anomalía estandarizada del promedio espacial y mensual del NDVI en el bosque seco de la costa norte de Perú, en el periodo de enero de 2003 a diciembre de 2021, aunque este periodo no cumple con el periodo mínimo de 30 años, recomendado por la Organización Meteorológica Mundial sobre estudios climatológicos (https://library.wmo.int/doc_num.php?explnum_id=4167), es relevante tener información histórica de la evolución del bosque seco, las series de tiempo permite establecer periodos de anomalías negativas o positivas extremas, que están relacionadas con la ocurrencia de eventos extremos como sequías o el ENSO. Según la información bibliográfica recopilada se determina que durante 2004 se presentó evento de sequía en la costa norte de Perú esto es corroborado con el déficit de precipitación mensual en el año 2004 en dicha zona de estudio (<https://www.senamhi.gob.pe/?p=prensa&n=973>). Se pudo inferir que el NDVI es un posible indicador de la sequía en el bosque seco de la costa norte, aunque se determinó que su influencia no fue muy relevante para el bosque seco. También se investigó el efecto de los forzadores climáticos sobre la evolución del NDVI en el bosque seco, son estudiadas a través de modelos ARIMA entre las series de tiempo de anomalía estandarizada de NDVI, con la serie de tiempo de anomalía estandarizada de la Temperatura de Superficie del Mar en la región El Niño 1+2 y la precipitación en el bosque seco, el cual permitió encontrar que es la temperatura superficial del mar en la región del Niño 1+2 la que más influye en la dinámica del NDVI en el bosque seco, y la precipitación no afecta en su evolución esto lo podemos observar en la Figura 76 se muestra los gráficos de dispersión entre el NDVI simulado y el NDVI observado, se observa que el mejor modelo ARIMA es el modelo (4) que establece la relación entre la anomalía de temperatura superficial del mar en la región Niño1+2 con la precipitación y el NDVI del bosque

seco en la costa norte peruana para el periodo 2003 -2021 con un desfase de 1 mes, cuyo coeficiente de regresión es 0.9172 entre dichas series.

Figura 77

Gráficas de correlación entre la anomalía de NDVI observado y el NDVI simulado para los 4 modelos ARIMA.



VI. CONCLUSIONES

Del análisis de la climatología del bosque estacionalmente seco en la costa norte del Perú utilizando datos imágenes de satélites, se llega a las siguientes conclusiones:

- a. La climatología del bosque seco en la costa norte del Perú caracteriza cuatro franjas en intensidad: $0 \leq \text{NDVI} \leq 0.2$, $0.2 < \text{NDVI} \leq 0.3$, $0.3 < \text{NDVI} \leq 0.5$ y $0.5 < \text{NDVI} \leq 1$.
- b. Los mapas de variación estacional del NDVI en la Costa Norte Peruana reflejan claramente la influencia de la precipitación.
- c. El análisis detallado del NDVI en la Costa Norte Peruana muestra un aumento de NDVI de este a oeste en función de la longitud geográfica.
- d. Las primeras componentes principales de NDVI y precipitación *in situ*, en entorno a las estaciones del SENAMHI tiene una correlación en promedio de 0.66 con un desfase de un mes.
- e. El NDVI de los bosques secos es afectado de manera favorable por el fenómeno El Niño de 2017 en la costa norte de Perú, es decir hay mayor cantidad de vegetación, en cambio en el año 2004 se presentó una sequía agrícola, que afecto la curva de NDVI.
- f. Se obtiene una correlación máxima de 0.77 entre la anomalía estandarizada de la TSM en la región Niño 1+2 y la anomalía estandarizada de NDVI en el área de bosques secos de la costa norte, con un desfase de 1 mes, es decir el tiempo de respuesta de la vegetación de los bosques secos ante un incremento de temperatura en el mar es de 1 mes.
- g. Se obtiene una correlación máxima de 0.62 entre la anomalía estandarizada de la precipitación y la anomalía estandarizada de NDVI ambos en el área de bosques secos de la costa norte, con un desfase de 1 mes, es decir el tiempo de respuesta de la vegetación de los bosques secos ante un incremento de precipitación en el bosque seco es de 1 mes.

- h. Se estableció la mejor relación de los parámetros mediante un modelo ARIMA donde simulamos el NDVI, siendo el modelo (2) el que mejor establece la relación entre la anomalía de temperatura superficial del mar en la región Niño1+2 y el NDVI del bosque seco en la costa norte peruana para el periodo 2003 -2021 con un desfase de 1 mes.

VII. RECOMENDACIONES

- a. Implementar la metodología considerando otros sensores con un mayor rango temporal de datos (ej. El producto NDVI del sensor AVHRR).
- b. Obtener más índices de vegetación y poder discriminar cuales son determinantes en la dinámica del bosque seco en la costa norte del Perú.
- c. Realizar el modelamiento ARIMA de las series de tiempo del bosque seco (bosque seco de montaña y llanura) y determinar su posible relación con la precipitación.

VIII. REFERENCIAS

- Albuquerque, S. E. (2017). *Funciones ortogonales empíricas y su aplicación a datos de temperatura superficial del mar*. [Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. Repositorio Institucional UNMSM. <https://cybertesis.unmsm.edu.pe/item/4338a151-cf00-4a31-b3be-3c9ae88cb843>
- Bonakdari, H., y Zeynoddin, M. (2022). *Stochastic Modeling: A Thorough Guide to Evaluate, Pre-Process, Model and Compare Time Series with MATLAB Software*. Elsevier.
- Bookbinder, M. P.; Dinerstein, E.; Graham, D. J.; Ledec, G. C.; Olson, D. M.; Primm, S. A.; Webster, A. L.; World Wildlife Fund (1995). *A conservation assessment of the terrestrial ecoregions of Latin America and the Caribbean: Una evaluación del estado de conservación de las ecoregiones terrestres de América Latina y el Caribe (Spanish)*. Washington, D.C.: World Bank Group. <https://documents1.worldbank.org/curated/en/917091468269687252/pdf/14996010spanish.pdf>
- Bravo Ferro, M., y Rodríguez Sánchez, M. (2003). *Detección de cambios en los bosques secos del norte del Perú: un análisis temporal entre los años 1991 y 2000 en Malinguitas*. (2003) no. 7 p. 211-232.
- Cabin, R. J., Weller, S. G., Lorence, D. H., Flynn, T. W., Sakai, A. K., Sandquist, D., y Hadway, L. J. (2000). *Effects of long - term ungulate exclusion and recent alien species control on the preservation and restoration of a Hawaiian tropical dry forest*. *Conservation Biology*, 14(2), 439-453
- Campos A. y Guerrero E. (2017). *Evaluación de la evolución de la cobertura vegetal a través del índice de vegetación de diferencia normalizada (NDVI) en el Parque Nacional Cerros de Amotape y la Reserva Nacional de Tumbes en el periodo 2000 – 2015*. [Tesis

- para optar el título profesional de ingeniero forestal y del medio ambiente, Universidad Nacional de Tumbes]. Repositorio Institucional UNTUMBES. <https://repositorio.untumbes.edu.pe/handle/20.500.12874/353>
- Cerna I., (2021). *Registro de mamíferos medianos y sus patrones de actividad en el bosque seco de montaña de Cascas, Gran Chimú, La Libertad, 2021*. [Tesis para optar el Título profesional de Biólogo, Universidad Nacional de Trujillo]. Repositorio Institucional UNT. <https://repositorioslatinoamericanos.uchile.cl/handle/2250/4744135>
- Chuvieco, E. (2016). *Fundamentals of Satellite Remote Sensing: An Environmental Approach, Second Edition (2nd ed.)*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b19478>
- Emery, W. y Thomson, R. (2014). *Data Analysis Methods in Physical Oceanography: Third Edition*. 10.2307/1353059.
- Emery, W., y Camps, A. (2017). *Introduction to satellite remote sensing: atmosphere, ocean, land and cryosphere applications*. Elsevier
- Estudio Nacional del Fenómeno El Niño [ENFEN]. (2012): *Definición operacional de los eventos El Niño y La Niña y sus magnitudes en la costa del Perú, Nota Técnica*. Disponible en https://www.dhn.mil.pe/Archivos/Oceanografia/ENFEN/nota_tecnica/Definicion%20Operacional%20ENFEN_09abr12.pdf
- Espinosa, C. I., De la Cruz, M., Luzuriaga, A. L., y Escudero, A. (2012). *Bosques tropicales secos de la región Pacífico Ecuatorial: diversidad, estructura, funcionamiento e implicaciones para la conservación*. *Ecosistemas*, 21(1-2).
- Fick, S. E., y Hijmans, R. J. (2017). *WorldClim 2: new 1 - km spatial resolution climate surfaces for global land areas*. *International journal of climatology*, 37(12), 4302-4315.
- Fuller, W. A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series*, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons.

- Funk, C., Peterson, P., Landsfeld, M., Pedreros, D., Verdin, J., Shukla, S., Michaelsen, J. (2015). The climate hazards infrared precipitation with stations-a new environmental record for monitoring extremes. *Scientific Data*, 2, 150066. <http://doi.org/10.1038/sdata.2015.66>.
- Gómez M. (2005). *Índice de vegetación en áreas del bosque seco del noroeste del Perú a partir de imágenes satelitales*. [Tesis para optar el título profesional de ingeniero industrial y de sistemas, Universidad de Piura]. Repositorio Institucional UDEP. <https://pirhua.udep.edu.pe/items/77a42f26-4676-4433-9667-848887aec897>
- Guerrero S. J. (2015). *Investigación de la climatología de la humedad atmosférica y su relación con la sequía en la costa peruana utilizando imágenes de satélite del sensor MODIS/TERRA*. [Tesis para optar el grado académico de magister en física con mención en Geofísica, Universidad Nacional Mayor de San Marcos]. Repositorio Institucional UNMSM. <https://cybertesis.unmsm.edu.pe/item/2e78f456-80ec-4ea1-ab2e-2140b271633b>
- Hovmöller, E. (1949). The Trough-and-Ridge diagram. *Tellus*, 1(2), 62–66. doi:10.3402/tellusa.v1i2.8498
- Johnson R. y Wichern D. (2014) *Applied Multivariate statistical analysis*, (6th Edition).
- Karszenbaum, H. (2005). *Protocolo procesamiento de imágenes satelitales Landsat*. SIB. Buenos Aires, Argentina. 1 p.
- La Torre, M., y Linares, R. (2008). Mapas y clasificación de vegetación en ecosistemas estacionales: un análisis cuantitativo de los bosques secos de Piura. *Revista Perú biológico* 15(1), 31-42.
- Lieberman, D., y Li, M. (1992). Seedling recruitment patterns in a tropical dry forest in Ghana. *Journal of Vegetation Science*, 3(3), 375–382. doi:10.2307/3235763

- Li, P., Wang, J., Liu, M., Xue, Z., Bagherzadeh, A., y Liu, M. (2021). Spatio-temporal variation characteristics of NDVI and its response to climate on the Loess Plateau from 1985 to 2015. *Catena*, 203, 105331.
- Linares, R. (2005). Spatial distribution patterns of trees in a seasonally dry forest in the Cerros de Amotape National Park, northwestern Peru. *Bosques relictos del NO de Perú y SO de Ecuador*. Facultad de Ciencias Biológicas UNMSM, pp. 317-326.
- Lomb NR (1972) Least-squared frequency analysis of unequally spaced data. *Astro-Phys Space Sci* 39:447–462
- Martínez, A. y Morón, K. (2017). Comparación entre los impactos de los eventos El Niño costero 1925 y 2017. *Boletín Técnico: Generación de información y monitoreo del Fenómeno El Niño*, 4 (4), 8-9. Disponible en <https://repositorio.igp.gob.pe/items/d5e070b9-e6d5-4689-9759-dad991620e4c>
- Melendres M., (2018). *Análisis de Series de Tiempo de los Índices de Vegetación EVI y NDVI a partir de Datos Imágenes del Sensor MODIS-TERRA (250 m) y el seguimiento de la producción y rendimiento de los cultivos agrícolas en la cuenca Chancay Lambayeque (2001 - 2014)*. [Tesis para optar el Título profesional de Ingeniero Agrónomo, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. Repositorio Institucional UNPRG. <https://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/1985>
- Mendoza, Z. A., y Kvist, L. P. (2005). Floristic composition and conservation status of the dry forests in Ecuador. *Lyonia* 8 (2) 2005-Dry Forest Biodiversity and Conservation 1: Biodiversity
- Ministerio del Ambiente [MINAM]. (2018) (Programa Bosques) y MINAGRI (SERFOR). Mapa de Bosque Estacionalmente Seco y Bosque Tropical del Pacífico para los departamentos de Piura, Tumbes y Lambayeque al 2018. Acceso a través de

GEOBOSQUES. Disponible en
<http://geobosques.minam.gob.pe/geobosque/view/index.php>

Palacios-Ramos S, Montenegro R, Appleton RD, Sánchez RI, Vallejos DJ, Vallejos J, Owen MA, Van Horn RC. (2022). La fenología de *Colicodendron scabridum*, sapote, en un bosque seco del norte del Perú. *Caldasia* 44(3): xx–xx. Doi: <https://doi.org/10.15446/caldasia.v44n3.91427>

Peña, Daniel. (2002). *Análisis de Datos Multivariantes*. McGraw-Hill, Madrid.

Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., and Flannery B. P. (2007) *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing (3rd. ed.)*. Cambridge University Press, USA.

Rodríguez, R., Mabres, A., Palacios, E. y Salazar, P. (2018). El Niño registrado en especies arbóreas del bosque seco de la costa norte del Perú. *Boletín técnico: Generación de modelos climáticos para el pronóstico de la ocurrencia del Fenómeno El Niño*, Instituto Geofísico del Perú, 5 (4), 5-9. <https://repositorio.igp.gob.pe/items/d1fa64ec-0ced-4b87-abfb-c79b757d8731>

Rojas Acuña, J., Rufasto Campos, E., Eche Llenque, J. C., y Carrillo Gomero, F. (2008). Modelo de la Sequía en la Costa Norte de Perú Usando los Índices ENOS y las Imágenes NDVI del Sensor AVHRR a Bordo del Satélite NOAA. *Electrónica - UNMSM*, (21), 12–22. Recuperado a partir de <https://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/electron/article/view/3247>

Roy, S., y Singh, J. S. (1995). Seasonal and spatial dynamics of plant-available N and P pools and N-mineralization in relation to fine roots in a dry tropical forest habitat. *Soil Biology and Biochemistry*, 27(1), 33-40.

Ruthenberg, H. (1971) *Farming Systems in the Tropics*. (Clarendon Press).

- Scargle JD (1982) Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *Astrophys J* 263:835–853
- Schott, J. R. (2007). *Remote sensing: The image Chain Approach*. Oxford University Press, 666 pp.
- Slutsky, E. (1927). “The summation of random causes as the source of cyclic processes” (in Russian). In *Problems of Economic Conditions*, English translation (1937) in *Econometrica*, 5, 105–146.
- Trenberth, K. E. (2019) El Niño Southern Oscillation (ENSO). In *Encyclopedia of Ocean Sciences* (eds. Cochran, J. K., Bokuniewicz, H. J. & Yager, P. L.) 420–432, <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-409548-9.04082-3> (Elsevier Inc).
- Tian, F., Fensholt, R., Verbesselt, J., Grogan, K., Horion, S., y Wang, Y. (2015). Evaluating temporal consistency of long-term global NDVI datasets for trend analysis. *Remote Sensing of Environment*, 163, 326-340.
- Vega, F. (2019) Respuesta de la vegetación a diferentes escalas temporales de sequía en los Andes Peruanos. Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú – SENAMHI. Dirección de Hidrología –DHI.
- Vieira, D. L., y Scariot, A. (2006). Principles of natural regeneration of tropical dry forests for restoration. *Restoration ecology*, 14(1), 11-20.
- Yang, Y., Wang, S., Bai, X., Tan, Q., Li, Q., Wu, L., Tian, S., Hu, Z., Li, C., Deng, Y. (2019). Factors Affecting Long-Term Trends in Global NDVI. *Forests*, 10(5), 372. doi:10.3390/f10050372
- Yule, G. U. (1926). “Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series? — A study in sampling and the nature of time-series.” *Journal of the Royal Statistical Society*, 89, 1, 1–63.

Zhao, J., Huang, S., Huang, Q., Wang, H., Leng, G., y Fang, W. (2020). Time-lagged response of vegetation dynamics to climatic and teleconnection factors. *Catena*, 189, 104474.

Wei, W. W. S. (2005). *Time Series Analysis*, 2nd ed. Redwood City, CA: Addison-Wesley.

Wilks. D. (2006) *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences* (Vol. Volume 59, p. 464). Academic Press

Wold, H. O. A. (1938). *A Study of the Analysis of Stationary Time Serie*. (2nd ed. 1954). Uppsala: Almqvist and Wiksells.

IX. ANEXOS

Anexo A: La región de estacionariedad para un proceso AR (2).

Anexo B: La función de autocorrelación para ARMA(p,q).

Anexo C: Código elaborado en GEE para la descarga y preprocesamiento del NDVI.

Anexo D: Código elaborado en GEE para la descarga y preprocesamiento de precipitación CHIRPS.

Anexo E: Valores de NDVI, precipitación (PP) y temperatura del área Niño 1+2 (TSM) dentro de los bosques secos de la costa norte en el periodo 2003-2021.

Anexo A: La región de estacionariedad para un proceso AR (2)

En el caso de segundo orden, se encuentra fácilmente que las raíces del polinomio cuadrático característico son

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \quad (\text{A.1})$$

Por estacionariedad requerimos que estas raíces superen 1 en valor absoluto. Ahora mostramos que esto será cierto si y sólo si se cumplen tres condiciones:

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_1 - \phi_2 < 1, \quad \text{y} \quad |\phi_2| < 1, \quad (\text{A.2})$$

Demostración: Denotemos los recíprocos de las raíces como G_1 y G_2 . Entonces

$$G_1 = \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} = \frac{2\phi_2}{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \left[\frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}} \right]$$

$$G_1 = \frac{2\phi_2 (-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2})}{\phi_1^2 - (\phi_1^2 + 4\phi_2)} = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

Similarmente,

$$G_2 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

Ahora se divide la demostración en dos casos correspondientes a raíces reales y complejas.

Las raíces serán reales si y sólo si $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$.

I. Raíces Reales: $|G_i| < 1$, para $i = 1$ y 2 si y sólo si

$$-1 < \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2} < 1$$

o

$$-2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2.$$

Considere sólo la primera desigualdad. Ahora $-2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}$ sí y solo si $\sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < \phi_1 + 2$ sí y solo si $\phi_1^2 + 4\phi_2 < \phi_1^2 + 4\phi_2 + 4$ sí y solo si $\phi_2 - \phi_1 < 1$. La desigualdad $\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2$ se trata de manera similar y conduce a $\phi_2 + \phi_1 < 1$. Estas ecuaciones junto con $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$ definen la región de estacionariedad para el caso raíz real que se muestra en la Figura 17.

II. Raíces complejas: Ahora $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$. Aquí G_1 y G_2 serán conjugados complejos y $|G_1| = |G_2| < 1$ sí y solo si $|G_1|^2 < 1$. Pero $|G_1|^2 = [\phi_1^2 + (-\phi_1^2 - 4\phi_2)]/4 = -\phi_2$ de modo que $\phi_2 > -1$. Esto junto con la desigualdad $\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ define la parte de la región de estacionariedad para raíces complejas que se muestra en la Figura 17 y establece la Ecuación (2.64). Esto completa la prueba.

Anexo B: La función de autocorrelación para ARMA(p,q)

Sea $\{Y_t\}$ un proceso ARMA(p,q) estacionario e invertible. Recuerde que siempre podemos escribir tal proceso en forma de proceso lineal general como

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t-j} \quad (\text{B.1})$$

donde los pesos ψ se pueden obtener de forma recursiva a partir de las Ecuaciones (2.91).

Entonces tenemos

$$E(Y_{t+k}e_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e_{t+k-j} e_t\right) = \psi_j \sigma_e^2 \text{ para } k \geq \quad (\text{B.2})$$

Por tanto, la autocovarianza debe satisfacer

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(Y_{t+k}Y_t) = E\left[\left(\sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t+k-j} - \sum_{j=0}^q \theta_j Y_{t+k-j}\right)Y_t\right] \\ &= \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma_{k-j} - \sigma_e^2 \sum_{j=k}^q \theta_j \psi_{j-k} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

donde $\theta_0 = -1$ y la última suma está ausente si $k > q$.

Configuración $k = 0, 1, \dots, p$ y usando $\gamma_{-k} = \gamma_k$ lleva a $p+1$ ecuaciones lineales en $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$.

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p - \sigma_e^2 (\theta_0 + \theta_1 \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_q) \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_{p-1} - \sigma_e^2 (\theta_1 + \theta_2 \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_{q-1}) \\ &\quad \vdots \\ \gamma_p &= \phi_1 \gamma_{p-1} + \phi_2 \gamma_{p-2} + \dots + \phi_p \gamma_0 - \sigma_e^2 (\theta_p + \theta_{p+1} \psi_1 + \dots + \theta_q \psi_{q-p}) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde $\theta_j = 0$ si $j > q$.

Para un conjunto dado de valores de parámetros σ_e^2 y θ 's (y por lo tanto ψ 's), podemos resolver las ecuaciones lineales para obtener $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$. Los valores de γ_k para $k > p$ se pueden evaluar a partir de la recursión en las Ecuaciones (2.92). Finalmente, ρ_k se obtiene de

$$\rho_k = \gamma_k / \gamma_0.$$

Anexo C: Código elaborado en GEE para la descarga y preprocesamiento del

NDVI.

	var NORTE: FeatureCollection (1 element)
	type: FeatureCollection
	columns: Object (1 property)
	system:index: String
	features: List (1 element)
	0: Feature 0 (Polygon, 0 properties)
	var PUNTO: Point (-80.66, -5.04)
	type: Point
	Coordinates: [-80.65728914741281, -5.0431411867634],
	0: - 80.65728914741281
	1: -5.0431411867634
1	// Área de estudio
2	//var AOI = ee.FeatureCollection('projects/ee-geomathcenter/assets/COSTANORTE')
3	var AOI = NORTE
4	// Selección de los mejores pixeles
5	function Filtro_De_Pixeles_Optimos(image) {
6	var image_qa = image.select('SummaryQA');
7	var qaBits = (image_qa.eq(0).or(image_qa.eq(1)));
8	return image.updateMask(qaBits).clip(AOI).reproject('EPSG:4326', null, 250).copyProperties(image,['system:time_start','system:time_end']);}
9	// Fecha de Análisis
10	var Inicio = ee.Date('2003-01-01'+T00:00:00');
11	var Fin = ee.Date('2021-12-31'+T00:00:00');
12	// Acceso al catálogo de las imágenes Modis
13	var Modis = ee.ImageCollection('MODIS/061/MOD13Q1').merge(ee.ImageCollection('MODIS/061/MYD13Q1')).filterBounds(AOI).map(Filtro_De_Pixeles_Optimos).filterDate(Inicio,Fin).select('NDVI');
14	// Los meses a crear
15	var fecha_mensual = ee.Number(Fin.difference(Inicio,'month')).round()
16	// Compuesto Mensual a partir del máximo verdor
17	var Modis_Mensual = ee.ImageCollection(ee.List.sequence(0,fecha_mensual).map(function (n) {
18	var ini = Inicio.advance(n,'month');
19	var end = ini.advance(1,'month');
20	return Modis.filterDate(ini,end).qualityMosaic('NDVI').set('system:time_start', ini);});
21	// Visualiza el área de estudio
22	Map.addLayer(AOI.style({color:'black', width:2, fillColor:'00000000'}),{'Costa Norte');
23	// Visualiza la imagen
24	Map.addLayer(Modis_Mensual,{'NDVI');
25	// Serie de Tiempo de un Punto
26	var Serie_Modis_ndvi = ui.Chart.image.series(Modis_Mensual.select('NDVI'), PUNTO,ee.Reducer.mean(),250,'system:time_start').setOptions({title: 'NDVI – MODIS - MENSUAL',hAxis: {'title': 'Tiempo',format: 'MM-yyyy',viewWindow: {min:Inicio.millis().getInfo(), max: Fin.millis().getInfo()}}, vAxis: {'title': 'NDVI',viewWindow: {min: 0, max: 10000}}, colors: ['green'],pointSize: 3,lineWidth: 1});
27	// Imprimir la Gráfica
28	print(Serie_Modis_ndvi)
29	// Apilado de las imágenes

30	var Apilado = function(collection) {
31	var primero = ee.Image(collection.first()).select([]);
32	var bandas = function(image, previo) {
33	return ee.Image(previo).addBands(image)};
34	return ee.Image(collection.iterate(bandas, primero));
35	};
36	var Raster = Apilado(Modis_Mensual);
37	var Modis_Mensual_NDVI =
38	Raster.select(0).rename('1').addBands(Raster.select(1).rename('2')).addBands (Raster.select(2).rename('3')).addBands(Raster.select(3).rename('4')).addBands (Raster.select(4).rename('5')).addBands(Raster.select(5).rename('6')).addBands (Raster.select(6).rename('7')).addBands(Raster.select(7).rename('8')).addBands (Raster.select(8).rename('9')).addBands(Raster.select(9).rename('10')).addBands (Raster.select(10).rename('11')).addBands(Raster.select(11).rename('12'))
39	.addBands(Raster.select(12).rename('13')).addBands(Raster.select(13).rename('14')) .addBands(Raster.select(14).rename('15')).addBands(Raster.select(15).rename('16')) .addBands(Raster.select(16).rename('17')).addBands(Raster.select(17).rename('18')) .addBands(Raster.select(18).rename('19')).addBands(Raster.select(19).rename('20')) .addBands(Raster.select(20).rename('21')).addBands(Raster.select(21).rename('22')) .addBands(Raster.select(22).rename('23')).addBands(Raster.select(23).rename('24'))
40	.addBands(Raster.select(24).rename('25')).addBands(Raster.select(25).rename('26')) .addBands(Raster.select(26).rename('27')).addBands(Raster.select(27).rename('28')) .addBands(Raster.select(28).rename('29')).addBands(Raster.select(29).rename('30')) .addBands(Raster.select(30).rename('31')).addBands(Raster.select(31).rename('32')) .addBands(Raster.select(32).rename('33')).addBands(Raster.select(33).rename('34')) .addBands(Raster.select(34).rename('35')).addBands(Raster.select(35).rename('36'))
41	.addBands(Raster.select(36).rename('37')).addBands(Raster.select(37).rename('38')) .addBands(Raster.select(38).rename('39')).addBands(Raster.select(39).rename('40')) .addBands(Raster.select(40).rename('41')).addBands(Raster.select(41).rename('42')) .addBands(Raster.select(42).rename('43')).addBands(Raster.select(43).rename('44')) .addBands(Raster.select(44).rename('45')).addBands(Raster.select(45).rename('46')) .addBands(Raster.select(46).rename('47')).addBands(Raster.select(47).rename('48'))
42	.addBands(Raster.select(48).rename('49')).addBands(Raster.select(49).rename('50')) .addBands(Raster.select(50).rename('51')).addBands(Raster.select(51).rename('52')) .addBands(Raster.select(52).rename('53')).addBands(Raster.select(53).rename('54')) .addBands(Raster.select(54).rename('55')).addBands(Raster.select(55).rename('56')) .addBands(Raster.select(56).rename('57')).addBands(Raster.select(57).rename('58')) .addBands(Raster.select(58).rename('59')).addBands(Raster.select(59).rename('60'))
43	.addBands(Raster.select(60).rename('61')).addBands(Raster.select(61).rename('62')) .addBands(Raster.select(62).rename('63')).addBands(Raster.select(63).rename('64')) .addBands(Raster.select(64).rename('65')).addBands(Raster.select(65).rename('66')) .addBands(Raster.select(66).rename('67')).addBands(Raster.select(67).rename('68')) .addBands(Raster.select(68).rename('69')).addBands(Raster.select(69).rename('70')) .addBands(Raster.select(70).rename('71')).addBands(Raster.select(71).rename('72'))
44	.addBands(Raster.select(72).rename('73')).addBands(Raster.select(73).rename('74')) .addBands(Raster.select(74).rename('75')).addBands(Raster.select(75).rename('76')) .addBands(Raster.select(76).rename('77')).addBands(Raster.select(77).rename('78')) .addBands(Raster.select(78).rename('79'))
45	.addBands(Raster.select(79).rename('80')).addBands(Raster.select(80).rename('81')) .addBands(Raster.select(81).rename('82')).addBands(Raster.select(82).rename('83'))
46	.addBands(Raster.select(83).rename('84')).addBands(Raster.select(84).rename('85')) .addBands(Raster.select(85).rename('86')).addBands(Raster.select(86).rename('87'))
47	.addBands(Raster.select(87).rename('88')).addBands(Raster.select(88).rename('89')) .addBands(Raster.select(89).rename('90')).addBands(Raster.select(90).rename('91'))

48	.addBands(Raster.select(91).rename('92')).addBands(Raster.select(92).rename('93')) .addBands(Raster.select(93).rename('94')).addBands(Raster.select(94).rename('95'))
49	.addBands(Raster.select(95).rename('96')).addBands(Raster.select(96).rename('97')) .addBands(Raster.select(97).rename('98')).addBands(Raster.select(98).rename('99'))
50	.addBands(Raster.select(99).rename('100')).addBands(Raster.select(100).rename('101')) .addBands(Raster.select(101).rename('102'))
51	.addBands(Raster.select(102).rename('103')).addBands(Raster.select(103).rename('104')) .addBands(Raster.select(104).rename('105')).addBands(Raster.select(105).rename('106'))
52	.addBands(Raster.select(106).rename('107')).addBands(Raster.select(107).rename('108')) .addBands(Raster.select(108).rename('109')).addBands(Raster.select(109).rename('110'))
53	.addBands(Raster.select(110).rename('111')).addBands(Raster.select(111).rename('112')) .addBands(Raster.select(112).rename('113')).addBands(Raster.select(113).rename('114'))
54	.addBands(Raster.select(114).rename('115')).addBands(Raster.select(115).rename('116')) .addBands(Raster.select(116).rename('117')).addBands(Raster.select(117).rename('118'))
55	.addBands(Raster.select(118).rename('119')).addBands(Raster.select(119).rename('120')) .addBands(Raster.select(120).rename('121')).addBands(Raster.select(121).rename('122'))
56	.addBands(Raster.select(122).rename('123')).addBands(Raster.select(123).rename('124')) .addBands(Raster.select(124).rename('125')).addBands(Raster.select(125).rename('126'))
57	.addBands(Raster.select(126).rename('127')).addBands(Raster.select(127).rename('128')) .addBands(Raster.select(128).rename('129')).addBands(Raster.select(129).rename('130'))
58	.addBands(Raster.select(130).rename('131')).addBands(Raster.select(131).rename('132')) .addBands(Raster.select(132).rename('133')).addBands(Raster.select(133).rename('134'))
59	.addBands(Raster.select(134).rename('135')).addBands(Raster.select(135).rename('136')) .addBands(Raster.select(136).rename('137')).addBands(Raster.select(137).rename('138'))
60	.addBands(Raster.select(138).rename('139')).addBands(Raster.select(139).rename('140')) .addBands(Raster.select(140).rename('141')).addBands(Raster.select(141).rename('142'))
61	.addBands(Raster.select(142).rename('143')).addBands(Raster.select(143).rename('144')) .addBands(Raster.select(144).rename('145')).addBands(Raster.select(145).rename('146'))
62	.addBands(Raster.select(146).rename('147')).addBands(Raster.select(147).rename('148')) .addBands(Raster.select(148).rename('149')).addBands(Raster.select(149).rename('150'))
63	.addBands(Raster.select(150).rename('151')).addBands(Raster.select(151).rename('152')) .addBands(Raster.select(152).rename('153')).addBands(Raster.select(153).rename('154'))
64	.addBands(Raster.select(154).rename('155')).addBands(Raster.select(155).rename('156')) .addBands(Raster.select(156).rename('157')).addBands(Raster.select(157).rename('158'))
65	.addBands(Raster.select(158).rename('159')).addBands(Raster.select(159).rename('160')) .addBands(Raster.select(160).rename('161')).addBands(Raster.select(161).rename('162'))
66	.addBands(Raster.select(162).rename('163')).addBands(Raster.select(163).rename('164')) .addBands(Raster.select(164).rename('165')).addBands(Raster.select(165).rename('166'))
67	.addBands(Raster.select(166).rename('167')).addBands(Raster.select(167).rename('168')) .addBands(Raster.select(168).rename('169')).addBands(Raster.select(169).rename('170')) .addBands(Raster.select(170).rename('171')).addBands(Raster.select(171).rename('172')) .addBands(Raster.select(172).rename('173')).addBands(Raster.select(173).rename('174')) .addBands(Raster.select(174).rename('175')).addBands(Raster.select(175).rename('176')) .addBands(Raster.select(176).rename('177')).addBands(Raster.select(177).rename('178')) .addBands(Raster.select(178).rename('179')).addBands(Raster.select(179).rename('180')) .addBands(Raster.select(180).rename('181'))
68	.addBands(Raster.select(181).rename('182')).addBands(Raster.select(182).rename('183')) .addBands(Raster.select(183).rename('184')).addBands(Raster.select(184).rename('185')) .addBands(Raster.select(185).rename('186')).addBands(Raster.select(186).rename('187')) .addBands(Raster.select(187).rename('188')).addBands(Raster.select(188).rename('189')) .addBands(Raster.select(189).rename('190')).addBands(Raster.select(190).rename('191')) .addBands(Raster.select(191).rename('192')).addBands(Raster.select(192).rename('193')) .addBands(Raster.select(193).rename('194')).addBands(Raster.select(194).rename('195')) .addBands(Raster.select(195).rename('196')).addBands(Raster.select(196).rename('197'))

	<pre>.addBands(Raster.select(197).rename('198')).addBands(Raster.select(198).rename('199')) .addBands(Raster.select(199).rename('200')).addBands(Raster.select(200).rename('201')) .addBands(Raster.select(201).rename('202')).addBands(Raster.select(202).rename('203')) .addBands(Raster.select(203).rename('204')).addBands(Raster.select(204).rename('205')) .addBands(Raster.select(205).rename('206')).addBands(Raster.select(206).rename('207')) .addBands(Raster.select(207).rename('208')).addBands(Raster.select(208).rename('209')) .addBands(Raster.select(209).rename('210')).addBands(Raster.select(210).rename('211')) .addBands(Raster.select(211).rename('212')).addBands(Raster.select(212).rename('213')) .addBands(Raster.select(213).rename('214')).addBands(Raster.select(214).rename('215')) .addBands(Raster.select(215).rename('216')).addBands(Raster.select(216).rename('217')) .addBands(Raster.select(217).rename('218')).addBands(Raster.select(218).rename('219')) .addBands(Raster.select(219).rename('220')).addBands(Raster.select(220).rename('221')) .addBands(Raster.select(221).rename('222')).addBands(Raster.select(222).rename('223')) .addBands(Raster.select(223).rename('224')).addBands(Raster.select(224).rename('225')) .addBands(Raster.select(225).rename('226')).addBands(Raster.select(226).rename('227')) .addBands(Raster.select(227).rename('228'))</pre>
69	// Descargar las imágenes Apiladas del NDVI Mensual
70	<pre>Export.image.toDrive({image:Modis_Mensual_NDVI,folder: 'PRODUCTO NDVI MODIS',description: 'NDVI_2003_2021',scale: 250,region: AOI, fileFormat: 'GeoTIFF',maxPixels:1e13});</pre>

Anexo D: Código elaborado en GEE para la descarga y preprocesamiento de precipitación CHIRPS.

	Imports (2 entries)
	var NORTE: FeatureCollection (1 element)
	type: FeatureCollection
	columns: Object (1 property)
	system:index: String
	features: List (1 element)
	0: Feature 0 (Polygon, 0 properties)
	type: Feature
	id: 0
	geometry: Polygon, 5 vertices
	type: Polygon
	coordinates: List (1 element)
	0: List (5 elements)
	0: [-81.62953393777289,-7.285482980021785]
	1: [-78.61928003152289,-7.285482980021785]
	2: [-78.61928003152289,-3.2165903229990738]
	3: [-81.62953393777289,-3.2165903229990738]
	4: [-81.62953393777289,-7.285482980021785]
	geodesic: false
	properties: Object (0 properties)
	var PUNTO: Point (-79.39, -5.88)
	type: Point
	Coordinates: [-79.39386141303781,-5.879772435480712],
	0: -79.39386141303781
	1: -5.879772435480712
1	var AOI = NORTE
2	// Fecha de Análisis
3	var Inicio = ee.Date('1981-01-01'+T00:00:00');
4	var Fin = ee.Date('2022-12-31'+T00:00:00');
5	// Acceso al catálogo de las imágenes MODIS
6	var CHIRPS = ee.ImageCollection('UCSB-CHG/CHIRPS/DAILY').filterBounds(AOI).filterDate(Inicio,Fin).select('precipitation');
7	// Los meses a generar
8	var fecha_mensual = ee.Number(Fin.difference(Inicio,'month')).round()
9	var CHIRPS_Mensual = ee.ImageCollection(ee.List.sequence(0,fecha_mensual).map(function (n) {
10	var ini = Inicio.advance(n,'month');
11	var end = ini.advance(1,'month');
12	return CHIRPS.filterDate(ini,end).sum().set('system:time_start', ini).clip(AOI);}));
13	// Visualiza el área de estudio
14	Map.addLayer(AOI.style({color:'black', width:2, fillColor:'00000000'}),{},'Costa Norte');
15	// Visualiza la imagen
16	Map.addLayer(CHIRPS_Mensual,{min: 0.1,max: 1.2, palette: ['blue', 'purple', 'cyan', 'green', 'yellow', 'red']},'NDVI');
17	// Serie de Tiempo de un Punto
18	var Serie_CHIRPS = ui.Chart.image.series(CHIRPS_Mensual.select('precipitation'),PUNTO,ee.Reducer.mean(),250,'system:time_start').setOptions({title: 'CHIRPS - MENSUAL',hAxis: {'title': 'Tiempo',format: 'MM-yyyy',viewWindow: {min:Inicio.millis().getInfo(), max: Fin.millis().getInfo()}}, vAxis: {'title': 'CHIRPS', viewWindow: {min: 0, max: 100}}, colors: ['green'],pointSize: 3,lineWidth: 1});
19	// Imprimir la Gráfica
20	print(Serie_CHIRPS)

21	// Apilado de las imagenes
22	var Apilado = function(collection) {
23	var primero = ee.Image(collection.first()).select([]);
24	var bandas = function(image, previo) {
25	return ee.Image(previo).addBands(image);
26	return ee.Image(collection.iterate(bandas, primero));
27	};
28	var Raster = Apilado(CHIRPS_Mensual);
29	var CHIRPS_Mensual_3B43 =
30	Raster.select(0).rename('1').addBands(Raster.select(1).rename('2')).addBands(Raster.select(2).rename('3')).addBands(Raster.select(3).rename('4')).addBands(Raster.select(4).rename('5')).addBands(Raster.select(5).rename('6')).addBands(Raster.select(6).rename('7')).addBands(Raster.select(7).rename('8')).addBands(Raster.select(8).rename('9')).addBands(Raster.select(9).rename('10')).addBands(Raster.select(10).rename('11')).addBands(Raster.select(11).rename('12'))
31	.addBands(Raster.select(12).rename('13')).addBands(Raster.select(13).rename('14')).addBands(Raster.select(14).rename('15')).addBands(Raster.select(15).rename('16')).addBands(Raster.select(16).rename('17')).addBands(Raster.select(17).rename('18')).addBands(Raster.select(18).rename('19')).addBands(Raster.select(19).rename('20')).addBands(Raster.select(20).rename('21')).addBands(Raster.select(21).rename('22')).addBands(Raster.select(22).rename('23')).addBands(Raster.select(23).rename('24'))
32	.addBands(Raster.select(24).rename('25')).addBands(Raster.select(25).rename('26')).addBands(Raster.select(26).rename('27')).addBands(Raster.select(27).rename('28')).addBands(Raster.select(28).rename('29')).addBands(Raster.select(29).rename('30')).addBands(Raster.select(30).rename('31')).addBands(Raster.select(31).rename('32')).addBands(Raster.select(32).rename('33')).addBands(Raster.select(33).rename('34')).addBands(Raster.select(34).rename('35')).addBands(Raster.select(35).rename('36'))
33	.addBands(Raster.select(36).rename('37')).addBands(Raster.select(37).rename('38')).addBands(Raster.select(38).rename('39')).addBands(Raster.select(39).rename('40')).addBands(Raster.select(40).rename('41')).addBands(Raster.select(41).rename('42')).addBands(Raster.select(42).rename('43')).addBands(Raster.select(43).rename('44')).addBands(Raster.select(44).rename('45')).addBands(Raster.select(45).rename('46')).addBands(Raster.select(46).rename('47')).addBands(Raster.select(47).rename('48'))
34	.addBands(Raster.select(48).rename('49')).addBands(Raster.select(49).rename('50')).addBands(Raster.select(50).rename('51')).addBands(Raster.select(51).rename('52')).addBands(Raster.select(52).rename('53')).addBands(Raster.select(53).rename('54')).addBands(Raster.select(54).rename('55')).addBands(Raster.select(55).rename('56')).addBands(Raster.select(56).rename('57')).addBands(Raster.select(57).rename('58')).addBands(Raster.select(58).rename('59')).addBands(Raster.select(59).rename('60'))
35	.addBands(Raster.select(60).rename('61')).addBands(Raster.select(61).rename('62')).addBands(Raster.select(62).rename('63')).addBands(Raster.select(63).rename('64')).addBands(Raster.select(64).rename('65')).addBands(Raster.select(65).rename('66')).addBands(Raster.select(66).rename('67')).addBands(Raster.select(67).rename('68')).addBands(Raster.select(68).rename('69')).addBands(Raster.select(69).rename('70')).addBands(Raster.select(70).rename('71')).addBands(Raster.select(71).rename('72'))
36	.addBands(Raster.select(72).rename('73')).addBands(Raster.select(73).rename('74')).addBands(Raster.select(74).rename('75')).addBands(Raster.select(75).rename('76')).addBands(Raster.select(76).rename('77')).addBands(Raster.select(77).rename('78')).addBands(Raster.select(78).rename('79'))
37	.addBands(Raster.select(79).rename('80')).addBands(Raster.select(80).rename('81')).addBands(Raster.select(81).rename('82')).addBands(Raster.select(82).rename('83'))
38	.addBands(Raster.select(83).rename('84')).addBands(Raster.select(84).rename('85')).addBands(Raster.select(85).rename('86')).addBands(Raster.select(86).rename('87'))
39	.addBands(Raster.select(87).rename('88')).addBands(Raster.select(88).rename('89')).addBands(Raster.select(89).rename('90')).addBands(Raster.select(90).rename('91'))
40	.addBands(Raster.select(91).rename('92')).addBands(Raster.select(92).rename('93')).addBands(Raster.select(93).rename('94')).addBands(Raster.select(94).rename('95'))
41	.addBands(Raster.select(95).rename('96')).addBands(Raster.select(96).rename('97')).addBands(Raster.select(97).rename('98')).addBands(Raster.select(98).rename('99'))
42	.addBands(Raster.select(99).rename('100')).addBands(Raster.select(100).rename('101')).addBands(Raster.select(101).rename('102'))
43	.addBands(Raster.select(102).rename('103')).addBands(Raster.select(103).rename('104')).addBands(Raster.select(104).rename('105')).addBands(Raster.select(105).rename('106'))

72	.addBands(Raster.select(218).rename('219')).addBands(Raster.select(219).rename('220')).addBands(Raster.select(220).rename('221')).addBands(Raster.select(221).rename('222'))
73	.addBands(Raster.select(222).rename('223')).addBands(Raster.select(223).rename('224')).addBands(Raster.select(224).rename('225')).addBands(Raster.select(225).rename('226'))
74	.addBands(Raster.select(226).rename('227')).addBands(Raster.select(227).rename('228')).addBands(Raster.select(228).rename('229')).addBands(Raster.select(229).rename('230'))
75	.addBands(Raster.select(230).rename('231')).addBands(Raster.select(231).rename('232')).addBands(Raster.select(232).rename('233')).addBands(Raster.select(233).rename('234'))
76	.addBands(Raster.select(234).rename('235')).addBands(Raster.select(235).rename('236')).addBands(Raster.select(236).rename('237')).addBands(Raster.select(237).rename('238'))
77	.addBands(Raster.select(238).rename('239')).addBands(Raster.select(239).rename('240')).addBands(Raster.select(240).rename('241')).addBands(Raster.select(241).rename('242'))
78	.addBands(Raster.select(242).rename('243')).addBands(Raster.select(243).rename('244')).addBands(Raster.select(244).rename('245')).addBands(Raster.select(245).rename('246'))
79	.addBands(Raster.select(246).rename('247')).addBands(Raster.select(247).rename('248')).addBands(Raster.select(248).rename('249')).addBands(Raster.select(249).rename('250'))
80	.addBands(Raster.select(250).rename('251')).addBands(Raster.select(251).rename('252')).addBands(Raster.select(252).rename('253')).addBands(Raster.select(253).rename('254'))
81	.addBands(Raster.select(254).rename('255')).addBands(Raster.select(255).rename('256')).addBands(Raster.select(256).rename('257')).addBands(Raster.select(257).rename('258'))
82	.addBands(Raster.select(258).rename('259')).addBands(Raster.select(259).rename('260')).addBands(Raster.select(260).rename('261')).addBands(Raster.select(261).rename('262'))
83	.addBands(Raster.select(262).rename('263')).addBands(Raster.select(263).rename('264')).addBands(Raster.select(264).rename('265')).addBands(Raster.select(265).rename('266'))
84	.addBands(Raster.select(266).rename('267')).addBands(Raster.select(267).rename('268')).addBands(Raster.select(268).rename('269')).addBands(Raster.select(269).rename('270'))
85	.addBands(Raster.select(270).rename('271')).addBands(Raster.select(271).rename('272')).addBands(Raster.select(272).rename('273')).addBands(Raster.select(273).rename('274'))
86	.addBands(Raster.select(274).rename('275')).addBands(Raster.select(275).rename('276')).addBands(Raster.select(276).rename('277')).addBands(Raster.select(277).rename('278'))
87	.addBands(Raster.select(278).rename('279')).addBands(Raster.select(279).rename('280')).addBands(Raster.select(280).rename('281')).addBands(Raster.select(281).rename('282'))
88	.addBands(Raster.select(282).rename('283')).addBands(Raster.select(283).rename('284')).addBands(Raster.select(284).rename('285')).addBands(Raster.select(285).rename('286'))
89	.addBands(Raster.select(286).rename('287')).addBands(Raster.select(287).rename('288')).addBands(Raster.select(288).rename('289')).addBands(Raster.select(289).rename('290'))
90	.addBands(Raster.select(290).rename('291')).addBands(Raster.select(291).rename('292')).addBands(Raster.select(292).rename('293')).addBands(Raster.select(293).rename('294'))
91	.addBands(Raster.select(294).rename('295')).addBands(Raster.select(295).rename('296')).addBands(Raster.select(296).rename('297')).addBands(Raster.select(297).rename('298'))
92	.addBands(Raster.select(298).rename('299')).addBands(Raster.select(299).rename('300')).addBands(Raster.select(300).rename('301')).addBands(Raster.select(301).rename('302'))
93	.addBands(Raster.select(302).rename('303')).addBands(Raster.select(303).rename('304')).addBands(Raster.select(304).rename('305')).addBands(Raster.select(305).rename('306'))
94	.addBands(Raster.select(306).rename('307')).addBands(Raster.select(307).rename('308')).addBands(Raster.select(308).rename('309')).addBands(Raster.select(309).rename('310'))
95	.addBands(Raster.select(310).rename('311')).addBands(Raster.select(311).rename('312')).addBands(Raster.select(312).rename('313')).addBands(Raster.select(313).rename('314'))
96	.addBands(Raster.select(314).rename('315')).addBands(Raster.select(315).rename('316')).addBands(Raster.select(316).rename('317')).addBands(Raster.select(317).rename('318'))
97	.addBands(Raster.select(318).rename('319')).addBands(Raster.select(319).rename('320')).addBands(Raster.select(320).rename('321')).addBands(Raster.select(321).rename('322'))
98	.addBands(Raster.select(322).rename('323')).addBands(Raster.select(323).rename('324')).addBands(Raster.select(324).rename('325')).addBands(Raster.select(325).rename('326'))
99	.addBands(Raster.select(326).rename('327')).addBands(Raster.select(327).rename('328')).addBands(Raster.select(328).rename('329')).addBands(Raster.select(329).rename('330'))

128	<code>.addBands(Raster.select(442).rename('443')).addBands(Raster.select(443).rename('444')).addBands(Raster.select(444).rename('445')).addBands(Raster.select(445).rename('446'))</code>
129	<code>.addBands(Raster.select(446).rename('447')).addBands(Raster.select(447).rename('448')).addBands(Raster.select(448).rename('449')).addBands(Raster.select(449).rename('450'))</code>
130	<code>.addBands(Raster.select(450).rename('451')).addBands(Raster.select(451).rename('452')).addBands(Raster.select(452).rename('453')).addBands(Raster.select(453).rename('454'))</code>
131	<code>.addBands(Raster.select(454).rename('455')).addBands(Raster.select(455).rename('456')).addBands(Raster.select(456).rename('457')).addBands(Raster.select(457).rename('458'))</code>
132	<code>.addBands(Raster.select(458).rename('459')).addBands(Raster.select(459).rename('460')).addBands(Raster.select(460).rename('461')).addBands(Raster.select(461).rename('462'))</code>
133	<code>.addBands(Raster.select(462).rename('463')).addBands(Raster.select(463).rename('464')).addBands(Raster.select(464).rename('465')).addBands(Raster.select(465).rename('466'))</code>
134	<code>.addBands(Raster.select(466).rename('467')).addBands(Raster.select(467).rename('468')).addBands(Raster.select(468).rename('469')).addBands(Raster.select(469).rename('470'))</code>
135	<code>.addBands(Raster.select(470).rename('471')).addBands(Raster.select(471).rename('472')).addBands(Raster.select(472).rename('473')).addBands(Raster.select(473).rename('474'))</code>
136	<code>.addBands(Raster.select(474).rename('475')).addBands(Raster.select(475).rename('476')).addBands(Raster.select(476).rename('477')).addBands(Raster.select(477).rename('478'))</code>
137	<code>.addBands(Raster.select(478).rename('479')).addBands(Raster.select(479).rename('480')).addBands(Raster.select(480).rename('481')).addBands(Raster.select(481).rename('482'))</code>
138	<code>.addBands(Raster.select(482).rename('483')).addBands(Raster.select(483).rename('484')).addBands(Raster.select(484).rename('485')).addBands(Raster.select(485).rename('486'))</code>
139	<code>.addBands(Raster.select(486).rename('487')).addBands(Raster.select(487).rename('488')).addBands(Raster.select(488).rename('489')).addBands(Raster.select(489).rename('490'))</code>
140	<code>.addBands(Raster.select(490).rename('491')).addBands(Raster.select(491).rename('492')).addBands(Raster.select(492).rename('493')).addBands(Raster.select(493).rename('494'))</code>
141	<code>.addBands(Raster.select(494).rename('495')).addBands(Raster.select(495).rename('496')).addBands(Raster.select(496).rename('497')).addBands(Raster.select(497).rename('498'))</code>
142	<code>.addBands(Raster.select(498).rename('499')).addBands(Raster.select(499).rename('500')).addBands(Raster.select(500).rename('501')).addBands(Raster.select(501).rename('502'))</code>
143	<code>.addBands(Raster.select(502).rename('503'))</code>
144	<code>.addBands(Raster.select(503).rename('504'))</code>
145	// Descargar las imágenes Apiladas de precipitación Mensual
146	<code>Export.image.toDrive({image:CHIRPS_Mensual_3B43, folder: 'PRODUCTO CHIRPS',description: 'CHIRPS_1981_2022',scale: 5566,region: AOI, fileFormat: 'GeoTIFF',maxPixels:1e13});</code>

**Anexo E: Valores de NDVI, precipitación (PP) y temperatura del área Niño 1+2
(TSM) dentro de los bosques secos de la costa norte en el periodo 2003-2021.**

AÑO	MESES	NDVI_TOTAL	NDVI_LLANURA	NDVI_MONTAÑA
2003	Enero	0.376	0.284	0.426
2003	Febrero	0.523	0.346	0.625
2003	Marzo	0.489	0.299	0.593
2003	Abril	0.437	0.282	0.519
2003	Mayo	0.396	0.269	0.466
2003	Junio	0.357	0.257	0.410
2003	Julio	0.325	0.236	0.374
2003	Agosto	0.291	0.225	0.328
2003	Setiembre	0.276	0.219	0.307
2003	Octubre	0.259	0.203	0.289
2003	Noviembre	0.264	0.208	0.294
2003	Diciembre	0.281	0.219	0.314
2004	Enero	0.350	0.227	0.417
2004	Febrero	0.408	0.227	0.506
2004	Marzo	0.407	0.219	0.509
2004	Abril	0.384	0.221	0.469
2004	Mayo	0.341	0.211	0.409
2004	Junio	0.310	0.202	0.369
2004	Julio	0.280	0.194	0.327
2004	Agosto	0.255	0.186	0.292
2004	Setiembre	0.245	0.188	0.277
2004	Octubre	0.247	0.184	0.281
2004	Noviembre	0.234	0.178	0.264
2004	Diciembre	0.245	0.187	0.277
2005	Enero	0.248	0.185	0.283
2005	Febrero	0.311	0.181	0.379
2005	Marzo	0.504	0.325	0.600
2005	Abril	0.454	0.268	0.551
2005	Mayo	0.380	0.224	0.465
2005	Junio	0.317	0.205	0.378
2005	Julio	0.286	0.194	0.336
2005	Agosto	0.256	0.183	0.295
2005	Setiembre	0.233	0.173	0.265
2005	Octubre	0.231	0.170	0.263
2005	Noviembre	0.232	0.172	0.265
2005	Diciembre	0.233	0.171	0.266
2006	Enero	0.244	0.171	0.283
2006	Febrero	0.555	0.324	0.687
2006	Marzo	0.646	0.443	0.760
2006	Abril	0.545	0.315	0.664
2006	Mayo	0.452	0.247	0.563
2006	Junio	0.400	0.235	0.488
2006	Julio	0.361	0.228	0.432
2006	Agosto	0.323	0.213	0.381
2006	Setiembre	0.291	0.199	0.339
2006	Octubre	0.266	0.188	0.307
2006	Noviembre	0.280	0.193	0.325
2006	Diciembre	0.285	0.191	0.334
2007	Enero	0.336	0.193	0.412

AÑO	MESES	NDVI_TOTAL	NDVI_LLANURA	NDVI_MONTAÑA
2007	Febrero	0.388	0.192	0.492
2007	Marzo	0.454	0.211	0.584
2007	Abril	0.438	0.204	0.553
2007	Mayo	0.370	0.188	0.461
2007	Junio	0.316	0.178	0.391
2007	Julio	0.284	0.172	0.345
2007	Agosto	0.263	0.168	0.314
2007	Setiembre	0.243	0.164	0.285
2007	Octubre	0.236	0.160	0.276
2007	Noviembre	0.236	0.156	0.279
2007	Diciembre	0.239	0.155	0.283
2008	Enero	0.272	0.158	0.336
2008	Febrero	0.581	0.366	0.700
2008	Marzo	0.719	0.570	0.808
2008	Abril	0.687	0.541	0.770
2008	Mayo	0.585	0.429	0.669
2008	Junio	0.529	0.387	0.607
2008	Julio	0.482	0.362	0.548
2008	Agosto	0.433	0.332	0.489
2008	Setiembre	0.380	0.293	0.428
2008	Octubre	0.353	0.273	0.397
2008	Noviembre	0.335	0.258	0.376
2008	Diciembre	0.325	0.250	0.366
2009	Enero	0.365	0.264	0.425
2009	Febrero	0.617	0.418	0.728
2009	Marzo	0.647	0.457	0.753
2009	Abril	0.571	0.379	0.676
2009	Mayo	0.507	0.309	0.613
2009	Junio	0.432	0.268	0.523
2009	Julio	0.390	0.257	0.463
2009	Agosto	0.347	0.235	0.406
2009	Setiembre	0.319	0.223	0.369
2009	Octubre	0.295	0.210	0.341
2009	Noviembre	0.304	0.215	0.351
2009	Diciembre	0.313	0.214	0.365
2010	Enero	0.366	0.228	0.441
2010	Febrero	0.559	0.379	0.673
2010	Marzo	0.600	0.406	0.712
2010	Abril	0.600	0.404	0.706
2010	Mayo	0.508	0.292	0.628
2010	Junio	0.439	0.257	0.538
2010	Julio	0.383	0.231	0.466
2010	Agosto	0.340	0.216	0.408
2010	Setiembre	0.305	0.202	0.361
2010	Octubre	0.294	0.195	0.347
2010	Noviembre	0.289	0.189	0.343
2010	Diciembre	0.281	0.190	0.329
2011	Enero	0.288	0.190	0.340
2011	Febrero	0.435	0.227	0.546
2011	Marzo	0.389	0.198	0.493
2011	Abril	0.467	0.282	0.560
2011	Mayo	0.429	0.237	0.529
2011	Junio	0.374	0.205	0.467

AÑO	MESES	NDVI_TOTAL	NDVI_LLANURA	NDVI_MONTAÑA
2011	Julio	0.324	0.188	0.398
2011	Agosto	0.281	0.176	0.337
2011	Setiembre	0.258	0.170	0.305
2011	Octubre	0.245	0.164	0.288
2011	Noviembre	0.248	0.165	0.293
2011	Diciembre	0.246	0.166	0.287
2012	Enero	0.285	0.167	0.364
2012	Febrero	0.623	0.427	0.736
2012	Marzo	0.680	0.501	0.781
2012	Abril	0.675	0.534	0.754
2012	Mayo	0.579	0.441	0.652
2012	Junio	0.512	0.379	0.582
2012	Julio	0.457	0.339	0.520
2012	Agosto	0.391	0.293	0.445
2012	Setiembre	0.353	0.272	0.396
2012	Octubre	0.337	0.258	0.380
2012	Noviembre	0.318	0.239	0.360
2012	Diciembre	0.320	0.236	0.364
2013	Enero	0.309	0.229	0.352
2013	Febrero	0.402	0.224	0.497
2013	Marzo	0.579	0.361	0.697
2013	Abril	0.528	0.312	0.642
2013	Mayo	0.444	0.257	0.544
2013	Junio	0.389	0.230	0.474
2013	Julio	0.336	0.210	0.405
2013	Agosto	0.295	0.195	0.348
2013	Setiembre	0.271	0.185	0.316
2013	Octubre	0.267	0.182	0.311
2013	Noviembre	0.259	0.175	0.304
2013	Diciembre	0.265	0.179	0.309
2014	Enero	0.295	0.186	0.352
2014	Febrero	0.319	0.178	0.394
2014	Marzo	0.368	0.183	0.463
2014	Abril	0.332	0.178	0.404
2014	Mayo	0.336	0.176	0.415
2014	Junio	0.320	0.174	0.394
2014	Julio	0.278	0.164	0.339
2014	Agosto	0.245	0.158	0.291
2014	Setiembre	0.231	0.154	0.270
2014	Octubre	0.236	0.156	0.277
2014	Noviembre	0.227	0.151	0.266
2014	Diciembre	0.224	0.147	0.264
2015	Enero	0.240	0.147	0.289
2015	Febrero	0.308	0.155	0.383
2015	Marzo	0.548	0.376	0.638
2015	Abril	0.638	0.471	0.732
2015	Mayo	0.557	0.336	0.659
2015	Junio	0.480	0.288	0.580
2015	Julio	0.419	0.255	0.506
2015	Agosto	0.372	0.229	0.447
2015	Setiembre	0.320	0.209	0.377
2015	Octubre	0.295	0.198	0.345
2015	Noviembre	0.303	0.200	0.355

AÑO	MESES	NDVI_TOTAL	NDVI_LLANURA	NDVI_MONTAÑA
2015	Diciembre	0.305	0.187	0.366
2016	Enero	0.320	0.192	0.382
2016	Febrero	0.461	0.276	0.567
2016	Marzo	0.654	0.446	0.768
2016	Abril	0.611	0.344	0.746
2016	Mayo	0.506	0.269	0.621
2016	Junio	0.440	0.245	0.541
2016	Julio	0.386	0.218	0.476
2016	Agosto	0.337	0.201	0.410
2016	Setiembre	0.310	0.193	0.372
2016	Octubre	0.286	0.182	0.342
2016	Noviembre	0.272	0.178	0.323
2016	Diciembre	0.278	0.177	0.331
2017	Enero	0.321	0.199	0.383
2017	Febrero	0.693	0.536	0.781
2017	Marzo	0.755	0.643	0.829
2017	Abril	0.763	0.649	0.834
2017	Mayo	0.721	0.602	0.795
2017	Junio	0.655	0.531	0.725
2017	Julio	0.579	0.474	0.638
2017	Agosto	0.510	0.422	0.561
2017	Setiembre	0.448	0.382	0.486
2017	Octubre	0.414	0.354	0.448
2017	Noviembre	0.395	0.342	0.425
2017	Diciembre	0.395	0.347	0.422
2018	Enero	0.412	0.344	0.449
2018	Febrero	0.425	0.330	0.482
2018	Marzo	0.449	0.331	0.514
2018	Abril	0.446	0.328	0.511
2018	Mayo	0.444	0.333	0.506
2018	Junio	0.400	0.315	0.447
2018	Julio	0.358	0.293	0.394
2018	Agosto	0.328	0.282	0.353
2018	Setiembre	0.307	0.268	0.329
2018	Octubre	0.298	0.264	0.317
2018	Noviembre	0.310	0.273	0.331
2018	Diciembre	0.333	0.272	0.367
2019	Enero	0.376	0.273	0.434
2019	Febrero	0.607	0.420	0.729
2019	Marzo	0.664	0.493	0.766
2019	Abril	0.587	0.404	0.689
2019	Mayo	0.514	0.339	0.611
2019	Junio	0.453	0.313	0.531
2019	Julio	0.402	0.286	0.468
2019	Agosto	0.359	0.266	0.411
2019	Setiembre	0.325	0.249	0.367
2019	Octubre	0.311	0.245	0.348
2019	Noviembre	0.316	0.248	0.354
2019	Diciembre	0.321	0.247	0.362
2020	Enero	0.356	0.248	0.415
2020	Febrero	0.387	0.247	0.465
2020	Marzo	0.445	0.254	0.551
2020	Abril	0.451	0.279	0.542

AÑO	MESES	NDVI_TOTAL	NDVI_LLANURA	NDVI_MONTAÑA
2020	Mayo	0.387	0.243	0.467
2020	Junio	0.348	0.232	0.412
2020	Julio	0.314	0.222	0.365
2020	Agosto	0.282	0.207	0.323
2020	Setiembre	0.264	0.202	0.298
2020	Octubre	0.256	0.197	0.289
2020	Noviembre	0.254	0.198	0.285
2020	Diciembre	0.299	0.209	0.348
2021	Enero	0.339	0.210	0.409
2021	Febrero	0.402	0.225	0.494
2021	Marzo	0.619	0.401	0.736
2021	Abril	0.604	0.381	0.718
2021	Mayo	0.521	0.301	0.633
2021	Junio	0.438	0.254	0.538
2021	Julio	0.384	0.235	0.464
2021	Agosto	0.342	0.218	0.409
2021	Setiembre	0.298	0.200	0.351
2021	Octubre	0.281	0.193	0.328
2021	Noviembre	0.274	0.188	0.321
2021	Diciembre	0.285	0.188	0.337

AÑO	MESES	PP_TOTAL	PP_LLANURA	PP_MONTAÑA	TSM_NIÑO12
2003	Enero	018.854	004.711	026.763	24.470
2003	Febrero	047.427	032.321	055.875	26.140
2003	Marzo	028.704	005.944	041.433	26.660
2003	Abril	008.398	001.416	012.303	24.960
2003	Mayo	001.273	000.171	001.890	22.870
2003	Junio	000.324	000.062	000.471	22.230
2003	Julio	000.158	000.082	000.201	21.390
2003	Agosto	000.197	000.095	000.254	21.040
2003	Setiembre	001.274	000.507	001.703	20.310
2003	Octubre	001.576	000.777	002.023	21.140
2003	Noviembre	001.301	000.618	001.683	22.070
2003	Diciembre	003.707	001.024	005.208	23.310
2004	Enero	012.980	004.049	017.975	24.790
2004	Febrero	030.028	014.075	038.950	26.220
2004	Marzo	026.889	004.104	039.632	25.820
2004	Abril	013.509	002.834	019.479	25.710
2004	Mayo	003.075	000.538	004.494	23.650
2004	Junio	000.163	000.000	000.254	22.240
2004	Julio	000.105	000.071	000.123	21.080
2004	Agosto	000.276	000.170	000.335	20.230
2004	Setiembre	002.744	001.808	003.267	20.250
2004	Octubre	004.299	001.977	005.597	21.210
2004	Noviembre	001.308	000.378	001.828	22.510
2004	Diciembre	004.340	001.080	006.163	22.990
2005	Enero	007.507	001.925	010.628	24.640
2005	Febrero	027.238	020.131	031.213	25.520
2005	Marzo	078.395	021.389	110.276	25.230
2005	Abril	008.864	001.728	012.854	25.120
2005	Mayo	001.936	000.452	002.766	24.580
2005	Junio	000.195	000.020	000.293	22.510
2005	Julio	000.071	000.000	000.111	21.430

AÑO	MESES	PP_TOTAL	PP_LLANURA	PP_MONTAÑA	TSM NIÑO12
2005	Agosto	000.215	000.149	000.253	20.290
2005	Setiembre	002.412	002.150	002.559	19.900
2005	Octubre	002.764	001.231	003.621	19.760
2005	Noviembre	001.692	001.286	001.919	20.360
2005	Diciembre	003.836	000.918	005.467	22.120
2006	Enero	015.856	003.434	022.803	24.410
2006	Febrero	121.209	083.428	142.337	26.680
2006	Marzo	083.549	020.819	118.631	26.320
2006	Abril	015.950	003.329	023.008	24.520
2006	Mayo	001.211	000.145	001.807	24.170
2006	Junio	000.753	000.201	001.061	22.900
2006	Julio	000.184	000.157	000.199	22.000
2006	Agosto	000.185	000.078	000.246	21.610
2006	Setiembre	001.124	000.337	001.564	21.730
2006	Octubre	001.729	000.621	002.349	22.480
2006	Noviembre	002.228	001.073	002.874	22.820
2006	Diciembre	003.771	000.632	005.527	23.950
2007	Enero	017.718	003.917	025.436	25.130
2007	Febrero	020.547	013.584	024.442	26.260
2007	Marzo	067.807	012.744	098.601	26.280
2007	Abril	018.962	003.350	027.693	25.190
2007	Mayo	002.914	000.529	004.248	23.490
2007	Junio	000.164	000.000	000.256	22.340
2007	Julio	000.083	000.044	000.104	21.180
2007	Agosto	000.748	000.533	000.869	19.890
2007	Setiembre	001.358	000.793	001.673	19.510
2007	Octubre	004.574	002.113	005.951	19.280
2007	Noviembre	002.463	001.631	002.927	19.720
2007	Diciembre	002.513	000.621	003.571	21.120
2008	Enero	019.065	004.724	027.085	24.260
2008	Febrero	113.837	072.091	137.184	26.360
2008	Marzo	107.525	029.473	151.175	27.120
2008	Abril	025.991	005.812	037.277	26.050
2008	Mayo	004.379	000.780	006.392	24.690
2008	Junio	001.019	000.242	001.454	23.620
2008	Julio	000.053	000.042	000.059	22.740
2008	Agosto	002.921	002.871	002.949	22.040
2008	Setiembre	002.363	002.003	002.565	21.700
2008	Octubre	004.987	002.387	006.441	21.320
2008	Noviembre	003.064	002.078	003.616	21.630
2008	Diciembre	001.959	000.377	002.843	22.580
2009	Enero	045.018	008.413	065.490	24.360
2009	Febrero	096.475	054.603	119.892	25.860
2009	Marzo	052.152	011.422	074.930	26.110
2009	Abril	013.610	002.460	019.845	26.070
2009	Mayo	005.633	001.541	007.922	25.110
2009	Junio	000.383	000.081	000.551	23.900
2009	Julio	000.042	000.021	000.054	22.820
2009	Agosto	000.890	000.222	001.263	21.660
2009	Setiembre	002.125	001.149	002.670	21.210
2009	Octubre	001.852	000.951	002.355	21.120
2009	Noviembre	002.250	001.269	002.798	21.870
2009	Diciembre	003.517	000.656	005.117	23.460

AÑO	MESES	PP_TOTAL	PP_LLANURA	PP_MONTAÑA	TSM NIÑO12
2010	Enero	016.768	004.705	023.514	24.520
2010	Febrero	070.488	040.937	087.015	25.790
2010	Marzo	057.901	013.412	082.781	26.500
2010	Abril	018.137	003.956	026.068	26.350
2010	Mayo	005.662	001.152	008.184	24.750
2010	Junio	001.291	000.295	001.848	23.360
2010	Julio	000.204	000.100	000.262	20.760
2010	Agosto	000.466	000.389	000.510	19.930
2010	Setiembre	004.931	004.744	005.035	19.230
2010	Octubre	003.629	001.800	004.652	19.460
2010	Noviembre	002.490	001.660	002.954	20.300
2010	Diciembre	004.094	001.192	005.717	21.640
2011	Enero	018.327	004.915	025.828	23.890
2011	Febrero	057.044	038.930	067.174	26.110
2011	Marzo	031.620	007.352	045.193	26.100
2011	Abril	032.151	004.680	047.514	25.610
2011	Mayo	001.748	000.392	002.507	24.780
2011	Junio	000.201	000.022	000.300	23.420
2011	Julio	000.051	000.021	000.068	22.120
2011	Agosto	000.359	000.106	000.501	20.800
2011	Setiembre	004.380	004.393	004.372	19.880
2011	Octubre	002.547	001.311	003.238	19.950
2011	Noviembre	002.797	001.956	003.266	20.960
2011	Diciembre	002.190	000.445	003.166	22.180
2012	Enero	015.968	003.509	022.935	23.910
2012	Febrero	113.214	064.708	140.341	25.950
2012	Marzo	073.777	013.137	107.690	26.520
2012	Abril	025.094	004.616	036.546	26.550
2012	Mayo	002.389	000.413	003.495	25.420
2012	Junio	000.385	000.030	000.583	24.490
2012	Julio	000.032	000.020	000.039	22.130
2012	Agosto	000.576	000.261	000.752	20.950
2012	Setiembre	002.038	001.682	002.237	21.130
2012	Octubre	004.018	001.680	005.325	20.420
2012	Noviembre	001.762	000.576	002.426	21.520
2012	Diciembre	002.913	000.637	004.185	22.390
2013	Enero	014.364	004.305	019.990	24.370
2013	Febrero	041.021	027.789	048.421	25.980
2013	Marzo	069.547	017.160	098.845	26.110
2013	Abril	012.021	002.235	017.494	24.650
2013	Mayo	009.508	003.495	012.870	23.240
2013	Junio	000.419	000.093	000.601	21.270
2013	Julio	000.210	000.102	000.271	20.020
2013	Agosto	001.893	001.190	002.287	19.830
2013	Setiembre	004.232	004.470	004.099	19.810
2013	Octubre	005.515	002.450	007.230	20.200
2013	Noviembre	001.794	001.157	002.151	20.980
2013	Diciembre	002.576	000.454	003.763	22.830
2014	Enero	018.444	004.455	026.267	24.710
2014	Febrero	032.861	024.705	037.423	25.180
2014	Marzo	107.759	024.614	154.258	25.810
2014	Abril	013.768	002.644	019.988	25.380
2014	Mayo	015.765	002.717	023.062	25.180

AÑO	MESES	PP TOTAL	PP LLANURA	PP MONTAÑA	TSM NIÑO12
2014	Junio	000.595	000.120	000.860	24.390
2014	Julio	000.104	000.044	000.137	23.190
2014	Agosto	001.044	000.594	001.295	21.880
2014	Setiembre	002.517	001.991	002.812	21.320
2014	Octubre	001.945	000.685	002.649	21.260
2014	Noviembre	002.189	001.789	002.413	22.360
2014	Diciembre	004.065	000.724	005.933	22.730
2015	Enero	016.058	004.464	022.542	24.580
2015	Febrero	036.783	024.886	043.436	25.530
2015	Marzo	131.919	023.410	192.602	26.730
2015	Abril	026.653	004.218	039.199	26.690
2015	Mayo	010.029	002.451	014.267	25.950
2015	Junio	000.375	000.076	000.543	25.090
2015	Julio	000.091	000.037	000.121	24.310
2015	Agosto	001.019	000.593	001.257	22.660
2015	Setiembre	002.498	001.969	002.794	22.840
2015	Octubre	001.442	000.306	002.077	23.070
2015	Noviembre	001.282	000.540	001.697	23.670
2015	Diciembre	002.869	000.424	004.236	24.940
2016	Enero	015.742	004.283	022.151	25.720
2016	Febrero	054.384	036.918	064.152	27.100
2016	Marzo	225.890	055.093	321.409	27.720
2016	Abril	023.455	004.741	033.921	26.180
2016	Mayo	003.182	000.742	004.546	25.060
2016	Junio	000.414	000.065	000.610	23.540
2016	Julio	000.078	000.025	000.107	22.220
2016	Agosto	001.427	000.765	001.797	21.260
2016	Setiembre	004.384	004.563	004.284	21.170
2016	Octubre	001.747	000.514	002.437	21.350
2016	Noviembre	001.089	000.411	001.469	21.880
2016	Diciembre	003.287	000.734	004.714	23.260
2017	Enero	044.966	013.803	062.394	25.580
2017	Febrero	113.031	073.823	134.958	27.240
2017	Marzo	458.959	096.261	661.799	28.430
2017	Abril	055.053	009.109	080.748	26.500
2017	Mayo	014.314	004.048	020.055	24.960
2017	Junio	000.870	000.355	001.157	23.150
2017	Julio	000.125	000.085	000.148	21.520
2017	Agosto	002.506	001.492	003.072	20.580
2017	Setiembre	002.838	002.328	003.123	19.870
2017	Octubre	002.769	001.233	003.629	19.800
2017	Noviembre	001.939	001.547	002.159	20.500
2017	Diciembre	003.832	001.048	005.389	21.620
2018	Enero	025.374	006.046	036.183	23.780
2018	Febrero	045.601	034.538	051.788	25.610
2018	Marzo	028.966	007.015	041.243	25.850
2018	Abril	023.515	005.717	033.469	24.890
2018	Mayo	007.659	001.666	011.010	24.070
2018	Junio	000.311	000.058	000.453	22.480
2018	Julio	000.073	000.025	000.100	21.540
2018	Agosto	002.076	001.949	002.147	20.670
2018	Setiembre	002.480	001.931	002.787	20.600
2018	Octubre	002.616	001.199	003.408	21.150

AÑO	MESES	PP_TOTAL	PP_LLANURA	PP_MONTAÑA	TSM_NIÑO12
2018	Noviembre	002.681	001.959	003.086	22.400
2018	Diciembre	007.319	002.098	010.240	23.670
2019	Enero	034.521	006.290	050.310	25.320
2019	Febrero	089.440	054.756	108.838	26.770
2019	Marzo	156.171	039.280	221.542	27.110
2019	Abril	020.831	004.086	030.195	26.200
2019	Mayo	003.887	001.076	005.460	24.760
2019	Junio	000.692	000.178	000.979	23.150
2019	Julio	000.161	000.099	000.195	21.240
2019	Agosto	001.229	000.740	001.503	20.390
2019	Setiembre	004.963	005.298	004.776	19.860
2019	Octubre	003.226	001.370	004.264	19.940
2019	Noviembre	001.766	001.493	001.919	21.490
2019	Diciembre	006.257	001.073	009.156	23.110
2020	Enero	020.428	005.326	028.875	24.490
2020	Febrero	051.603	029.701	063.851	26.240
2020	Marzo	041.943	007.812	061.032	27.040
2020	Abril	021.497	004.974	030.737	26.010
2020	Mayo	005.741	001.843	007.921	24.330
2020	Junio	001.061	000.345	001.461	22.310
2020	Julio	000.385	000.225	000.474	20.830
2020	Agosto	002.923	002.716	003.038	20.170
2020	Setiembre	003.376	003.206	003.471	19.820
2020	Octubre	002.348	001.101	003.046	20.120
2020	Noviembre	002.808	002.327	003.077	20.950
2020	Diciembre	005.646	001.773	007.811	21.980
2021	Enero	013.035	004.131	018.015	23.780
2021	Febrero	029.863	020.905	034.873	25.510
2021	Marzo	165.926	038.771	237.037	26.180
2021	Abril	016.538	003.148	024.027	24.600
2021	Mayo	005.089	001.489	007.102	23.780
2021	Junio	000.328	000.053	000.481	23.120
2021	Julio	000.161	000.090	000.201	22.080
2021	Agosto	002.482	001.880	002.819	20.840
2021	Setiembre	002.972	002.586	003.188	20.760
2021	Octubre	003.982	001.803	005.201	20.580
2021	Noviembre	002.161	001.451	002.558	20.810
2021	Diciembre	003.991	001.126	005.593	21.310