



**FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**

APLICACIONES DE LAS ROTACIONES EN  $\mathbb{R}^3$  Y UNA GENERALIZACIÓN DE LA  
FÓRMULA DE ROTACIÓN DE RODRIGUES

**Línea de investigación:**  
**Matemática pura y aplicada**

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**Autor**

Aguilar Collanqui, Javier Leoncio

**Asesor**

Contreras Tito, Vladimiro

ORCID: 0000-0002-8885-1031

**Jurado**

Quicaño Barrientos, Carlos Gilberto

Velásquez Alarcón, Jorge David

Tamara Albino, Jimmy Rainer

**Lima - Perú**

**2024**

# APLICACIONES DE LAS ROTACIONES EN $R^3$ Y UNA GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE ROTACIÓN DE RODRIGUES

## INFORME DE ORIGINALIDAD

11%

INDICE DE SIMILITUD

9%

FUENTES DE INTERNET

6%

PUBLICACIONES

4%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

## FUENTES PRIMARIAS

**1** Submitted to Universidad Nacional Federico Villarreal 1%  
Trabajo del estudiante

**2** archive.org <1%  
Fuente de Internet

**3** www.fho-emden.de <1%  
Fuente de Internet

**4** zdocs.ro <1%  
Fuente de Internet

**5** Mendieta Daza, Lourdes Alexis. "Aplicando la Ingeniería de Sistemas Basada en Modelos (MBSE) al Diseño de un Modelo de Software para la Actualización de Conjuntos de Elementos de dos Líneas (TLEs) de Pequeños Satélites", Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia), 2024 <1%  
Publicación



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**APLICACIONES DE LAS ROTACIONES EN  $\mathbb{R}^3$  Y UNA GENERALIZACIÓN DE  
LA FÓRMULA DE ROTACIÓN DE RODRIGUES**

Línea de investigación:

Matemática pura y aplicada

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

**Autor:**

Aguilar Collanqui, Javier Leoncio

**Asesor:**

Contreras Tito, Vladimiro

ORCID: 0000-0002-8885-1031

**Jurado:**

Quicaño Barrientos, Carlos Gilberto

Velásquez Alarcón, Jorge David

Tamara Albino, Jimmy Rainer

Lima – Perú

2024

## **Agradecimientos**

*A mis padres por su arduo apoyo todos estos años y a todas las personas que contribuyeron con sus enseñanzas y consejos que fueron una guía para mi formación.*

## ÍNDICE

RESUMEN .....	4
ABSTRACT.....	5
I. INTRODUCCIÓN .....	6
1.1 Descripción y formulación del problema.....	7
1.2 Antecedentes .....	7
1.3 Objetivos.....	8
1.3.1 Objetivo General.....	8
1.3.2 Objetivo Específico.....	8
1.4 Justificación .....	9
1.5 Hipótesis .....	9
1.5.1 Hipótesis General.....	9
1.5.2 Hipótesis Específicas .....	9
II. MARCO TEÓRICO.....	10
2.1 Conceptos básicos.....	10
2.1.1 Normas matriciales, y series de matrices.....	10
2.1.2 Exponencial de una matriz.....	11
2.1.3 Curvas en $\mathbb{R}^3$ , reparametrización, longitud de arco y curvatura .....	12
2.1.4 Orientación de un plano .....	15
2.1.5 Proyección ortogonal y constantes especiales .....	18

2.2	Rotaciones de curvas.....	27
2.2.1	Rotaciones especiales $\mu, \lambda$ .....	27
2.2.2	Rotaciones especiales inversas .....	42
2.3	Rotaciones en $\mathbb{R}^n$ .....	50
2.3.1	Rotaciones en $\mathbb{R}^2$ .....	50
2.3.2	Rotaciones en $\mathbb{R}^3$ .....	51
2.3.3	Los ángulos de Euler.....	53
2.3.4	La fórmula de rotación de Rodrigues.....	53
2.3.5	El vector de Rodrigues-Gibbs y composición finita de rotaciones.....	66
2.3.6	Generalización la fórmula de rotación de Rodrigues en $\mathbb{R}^n$ .....	78
2.4	Aplicaciones.....	91
2.4.1	Las rotaciones especiales como composición de rotaciones.....	91
2.4.2	Las cónicas en $\mathbb{R}^3$ .....	95
2.4.3	Órbitas satelitales .....	116
III.	MÉTODO .....	127
3.1	Tipo de investigación.....	127
3.2	Ámbito temporal y espacial .....	127
3.3	Variables .....	127
3.4	Población y muestra.....	127
3.5	Instrumentos.....	127
3.6	Procedimientos.....	127

3.7	Análisis de datos .....	127
3.8	Consideraciones éticas .....	128
IV.	RESULTADOS.....	129
V.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS .....	132
VI.	CONCLUSIONES .....	133
VII.	RECOMENDACIONES.....	134
VIII.	REFERENCIAS.....	135

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Caso $A < 0$ y $B > 0$ y $\beta$ obtuso.....	16
Figura 2. Caso $A > 0$ y $B < 0$ y $\beta$ agudo.....	16
Figura 3. Caso $A > 0$ y $B > 0$ y $\beta$ obtuso.....	16
Figura 4. Caso $A < 0$ y $B < 0$ y $\beta$ agudo.....	17
Figura 5. Una curva en $R^3$ que será llevada a $R^2$ .....	28
Figura 6. Dirección del producto vectorial o regla de la mano derecha .....	31
Figura 7. Ejemplo de una curva en $\mathbb{R}^3$ .....	33
Figura 8. Curva luego de ser transformada mediante $\lambda$ .....	34
Figura 9. Curva $\Psi(t)$ y preimagen $p$ del eje principal $s$ .....	35
Figura 10. Rotación especial $\mu$ de la curva $\Psi(t)$ .....	36
Figura 11. Rotación de un vector $p$ alrededor de $n$ en sentido antihorario .....	52
Figura 12. Traslación del plano de rotación.....	55
Figura 13. Los dos casos de proyección de $p$ y $q$ .....	58
Figura 14. Composición de dos rotaciones sucesivas en torno a diferentes ejes.....	67
Figura 15. Rotación en $R^4$ .....	89
Figura 16. Primera rotación del plano inclinado.....	91
Figura 17. Segunda rotación alrededor del eje $Z$ .....	93
Figura 18. Ajuste de una parábola de $R^2$ a $R^3$ .....	96
Figura 19. Parábola en $R^3$ .....	99
Figura 20. Ajuste de una elipse de $R^2$ a $R^3$ .....	101
Figura 21. Elipse en $R^3$ .....	107
Figura 22. Hipérbola en $R^2$ y $R^3$ .....	109
Figura 23. Hipérbola en $R^3$ .....	115

Figura 24. Elementos Orbitales.....	118
Figura 25. Parametrización de una elipse de centro $(-c, 0)$ y semiejes $a, b$ .....	119
Figura 26. Ejemplo de un TLE .....	121
Figura 27. Posición y velocidad de un satélite.....	125
Figura 28. Superficie generada por el foco de una elipse .....	130
Figura 29. Elementos orbitales y posición del satélite.....	131

**ÍNDICE DE TABLAS**

Tabla 1. Resultados numéricos del algoritmo en MATLAB .....	124
Tabla 2. Conjunto de dos líneas para el spot-6 .....	125
Tabla 3. Comparación de mi algoritmo con los resultados de otras investigaciones .....	126

## RESUMEN

La presente investigación tuvo como finalidad el estudio de las rotaciones de puntos, vectores o curvas en el espacio para su posterior generalización a dimensiones superiores, así como sus aplicaciones para el caso de dos o tres dimensiones. Para ello se definió primero una rotación más sencilla denominada “rotación especial” entre los espacios  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  lo que permitió demostrar la “fórmula de rotación de Rodrigues” y mediante un método de coeficientes indeterminados se pudo también estudiar las cónicas. Gracias a este desarrollo previo se obtuvo como resultado funciones trigonométricas que describen las órbitas, así como el tipo y característica que tienen las secciones cónicas. Se concluye que se puede describir o aproximar matemáticamente, mediante funciones elementales, las órbitas de los satélites que orbitan la Tierra, el Sol o cualquier cuerpo pesado. Todo esto gracias a un conjunto de seis parámetros denominados elementos keplerianos y en consecuencia la órbita y posición en un satélite son únicas.

*Palabras clave:* órbita, rotación, fórmula de rotación de Rodrigues, elementos keplerianos, sección cónica.

## ABSTRACT

The present investigation was to study the rotations of points, vectors, or curves in space for their subsequent generalization to higher dimensions, as well as their applications in the case of two or three dimensions. To do this, a simpler rotation called “special rotation” was first defined between the spaces  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$ , which made it possible to demonstrate the “Rodrigues’ rotation formula” and by means of a method of indeterminate coefficients it was also possible to study the conics. Thanks to this previous development, trigonometric functions that describe the orbits, as well as the type and characteristics of the conic sections, were obtained. It is concluded that the orbits of satellites that orbit the Earth, the Sun or any heavy body can be described or approximate mathematically, using elementary functions. All this thanks to a set of six parameters called Keplerian elements and consequently the orbit and position in the orbit are unique.

*Keywords:* Orbit, rotation, Rodrigues rotation formula, Keplerian elements, conic section.

## I. INTRODUCCIÓN

La fórmula de rotación de Rodrigues debe su nombre al matemático francés Olinde Rodrigues, se puede entender como una función  $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que dado un vector fijo no nulo  $n \in \mathbb{R}^3$  denominado eje de rotación y un número real positivo  $\theta$ , tal que a cada vector  $v$  le hace corresponder un vector  $R(v)$  que es la rotación  $\theta$  en sentido antihorario en torno a  $n$ . En este trabajo se busca extender esta fórmula para vectores en  $\mathbb{R}^n$  así como en algunas aplicaciones de rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ .

En la primera parte se definen las normas y exponencial de matrices indispensables para la extensión hacia  $\mathbb{R}^n$  así como los conceptos esenciales de curvas en el espacio. A su vez se introducen las constantes especiales delta de Dirac y la constante de Levi-Civita que se usan para expresar término especial con parámetros de orden, se definen también las posiciones relativas y lado principal de un plano. Además, se definen las “rotaciones especiales” que ayudarán a la demostración de la fórmula de rotación de Rodrigues.

En la segunda parte se muestran las rotaciones como transformaciones matriciales en  $\mathbb{R}^2$  y se demuestra la fórmula de Rodrigues dada en  $\mathbb{R}^3$ . Se expone los ángulos de Euler como una manera de descomponer rotaciones en otras tres rotaciones elementales. Cuando se componen dos o más rotaciones se generan una gran cantidad de cálculos matemáticos, por ello se ve que el producto (composición) de rotaciones da como resultado otra rotación y se presenta una forma de reducir estos cálculos usando el llamado “vector de Rodrigues-Gibbs” que facilita mucho estas operaciones. Finalmente se demuestra una extensión de fórmula de rotación de Rodrigues para vectores en  $\mathbb{R}^n$ .

En la tercera parte se muestran algunas aplicaciones, primero se ve que las “rotaciones especiales” no son más que casos particulares de la fórmula de Rodrigues, se estudian también las secciones cónicas usando métodos de coeficientes indeterminados para determinar sus ecuaciones y puntos notables, esenciales en el estudio de órbitas; sin tener en cuenta

perturbaciones externas se estudia las órbitas satelitales haciendo uso de los TLE (Two-line element set) un conjunto de datos que incluyen los elementos keplerianos necesarios para la búsqueda de la posición y velocidad de satélites.

### 1.1 Descripción y formulación del problema

En el espacio  $\mathbb{R}^n$  es posible aplicar rotaciones, conocer la imagen de un punto mediante una rotación es importante por sus aplicaciones sobre todo en los casos  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  que es lo que normalmente se percibe en la naturaleza, la fórmula de rotación de Rodrigues brinda una expresión simple y elegante para tal fin en el caso bidimensional, por ello se empieza estudiando las rotaciones en dichos espacios para después extenderlas al caso n-dimensional ya que permitirá generalizar dicha fórmula. Se propone estudiar las rotaciones y aplicar los resultados a dos casos en concreto, la trayectoria de órbitas satelitales y curvas cónicas.

#### Problema general

¿Es posible extender la fórmula de rotación de Rodrigues en el espacio  $\mathbb{R}^n$ , que permita trabajar con vectores de cualquier dimensión?

#### Problemas específicos

- ¿Cómo definir rotaciones especiales entre  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ ?
- ¿Cómo demostrar la fórmula de rotación de Rodrigues en  $\mathbb{R}^3$ ?

### 1.2 Antecedentes

Hanson (2011) estudió las rotaciones mediante transformaciones lineales. Tuvo como objetivo extender la manera con la que habitualmente se expresaban, descomposición en ángulos de Euler o cuaterniones, mostró como poder aplicar logaritmos a las rotaciones para poder hallar el ángulo de rotación (para n=4 o 5 dimensiones). Más aun tuvo la idea de que la mejor manera de estudiar rotaciones en más dimensiones era trabajar solo con las proyecciones de los vectores sobre el hiperplano de rotación, de esta manera uno puede liberarse de las

ataduras que el producto cruz tiene solo en tres dimensiones. De esta manera la fórmula de Rotación de Rodrigues puede ser extendida, aunque con mucho cuidado al espacio  $n$ -dimensional.

En el trabajo de Goldman (1992) se menciona la importancia del producto cruz usado en  $\mathbb{R}^3$  además del impedimento de poder extenderlo hacia  $\mathbb{R}^4$  ya que, dados dos vectores linealmente independientes  $u, v \in \mathbb{R}^4$  entonces existen una infinidad de vectores en  $\mathbb{R}^4$  que sean perpendiculares al hiperplano generado por  $u$  y  $v$ , digamos  $n_1, n_2$  y que a su vez no sean paralelos. Por esa razón no es conveniente trabajar directamente con el vector normal al hiperplano, sino con el mismo hiperplano generado por  $u$  y  $v$ , de ahí surge una forma de generalizar la fórmula de rotación de Rodrigues. Es por eso por lo que su objetivo fue extender el concepto de producto cruz a más dimensiones con ayuda del llamado producto tensorial, el producto cuña y consideró una norma apropiada para las matrices de orden  $n$ . Los resultados fueron que para el caso de tres dimensiones se tiene un poco de suerte ya que se puede identificar o asociar el producto cuña  $u \wedge v$  con el producto cruz  $u \times v$  pues ambos tendrán tres entradas o componentes distintas, esto es algo que no ocurre, por ejemplo, en 4 dimensiones, ya que  $u \wedge v$  posee seis entradas distintas y no 4 como se puede esperar. En general si  $u, v \in \mathbb{R}^n$  entonces  $u \wedge v$  posee  $\frac{n(n-1)}{2}$  entradas distintas, y no  $n$ .

## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo General

Generalizar de la fórmula de rotación de Rodrigues para vectores en  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.3.2 Objetivo Específico

- Definir rotaciones más sencillas entre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  denominadas rotaciones especiales.
- Demostrar la fórmula de rotación Rodrigues de  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.4 Justificación

El motivo por la cual se investigan las rotaciones de vectores fue por la aplicabilidad de los resultados, primero al estudio de rotación de puntos o curvas en el espacio  $\mathbb{R}^3$ , y que tendrán como implicancia la segunda utilidad, el estudio de las órbitas satelitales, pues se pueden describir órbitas parabólicas, elípticas e hiperbólicas. El obtener una fórmula matemática que generalice la fórmula de rotación de Rodrigues en  $\mathbb{R}^n$  da un mayor control sobre la incertidumbre de no comprender dimensiones espaciales mayores, si bien esto no es aplicable de manera directa, resulta bello e interesante desde el punto de vista matemático.

## 1.5 Hipótesis

### 1.5.1 Hipótesis General

La teoría de matrices permite generalizar la fórmula de rotación de Rodrigues.

### 1.5.2 Hipótesis Específicas

- El cálculo vectorial permite definir rotaciones especiales entre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .
- El cálculo vectorial permite demostrar la fórmula de Rodrigues.

## II. MARCO TEÓRICO

### 2.1 Conceptos básicos

#### 2.1.1 Normas matriciales, y series de matrices

##### Definición 2.1. (Norma Matricial)

Sean  $A, B \in M_{n \times n}$  una matriz de orden  $n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Una función  $N_{\square} : M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes condiciones

- i)  $N_{\square}(A) \geq 0, N_{\square}(A) = 0$  si, y solo si  $A = 0$
- ii)  $N_{\square}(A + B) \leq N_{\square}(A) + N_{\square}(B)$
- iii)  $N_{\square}(\alpha A) = |\alpha| N_{\square}(A)$

es denominada norma matricial. (Golub y Van Loan, 1996).

Se usará la notación  $\|\cdot\|$  en lugar de  $N_{\square}$  para indicar norma matricial

i) Norma de Frobenius  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$

ii) p-norma  $\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

iii)  $\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

iv)  $\|A\| = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

son algunas normas. (Golub y Van Loan, 1996).

En lo que sigue, se considerará siempre la norma dada por (iv).

##### Proposición 2.2. (Propiedad submultiplicativa para la norma de Frobenius)

La norma de Frobenius es verifica la desigualdad

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F \quad (2.1.1)$$

para todo para de matrices  $A, B \in M_{n \times n}$ . (Coutiño y Maximenko, s. f.).

Es particular si  $A = B$  en (2.1.1) se tendrá que  $\|A^2\| \leq \|A\|^2$  y mediante inducción también

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.1.2)$$

### Definición 2.3.

Si  $\{C^k\} \subset M_{n \times n}$  es una sucesión de matrices, y  $C_{ij}^k$  es la componente de la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna, diremos que la sucesión de matrices converge si, y solo si cada componente converge, es decir si  $\{C_{ij}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge para cada  $ij$ .

### Teorema 2.4. (Criterio de convergencia en serie de matrices)

Si  $\{C_k\} \subset M_{n \times n}$  es una sucesión de matrices tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$  converge, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$

también converge. (Apostol, 2002).

#### 2.1.2 Exponencial de una matriz

La función real  $f(x) = e^x$  puede expresarse en serie de Taylor por  $e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  y

converge para cualquier valor de  $x$ . Si en lugar de considerar el conjunto  $\mathbb{R}$  como el dominio

de la función y se considera el conjunto de matrices cuadradas  $M_{n \times n}$  entonces se puede definir

la exponencial de una matriz como sigue:

### Definición 2.5.

Sea  $A \in M_{n \times n}$  con elementos reales o complejos, se define la exponencial de la matriz

$A$  como la serie  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ . De esta definición se verifica que  $e^0 = I$ . (Apostol, 2002).

Usando ( 2.1.2) se observa que  $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$  obteniendo  $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ .

Como  $\|A\| \in \mathbb{R}$  y  $e^{\|A\|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$  converge para cualquier matriz  $A \in M_{n \times n}$  se sigue que  $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$

converge y por el **Teorema 2.4**,  $e^A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  converge. La norma dada por  $\|A\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

tomará un papel fundamental en el desarrollo de esta investigación.

### 2.1.3 Curvas en $\mathbb{R}^3$ , reparametrización, longitud de arco y curvatura

En el mundo real las curvas aparecen en muchos lugares, por ejemplo, las órbitas de los satélites o planetas describen curvas conocidas, si arrojamos un objeto en el aire este describirá una parábola, además las curvas aparecen al estudiar el movimiento, posición o velocidad de cuerpos. Teniendo esto en cuenta resulta interesante su estudio, normalmente se suele representar con la letra  $t$  el parámetro de la curva pues representa el tiempo.

#### Definición 2.6. (Camino)

Una aplicación  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua se llamará camino en  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que el punto  $f(a)$  es el punto inicial y  $f(b)$  el punto final. Si  $f(a) = f(b)$  el camino se llamará cerrado y si la función  $f$  es inyectiva se le llamará camino simple. (Pita, 1995)

#### Definición 2.7. (Curva)

Se llamará curva de un camino  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  al conjunto

$$\Gamma = \{f(t) \in \mathbb{R}^n \mid t \in [a, b]\}$$

que es la imagen de  $f$ .

### Diferenciabilidad de caminos

#### Definición 2.8.

Sea  $I \subset [a, b]$  un intervalo abierto y  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino. Si  $t_0 \in I$  se llamará derivada de  $f$  en  $t_0$  a la expresión dada por:

$$f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

siempre que el límite exista. (Pita, 1995)

Un cálculo inmediato muestra que si  $f$  es diferenciable en  $t_0 \in I$  y si  $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$  entonces  $f'(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \dots, f_n'(t_0))$ . Es decir, la diferenciabilidad de  $f$  implica la diferenciabilidad de sus funciones componentes y el recíproco también es cierto.

#### Definición 2.9.

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino de clase  $C^1$ , entonces  $f$  se llamará regular si  $f'(t) \neq 0$  en  $\mathbb{R}^n \quad \forall t \in I$ . (Pita, 1995)

Si un camino  $f$  es regular entonces podemos asociar una recta tangente a  $f$  en  $t_0$ . La siguiente definición se basa en el comportamiento de las rectas tangentes cercanas al punto  $f(t_0)$ .

#### Definición 2.10. (Parametrización por longitud de arco)

Sea  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $f$  está parametrizado por longitud de arco si  $\|f'(s)\| = 1$ .

**Definición 2.11. (Curvatura)**

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino de clase  $C^2$  parametrizado por longitud de arco. El número  $\|f''(s)\|$  se llama curvatura de  $f$  en  $s$  y se denota por  $K(s)$ . (Perdigão, 1995)

**Teorema 2.12.**

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un camino regular de clase  $C^2$  no necesariamente parametrizado por longitud de arco entonces la curvatura de  $f$  en  $t$  está dada por

$$k(t) = \frac{\|f'(t) \times f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3}$$

(López de la Rica y de la Villa Cuenca, 1997)

**Definición 2.13.**

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  un camino regular parametrizado por longitud de arco y de clase  $C^1$  entonces al vector  $T(s) = f'(s)$  se llamará vector tangente unitario. (López de la Rica y de la Villa Cuenca, 1997)

Derivando la igualdad  $\|f'(s)\| = 1$  se tiene que  $f'(s) \cdot f''(s) = 0$  por lo que  $f''(s)$  es ortogonal a  $f'(s)$ . Si a este vector se le hace unitario y se lo denota por  $N(s)$  se tendría que

$$N(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|} = \frac{f''(s)}{k(s)}$$

El vector  $N(s)$  es llamado vector normal y el plano determinado por los vectores unitarios  $T(s)$  y  $N(s)$  se llamará plano osculador. En caso de que  $f$  no esté parametrizado

por longitud de arco se puede obtener el vector tangente unitario por  $T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ . Del mismo

modo se tendrá que  $T(t)$  es ortogonal a  $T'(t)$  por tanto  $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$ .

Un vector normal al plano osculador se obtiene por  $B(t) = T(t) \times N(t)$  llamado vector binormal. Un movimiento rígido para una curva es una traslación o rotación de esta misma, el siguiente teorema muestra que la curvatura y la torsión son características propias de cada curva y por tanto invariantes por movimientos rígidos.

### **Teorema 2.14.**

Sean las funciones diferenciables  $k, \tau : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $k(s) > 0, s \in I$  entonces existe una única curva parametrizada por longitud de arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  con curvatura  $k(s)$  y torsión  $\tau(s)$ , si además cualquier otra curva satisface las mismas condiciones entonces difiere de  $\alpha$  en un movimiento rígido. (Perdigão, 1995)

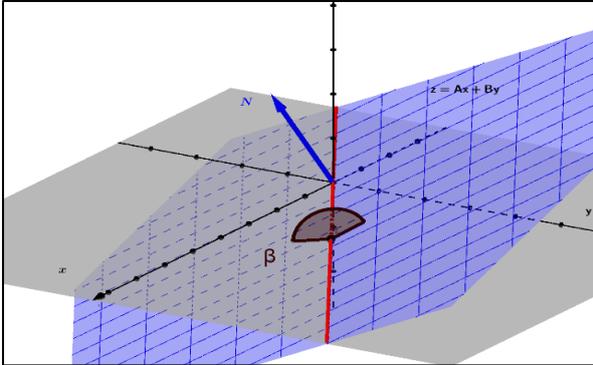
#### **2.1.4 Orientación de un plano**

En esta sección se estudiará algunas orientaciones y posiciones que puede tomar un plano inclinado en  $\mathbb{R}^3$ , es necesario ya que este plano posee dos “caras”, a diferencia del plano  $XY$  en el espacio  $\mathbb{R}^2$ , lo que sugiere considerar solo uno de ellos dependiendo de su posición, la cuál será la cara con la que se trabajará al momento de rotar puntos o curvas.

Se comienza definiendo el plano inclinado  $z = Ax + By$  con ángulo de inclinación  $\beta \in [0, \pi]$  como se verá. Se denotará por  $N$  un vector normal al plano en la misma dirección a la que llamaremos “**cara principal**”. A continuación, se dan los casos en los que se debe considerar  $N$  y  $\beta$ :

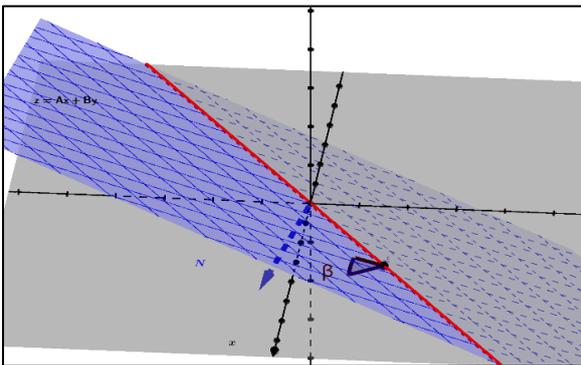
**Figura** ¡Error! Marcador no definido..

*Caso  $A < 0$  y  $B > 0$  y  $\beta$  obtuso*



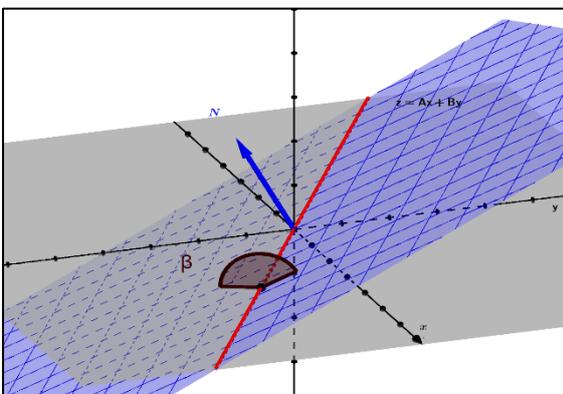
**Figura 1.**

*Caso  $A > 0$  y  $B < 0$  y  $\beta$  agudo*



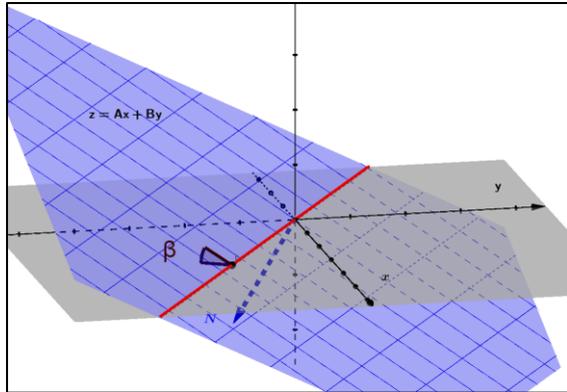
**Figura 2.**

*Caso  $A > 0$  y  $B > 0$  y  $\beta$  obtuso*



**Figura 3.**

Caso  $A < 0$  y  $B < 0$  y  $\beta$  agudo



Debe observarse que  $\beta$  es agudo en los casos 2 y 4, obtuso en los casos 1 y 3. Además, se denominará **lado principal** de la recta  $Ax + By = 0$  en  $\mathbb{R}^2$  al rayo o semirrecta que se encuentre en el primer o cuarto cuadrante, de donde se mide el ángulo  $\beta$ .

**Proposición 2.15.**

Sea  $z = Ax + By$  la ecuación de un plano inclinado y  $\beta$  su ángulo de inclinación entonces  $|\tan \beta| = \sqrt{A^2 + B^2}$ .

**Demostración:**

Sea  $p_1 = (x, y, Ax + By)$  un punto del plano tal que  $Ax + By \geq 0$  y  $p_2 = (x, y, 0)$  su proyección ortogonal sobre el plano  $XY$ , si  $d(p_1, L)$  es la distancia entre  $p_1$  y la recta

$$L: Ax + By = 0 \text{ entonces } d = \frac{|Ax + By|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ por lo que } |\tan \beta| = \frac{Ax + By}{d} = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

**Observación 2.16.**

El signo de  $\tan \beta$  lo determina el ángulo de inclinación del plano.

### 2.1.5 Proyección ortogonal y constantes especiales

Sea  $u, n \in \mathbb{R}^3$  con  $u \neq 0$ , puesto que  $n \times u = (n_2 u_3 - u_2 n_3, n_1 u_3 - u_1 n_3, n_1 u_2 - u_1 n_2)$

entonces expresando este producto matricialmente se obtiene

$$n \times u = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

#### Definición 2.17.

Sea  $n \in \mathbb{R}^3$ , la matriz asociada al producto vectorial se denomina **matriz lambda** de  $n$  y está dada por

$$\Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Definición 2.18.

Sean  $n, u \in \mathbb{R}^3$  vectores no nulos, el vector proyección de  $u$  sobre  $n$  está dado por

$$proy_n u = \frac{(n \cdot u)}{\|n\|^2} n$$

si  $\|n\| = 1$  entonces  $proy_n u = (n \cdot u) n$ .

Solo se considerarán la proyección sobre vectores unitarios, de esta manera se podrá expresar la proyección en forma matricial como sigue, si  $u = (u_1, u_2, u_3)$  y  $n = (n_1, n_2, n_3)$  tal que  $\|n\| = 1$  entonces

$$proy_n u = (n_1 u_1 + n_2 u_2 + n_3 u_3) n = \begin{pmatrix} n_1^2 u_1 + n_1 n_2 u_2 + n_1 n_3 u_3 \\ n_1 n_2 u_1 + n_2^2 u_2 + n_2 n_3 u_3 \\ n_1 n_3 u_1 + n_2 n_3 u_2 + n_3^2 u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$proy_n = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

**Definición 2.19.**

Sea  $n \in \mathbb{R}^3$  un vector unitario, la **matriz proyección** asociada a  $n$  está dada por

$$proy_n = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

Una relación entre la matriz proyección y la matriz lambda en  $\mathbb{R}^3$  viene dada por

$$\Lambda_n^2 = proy_n - I \text{ y } \Lambda_n^3 = -\Lambda_n \text{ siempre que } \|n\| = 1.$$

**Proposición 2.20.**

Sea  $\Lambda_n$  la matriz lambda de  $n$  y  $p \in \mathbb{Z}$  entonces

- i)  $\Lambda_n^{2p+1} = (-1)^p \Lambda_n \quad \forall p \geq 0$
- ii)  $\Lambda_n^{2p} = (-1)^p (I - proy_n) \quad \forall p \geq 1$

**Demostración:**

Para (i), se observa que si  $p = 0$  la igualdad es válida, luego suponiendo válida (i) para  $p = k$  (H.I.) se tiene que si  $p = k + 1$

$$\Lambda_n^{2(k+1)+1} = \Lambda_n^{2k+3} = \Lambda_n^{2k+1} \Lambda_n^2 = (-1)^k \Lambda_n \Lambda_n^2 = (-1)^k \Lambda_n^3 = -(-1)^k \Lambda_n = (-1)^{k+1} \Lambda_n$$

luego (i) es válido para cualquier  $p \geq 0$ .

Ahora se prueba (ii), para  $p = 1$  se tiene que  $\Lambda_n^2 = proy_n - I$ , suponiendo válida para  $p = k$  (H.I.) tomando  $p = k + 1$

$$\Lambda_n^{2(k+1)} = \Lambda_n^{2k+2} = \Lambda_n^{2k} \Lambda_n^2 = (-1)^k (I - \text{proy}_n) \Lambda_n^2 = (-1)^k \Lambda_n^4 = (-1)^k \Lambda_n \Lambda_n^3$$

teniendo en cuenta que  $\Lambda_n^3 = -\Lambda_n$  se obtiene

$$\Lambda_n^{2(k+1)} = (-1)^k \Lambda_n [-\Lambda_n] = (-1)^{k+1} \Lambda_n^2 = (-1)^{k+1} (I - \text{proy}_n).$$

**Definición 2.21.**

Un conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  en  $\mathbb{R}^n$  es llamado linealmente independientes (LI) si toda combinación lineal nula  $\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = 0$  implica que  $\alpha_i = 0, \forall 1 \leq i \leq m$ . (Golub y Van Loan, 1996).

**Definición 2.22.**

Sea  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  una colección de vectores en  $\mathbb{R}^n$ , el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores

$$S\{v_1, \dots, v_m\} = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, \alpha_i \in R \right\}$$

define un subespacio vectorial. (Golub y Van Loan, 1996).

**Definición 2.23.**

Sean  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vectores L.I. entonces  $\{u, v\}$  generan un hiperplano denotado por

$$S(u, v) = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in R\}$$

**Proposición 2.24.**

Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $u, v \in \mathbb{R}^n$  LI entonces la proyección ortogonal de  $x$  sobre el hiperplano

$S(u, v)$  está dado por

$$\text{proy}_{uv}x = \alpha u + \beta v$$

donde

$$\alpha = \frac{(x \cdot u)\|v\|^2 - (x \cdot v)(u \cdot v)}{\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2} \quad \beta = \frac{(x \cdot v)\|u\|^2 - (x \cdot u)(u \cdot v)}{\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2}$$

### Demostración:

Sea  $x' = \text{proy}_{uv}x$  la proyección de  $x$  sobre el hiperplano  $S(u, v)$ , esto es  $x' = \alpha u + \beta v$  para ciertos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Luego  $(x - x')$  es ortogonal a  $S(u, v)$ , por lo que  $(x - x') \cdot u = 0 \wedge (x - x') \cdot v = 0$ .

$$\begin{cases} (x - \alpha u - \beta v) \cdot u = 0 \\ (x - \alpha u - \beta v) \cdot v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot u - \alpha\|u\|^2 - \beta(v \cdot u) = 0 \\ x \cdot v - \alpha(u \cdot v) - \beta\|v\|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\|u\|^2 + \beta(v \cdot u) = x \cdot u \\ \alpha(u \cdot v) + \beta\|v\|^2 = x \cdot v \end{cases}$$

resolviendo este sistema para  $\alpha, \beta$  se obtiene lo que se buscaba, además  $\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \neq 0$

ya que  $u$  y  $v$  son LI.

### Observación 2.25.

Si  $u, v$  son unitarios y ortogonales entonces  $\text{proy}_{uv}x = (x \cdot u)u + (x \cdot v)v$ . Más adelante será útil expresar esta proyección de manera matricial. Es decir, se requiere expresar  $\text{proy}_{uv}x = T_{uv}x$ , donde  $T_{uv} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz que depende solo de  $u, v$ .

**Proposición 2.26.**

Sean  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vectores LI y  $T = \text{proj}_{uv}$  la proyección sobre el hiperplano generado por  $u, v$ . Entonces T es una matriz dada por

$$T_{ij} = \frac{1}{\|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2} \left[ \|v\|^2 u_i u_j - (u \cdot v)(v_i u_j + u_i v_j) + \|u\|^2 v_i v_j \right] \text{ con } 1 \leq i, j \leq n$$

**Demostración:**

Denotando la norma de vectores por  $|\cdot|$  y  $N_{uv} = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$  de la proposición anterior se tiene que

$$Tx = \left[ \frac{(x \cdot u)|v|^2 - (x \cdot v)(u \cdot v)}{|u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2} \right] u + \left[ \frac{(x \cdot v)|u|^2 - (x \cdot u)(u \cdot v)}{|u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2} \right] v$$

$$N_{uv}Tx = \left[ |v|^2 \sum x_j u_j - (u \cdot v) \sum x_j v_j \right] u + \left[ |u|^2 \sum x_j v_j - (u \cdot v) \sum x_j u_j \right] v$$

$$N_{uv}(Tx)_i = \left[ |v|^2 \sum x_j u_j - (u \cdot v) \sum x_j v_j \right] u_i + \left[ |u|^2 \sum x_j v_j - (u \cdot v) \sum x_j u_j \right] v_i$$

$$N_{uv}(Tx)_i = \left[ |v|^2 \sum x_j u_j u_i - (u \cdot v) \sum x_j v_j u_i \right] + \left[ |u|^2 \sum x_j v_j v_i - (u \cdot v) \sum x_j u_j v_i \right]$$

$$N_{uv}(Tx)_i = \sum_j x_j \left( |v|^2 u_i u_j - (u \cdot v) v_j u_i \right) + \sum_j x_j \left( |u|^2 v_i v_j - (u \cdot v) u_j v_i \right)$$

$$N_{uv}(Tx)_i = \sum_j x_j \left( |v|^2 u_i u_j - (u \cdot v) u_i v_j + |u|^2 v_i v_j - (u \cdot v) u_j v_i \right)$$

$$N_{uv}(Tx)_i = \sum_j x_j \left( |v|^2 u_i u_j - (u \cdot v)(u_i v_j + u_j v_i) + |u|^2 v_i v_j \right)$$

luego  $N_{uv}(Tx)_i = \sum_j M_{ij}x_j$  donde  $M_{ij} = |v|^2 u_i u_j - (u \cdot v)(v_i u_j + u_i v_j) + |u|^2 v_i v_j$ , se sigue que

$N_{uv}(Tx) = Mx$  donde

$$T_{ij} = \frac{1}{|u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2} M_{ij} \quad (2.1.3)$$

**Definición 2.27.**

La función delta de Kronecker  $\delta: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$  es dada por la siguiente regla de correspondencia

$$\delta(i, j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(Lovelock y Rund, 1989)

**Definición 2.28.**

El símbolo de Levi-Civita o símbolo de permutación es una función  $\delta: I \times I \times I \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  donde  $I = \{1, 2, 3\}$ , se define por la siguiente regla

$$\delta(i, j, k) = \delta_{ijk} = \begin{cases} -1, & \text{si } (i, j, k) \in \{(1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3)\} \\ 1, & \text{si } (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(Lovelock y Rund, 1989)

**Proposición 2.29.**

Si  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  entonces, algunas de las propiedades que satisfacen estas constantes especiales junto con el producto interno y vectorial son:

$$i) \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} b_k b_j = b_i b_j$$

$$\text{iii) } \sum_{k=1}^3 \delta_{kj} a_i a_k = a_i a_j$$

$$\text{iv) } \sum_{k=1}^3 a_i a_k b_k b_j = a_i b_j (a \cdot b)$$

$$\text{v) } \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} \dot{\delta}_{kjm} b_m = \dot{\delta}_{ijm} b_m \text{ con } m \notin \{i, j\}$$

$$\text{vi) } \sum_{k=1}^3 \dot{\delta}_{kjm} b_m a_k = (b \times a)_j \text{ con } m \notin \{k, j\}$$

$$\text{vii) } \sum_{k=1}^3 \dot{\delta}_{ikp} b_k a_p = (b \times a)_i \text{ con } p \notin \{k, i\}$$

$$\text{viii) } \sum_{k=1}^3 \dot{\delta}_{ikp} \dot{\delta}_{kjm} b_m a_p = \left[ b_i a_j - \delta_{ij} (a \cdot b) \right] \text{ con } p \notin \{k, i\}, m \notin \{k, j\}$$

$$\text{ix) } \dot{\delta}_{ijk} = -\dot{\delta}_{mnp} \text{ donde } (m, n, p) \text{ se obtiene intercambiando dos elementos en } (i, j, k)$$

Se probará algunas de estas propiedades, para **vii** se tiene que

$$\text{Si } i=1 \sum_{k=1}^3 \dot{\delta}_{ikp} b_k a_p = \dot{\delta}_{11p} b_1 a_p + \dot{\delta}_{12p} b_2 a_p + \dot{\delta}_{13p} b_3 a_p = \dot{\delta}_{11p} b_1 a_p + \dot{\delta}_{123} b_2 a_3 + \dot{\delta}_{132} b_3 a_2 = b_2 a_3 - b_3 a_2$$

$$\text{Si } i=2 \sum_{k=1}^3 \dot{\delta}_{ikp} b_k a_p = \dot{\delta}_{21p} b_1 a_p + \dot{\delta}_{22p} b_2 a_p + \dot{\delta}_{23p} b_3 a_p = \dot{\delta}_{213} b_1 a_3 + \dot{\delta}_{22p} b_2 a_p + \dot{\delta}_{231} b_3 a_1 = b_3 a_1 - b_1 a_3$$

$$\text{Si } i=3 \sum_{k=1}^3 \dot{\delta}_{ikp} b_k a_p = \dot{\delta}_{31p} b_1 a_p + \dot{\delta}_{32p} b_2 a_p + \dot{\delta}_{33p} b_3 a_p = \dot{\delta}_{312} b_1 a_2 + \dot{\delta}_{321} b_2 a_1 + \dot{\delta}_{33p} b_3 a_p = b_1 a_2 - b_2 a_1$$

luego  $\sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} b_k a_p = (b \times a)_i$  con  $p \notin \{k, i\}$ .

Para (viii) se tiene que si  $p \notin \{k, i\}$ ,  $m \notin \{k, j\}$  entonces  $\sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm} b_m a_p = b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm}$

Si  $i = j$

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm} = b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kim}$$

y puesto que  $m \notin \{i, k\}$ ,  $p \notin \{i, k\}$  se sigue que necesariamente  $m = p$ , en consecuencia

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm} = b_m a_m \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikm} \dot{\sigma}_{kim}, \text{ luego}$$

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm} = -b_m a_m \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikm} \dot{\sigma}_{ikm} = -b_m a_m \sum_{k=1}^3 (\dot{\sigma}_{ikm})^2,$$

la constante  $\dot{\sigma}_{ikm}$  se anula cuando  $k = i$  por lo que

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm} = -b_{m_1} a_{m_1} - b_{m_2} a_{m_2} \text{ donde } m_1 \neq m_2 \neq i$$

luego  $b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm} = a_i b_i - b_{m_1} a_{m_1} - b_{m_2} a_{m_2} - b_i a_i = a_i b_i - (a \cdot b)$ .

Si  $i \neq j$  se tiene que en

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \dot{\sigma}_{ikp} \dot{\sigma}_{kjm} \quad m \neq j \neq k,$$

por lo que necesariamente  $m = i$

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kjm} = b_i a_p \sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kji},$$

del mismo modo  $p \neq k \neq i$  por lo que  $p = j$ .

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kjm} = b_i a_j \sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kji},$$

como  $i \neq j$  esta suma se anula para  $k=i$  y para  $k=j$  luego

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kjm} = b_i a_j \delta_{isj} \delta_{sji}, \text{ con } s \neq i \neq j,$$

esto representa una permutación cíclica de  $(i, s, j)$  por lo que

$$b_m a_p \sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kjm} = b_i a_j (\delta_{isj})^2 = b_i a_j.$$

Finalmente,  $b_m a_p \sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kjm} = b_i a_j (\delta_{isj})^2 = b_i a_j - 0 = b_i a_j - \delta_{ij} (a \cdot b)$

Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^3 \delta_{ikp} \delta_{kjm} b_m a_p = \left[ b_i a_j - \delta_{ij} (a \cdot b) \right] \text{ con } p \notin \{k, i\}, m \notin \{k, j\}$$

### Proposición 2.30.

Si  $n \in \mathbb{R}^3$  es un vector unitario entonces  $(\Lambda_n)_{ij} = -n_k \delta_{ijk}$  con  $k \notin \{i, j\}$ .

### Demostración:

Dado que  $\Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$ , la constante de Levi-Civita se anula cuando dos

índices coinciden, observe que

$$-\Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_k \dot{\circ}_{11k} & n_3 \dot{\circ}_{123} & n_2 \dot{\circ}_{132} \\ n_3 \dot{\circ}_{213} & n_k \dot{\circ}_{22k} & n_1 \dot{\circ}_{231} \\ n_2 \dot{\circ}_{312} & n_1 \dot{\circ}_{321} & n_k \dot{\circ}_{33k} \end{pmatrix}$$

De donde  $(-\Lambda_n)_{ij} = n_k \dot{\circ}_{ijk}$  con  $k \neq i \wedge k \neq j$  luego  $(\Lambda_n)_{ij} = -n_k \dot{\circ}_{ijk}$  con  $k \notin \{i, j\}$ .

### Proposición 2.31.

Sean  $a = (a_1, a_2, a_3)$  y  $b = (b_1, b_2, b_3)$  se cumple que

- i)  $a_i b_j - a_j b_i = (b \times a)_k$  con  $k \neq i, j$
- ii)  $a_i (b \times a)_j - a_j (b \times a)_i = a_k (a \cdot b) - b_k$ ,  $k \neq i, j$
- iii)  $b_j (b \times a)_i - b_i (b \times a)_j = b_k (a \cdot b) - a_k$ ,  $k \neq i, j$

## 2.2 Rotaciones de curvas

### 2.2.1 Rotaciones especiales $\mu, \lambda$

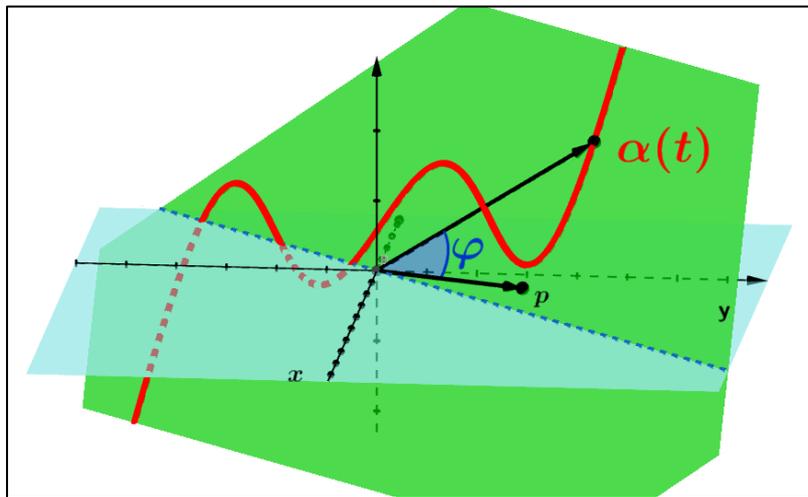
Considere la aplicación  $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que a cada punto de la curva plana  $\Psi(t)$ ,  $t \in \text{Dom}(\Psi)$  le hace corresponder el punto en  $\lambda(\Psi(t)) \in \mathbb{R}^2$  de tal forma que la curva no se deforme, en el sentido que no se estira ni contrae (más adelante se verá que  $\lambda$  es una composición de rotaciones, un movimiento rígido). Sea  $\mathbb{P}$  el plano osculador de la curva plana  $\Psi(t)$  y  $p \in \mathbb{P}$  un vector arbitrario no nulo. Se define un sistema coordenado en  $\mathbb{P}$  del siguiente modo, un eje principal (U) en la misma dirección que  $p$ , y un eje secundario (V) ortogonal a

$p$  en sentido antihorario respecto a la **cara principal** de  $\mathbb{P}$ . Este plano posee un vector normal  $n$ .

Otra forma de interpretar la aplicación  $\lambda$  es tomar el plano  $\mathbb{P}$  y realizar dos rotaciones consecutivas para hacer coincidir  $p$  con el eje X de tal forma que la cara principal de  $\mathbb{P}$  esté en el sentido del eje  $Z$  positivo.

#### Figura 4.

*Una curva en  $R^3$  que será llevada a  $R^2$*



Se debe notar que  $\mathbb{P}: AX + BY + C = 0$  no necesariamente pasa por el origen, pero sin pérdida de generalidad puede considerarse este caso ya que de no ser así puede trasladarse  $\mathbb{P}$  convenientemente hasta el origen con una traslación. En lo que sigue,  $\Psi$  denotará un camino, y  $\bar{\Psi}$  su imagen mediante una rotación especial. El objetivo es hallar  $\lambda(\Psi(t)) = \bar{\Psi}(t) = (\bar{\Psi}_1(t), \bar{\Psi}_2(t))$ .

Se inicia tomando  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  el ángulo formado desde el vector  $p$  hasta  $\Psi(t)$ , expresando  $\bar{\Psi}(t)$  en coordenadas polares del sistema XY

$$\bar{\Psi}(t) = (\|\bar{\Psi}(t)\| \cos(\varphi), \|\bar{\Psi}(t)\| \sin(\varphi)), \quad \forall \varphi \in [-\pi, \pi] \quad (2.2.1)$$

Un ángulo  $\theta$  formado por dos vectores  $u, v$  viene dado por  $\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$  del cual

solo se obtienen valores de  $\theta \in [0, \pi]$  pero se requiere que  $\theta \in [-\pi, \pi]$  para extender este resultado se introduce la constante  $\kappa$  que ayudará a saber en qué casos el ángulo  $\theta$  es positivo o negativo. Se analizará esto en dos casos:

**Caso 1:** Si  $\varphi \in [0, \pi]$  no hay inconveniente pues los ángulos coinciden  $\varphi = \theta$  cumplen la

relación  $\cos(\theta) = \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|\Psi(t)\| \|p\|}$ , puesto que la norma se preserva bajo  $\lambda$

$$\|\bar{\Psi}(t)\| \cos(\varphi) = \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|p\|} \quad (2.2.2)$$

**Caso 2:** Si  $\varphi \in [-\pi, 0]$  el ángulo que se tomará de la fórmula, según el gráfico siguiente será

$\varphi = -\theta$  y así

$$\cos(\theta) = \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|\Psi(t)\| \|p\|}$$

$$\cos(-\varphi) = \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|\Psi(t)\| \|p\|}$$

$$\|\Psi(t)\| \cos(\varphi) = \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|p\|}$$

$$\|\bar{\Psi}(t)\| \cos(\varphi) = \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|p\|} \quad (2.2.3)$$

de este modo de (2.2.2) y (2.2.3) se cumple que

$$\|\bar{\Psi}(t)\| \cos(\varphi) = \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|p\|}, \quad \forall \varphi \in [-\pi, \pi] \quad (2.2.4)$$

Se analiza ahora la segunda componente de (2.2.1)

**Caso 1:** Si  $\theta \in [0, \pi]$  no hay inconveniente pues hacemos  $\theta = \varphi$  y

$$\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \left( \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|\Psi(t)\| \|p\|} \right)^2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\|\Psi(t) \times p\|}{\|\Psi(t)\| \|p\|}$$

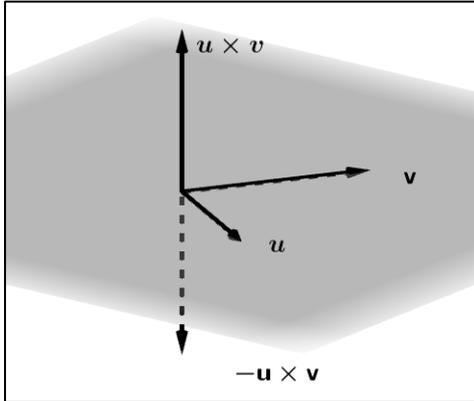
$$\|\Psi(t)\| \sin(\varphi) = \frac{\|\Psi(t) \times p\|}{\|p\|}$$

$$\|\bar{\Psi}(t)\| \sin(\varphi) = \frac{\|\Psi(t) \times p\|}{\|p\|} \quad (2.2.5)$$

**Caso 2:** Si  $\varphi \in [-\pi, 0]$ , dado que  $\sin(-x) \neq \sin(x)$  en general entonces no basta con tomar  $\theta = -\varphi$ , para ello ¿Cómo saber cuándo  $\varphi \in [-\pi, 0]$ ? Para entender esto veamos el siguiente gráfico.

**Figura 5.**

*Dirección del producto vectorial o regla de la mano derecha*



Si tenemos los vectores  $u, v$  siguiendo la regla de la mano derecha, tendríamos que (caso 1)  $N = u \times v$  es un vector que apunta hacia “arriba”, mientras que en el (caso 2)  $N = u \times v$  es un vector que apunta hacia “abajo”. Los términos “arriba” y “abajo” son relativos pues depende del lado del plano donde se esté trabajando (en realidad dependen de A o B). Por lo que basta analizar el signo de la tercera componente de  $N = (N_1, N_2, N_3)$  que determinará si el vector normal apunta hacia arriba o abajo.

En ese sentido, saber cuándo  $\varphi \in [-\pi, 0]$  se dará cuando la tercera componente de  $\Psi(t) \times p$  es positiva o negativa. Dado que  $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t))$  y  $p = (p_1, p_2, p_3)$  entonces si  $B \neq 0$  se denota por  $\kappa$  a la tercera componente de  $\Psi(t) \times p$  unitaria, además se debe tener en cuenta la cara principal del plano y esto lo indica el signo de  $B$

$$\kappa = \frac{(\Psi_2(t)p_1 - \Psi_1(t)p_2) B}{|\Psi_2(t)p_1 - \Psi_1(t)p_2| |B|} \quad (2.2.6)$$

$\kappa$  será llamado **factor de compensación de orientación del plano**. Además, se tiene que

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \text{si } (0 < \theta < \pi \wedge N_3 > 0) \vee (-\pi < \theta < 0 \wedge N_3 < 0) \\ -1, & \text{si } (0 < \theta < \pi \wedge N_3 < 0) \vee (-\pi < \theta < 0 \wedge N_3 > 0) \end{cases}$$

De este modo

$$\sin(\varphi) = \frac{\|\Psi(t) \times p\|}{\|\Psi(t)\| \|p\|} \kappa$$

$$\|\bar{\Psi}(t)\| \sin(\varphi) = \frac{\|\Psi(t) \times p\|}{\|p\|} \kappa \quad (2.2.7)$$

Luego de (2.2.5) y (2.2.7) se tiene

$$\|\bar{\Psi}(t)\| \sin(\varphi) = \frac{\|\Psi(t) \times p\|}{\|p\|} \kappa \quad \forall \varphi \in [-\pi, \pi] \quad (2.2.8)$$

Donde  $\kappa$  está dado por (2.2.6). Finalmente

$$\lambda(\Psi(t)) = \bar{\Psi}(t) = \left( \|\bar{\Psi}(t)\| \cos(\theta), \|\bar{\Psi}(t)\| \sin(\theta) \right) = \left( \frac{\Psi(t) \cdot p}{\|p\|}, \frac{\|\Psi(t) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right)$$

$$\lambda(\Psi(t)) = \frac{1}{\|p\|} \left( \Psi(t) \cdot p, \|\Psi(t) \times p\| \kappa \right) \quad \forall t \in \text{Dom}(\Psi) \quad (2.2.9)$$

### Observación 2.32.

La aplicación  $\lambda$  se define de este modo para valores de  $B \neq 0$  en caso  $B = 0$  se procede del mismo modo y se obtiene la imagen de  $\lambda$  como:

$$\lambda(\Psi(t)) = \bar{\Psi}(t) = \frac{1}{\|p\|} \left( \Psi(t) \cdot p, \|\Psi(t) \times p\| \kappa^* \right)$$

donde  $\kappa^* = \frac{(\Psi_2(t)p_1 - \Psi_1(t)p_2)}{|\Psi_2(t)p_1 - \Psi_1(t)p_2|} \cdot \frac{(-A)}{|A|} \forall t \in \text{Dom}(\Psi)$ . Además, la rotación especial  $\mathcal{L}$  no

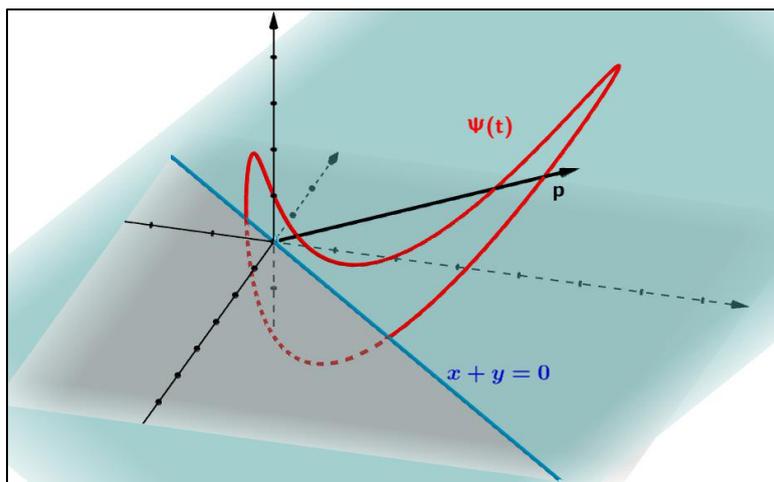
depende de la norma de  $p$  solo de su dirección por lo que por simplicidad puede considerarse como unitario.

### Ejemplo 2.33.

Sea  $\Psi(t) = (3 \sin t + 2, \cos t - 2 \cos 2t, 3 \sin t + \cos t - 2 \cos 2t + 2)$  contenida en el plano  $z = x + y$ , tomando un punto del plano  $p = (1, 0, 1)$ .

### Figura 6.

Ejemplo de una curva en  $\square^3$



Se observa que  $A = B = 1$  y  $\|p\| = \sqrt{2}$ , aplicando la rotación especial se tiene

$$\Psi(t) \cdot p = (3 \sin t + 2, \cos t - 2 \cos 2t, 3 \sin t + \cos t - 2 \cos 2t + 2) \cdot (1, 0, 1) = 6 \sin t + 4 + \cos t - 2 \cos 2t$$

también

$$\Psi(t) \times p = (3 \sin t + 2, \cos t - 2 \cos 2t, 3 \sin t + \cos t - 2 \cos 2t + 2) \times (1, 0, 1)$$

$$\Psi(t) \times p = (\cos t - 2 \cos 2t, \cos t - 2 \cos 2t, -\cos t + 2 \cos 2t) \text{ luego}$$

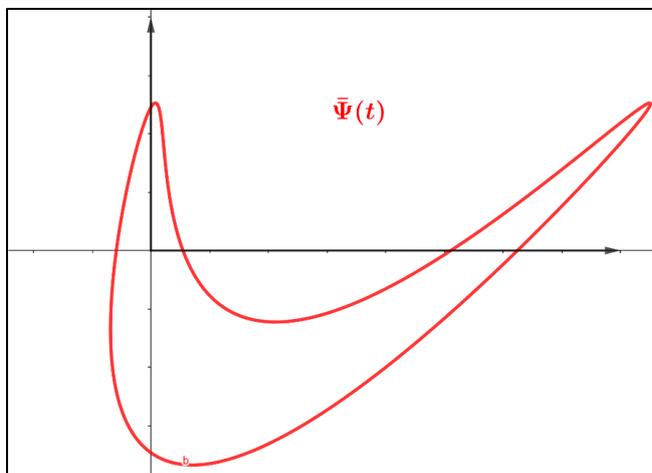
$$\|\Psi(t) \times p\| = \sqrt{3} |\cos t - 2 \cos 2t|$$

$$\kappa = \frac{(\Psi_2(t)p_1 - \Psi_1(t)p_2) B}{|\Psi_2(t)p_1 - \Psi_1(t)p_2| |B|} = \frac{\cos t - 2 \cos 2t}{|\cos t - 2 \cos 2t|}$$

por lo que  $\bar{\Psi}(t) = \lambda(\Psi(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} (6 \sin t + \cos t - 2 \cos 2t + 4, \sqrt{3} \cos t - 2\sqrt{3} \cos 2t)$ .

**Figura 7.**

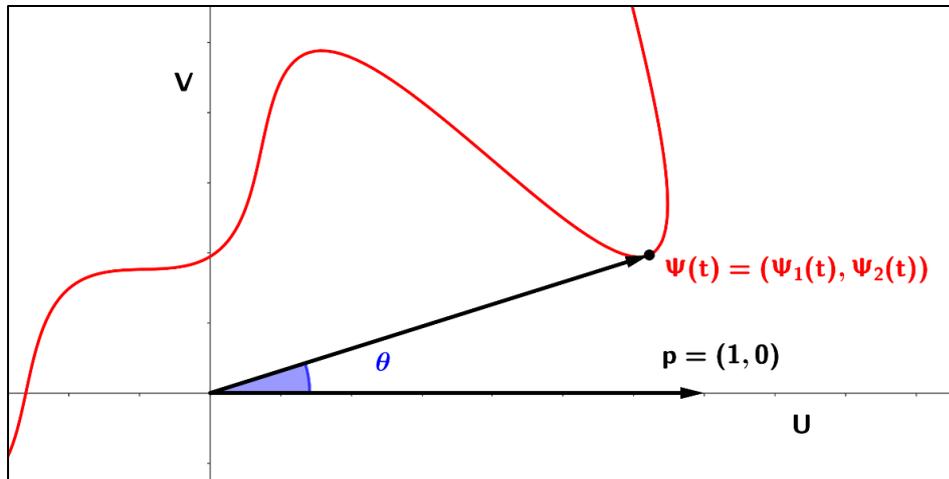
*Curva luego de ser transformada mediante  $\lambda$*



Ahora se realizará el proceso inverso, en la primera parte se tuvo una curva en  $\mathbb{R}^3$  y mediante la elección de un vector no nulo  $P \in \mathbb{P}$  se convertía en el eje principal del plano  $\mathbb{R}^2$ . En este caso el punto de partida es una curva  $\Psi(t) \in \mathbb{R}^2$  y se desea hallar la ecuación de la curva que se obtiene al rotar este plano hacia la cara principal del plano  $z = Ax + By$  donde la dirección del vector  $P$  ya no se tomará con tanta libertad sino que por simplicidad se considerará  $p = (1, 0)$  un vector fijo, más adelante veremos que la elección de esta dirección no representa ninguna restricción.

**Figura 8.**

Curva  $\Psi(t)$  y preimagen  $p$  del eje principal  $s$



Sea  $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \Psi_2(t)) \forall t \in \Psi$  mediante la aplicación  $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

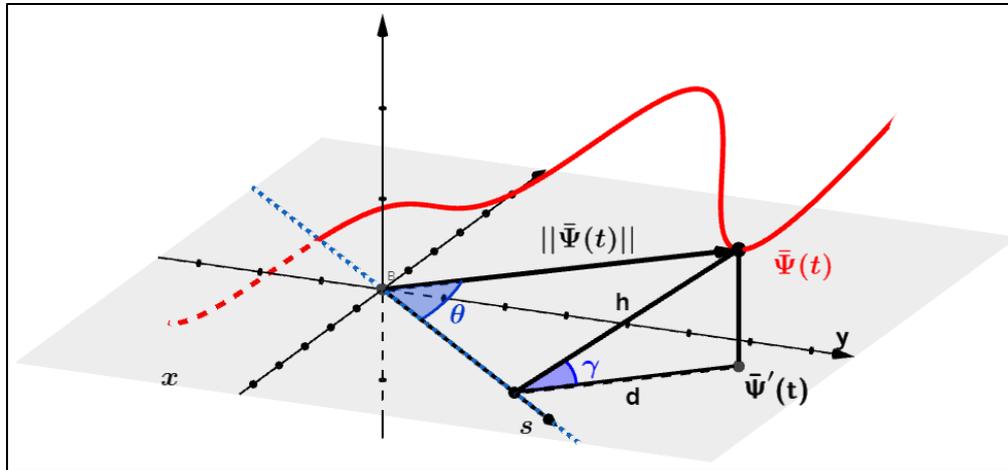
$$\mu(\Psi(t)) = \bar{\Psi}(t) = \mu(\Psi_1(t), \Psi_2(t)) = (\bar{\Psi}_1(t), \bar{\Psi}_2(t), \bar{\Psi}_3(t))$$

Como en los casos vistos en la sección 2.1.4 se toma un vector unitario  $s$  del lado principal de la recta  $Ax + By = 0$ .

$$s = \left( \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{-A|B|}{B\sqrt{A^2 + B^2}}, 0 \right) \in \mathbb{P}$$

**Figura 9.**

Rotación especial  $\mu$  de la curva  $\Psi(t)$



Es importante notar que  $s$  es la imagen de  $p=(1,0)$  mediante  $\mu$ , como se indicó anteriormente, se busca que  $s$  se convierta en este eje positivo del plano osculador  $\mathbb{P}$ . Sea  $\gamma$  el ángulo agudo de inclinación entre el plano  $\mathbb{P}$  y el plano  $XY$  entonces de la Proposición 2.15. se sabe que  $|\tan(\beta)| = \tan(\gamma) = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Luego para cada valor de  $t$  tomemos el punto  $\bar{\Psi}(t) = (\bar{\Psi}_1(t), \bar{\Psi}_2(t), \bar{\Psi}_3(t))$  cuya proyección al plano  $XY$  es  $\bar{\Psi}'(t) = (\bar{\Psi}_1(t), \bar{\Psi}_2(t), 0)$ , sea  $d$  la distancia de  $\bar{\Psi}'(t)$  hacia la recta  $Ax + By = 0$  y  $h$  a la distancia de  $\bar{\Psi}(t)$  a la misma recta.

Observemos que de la **Figura 8** que  $h = |\Psi_2(t)|$ , de ello se deduce que  $\Psi_2(t) \geq 0$  cuando  $\bar{\Psi}_3(t)$  esté sobre el plano  $XY$  y negativo en caso contrario. Podemos expresar  $\Psi(t)$  en coordenadas polares como

$$\Psi(t) = (\|\Psi(t)\| \cos(\theta), \|\Psi(t)\| \sin(\theta)), \theta \in [-\pi, \pi]$$

de donde

$$\Psi_1(t) = \|\Psi(t)\| \cos(\theta) \wedge \Psi_2(t) = \|\Psi(t)\| \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\Psi_1(t)}{\|\Psi(t)\|} \wedge \sin(\theta) = \frac{\Psi_2(t)}{\|\Psi(t)\|} \forall t \in \text{Dom}(\Psi)$$

siempre que  $\Psi(t) \neq 0$ . Por otro lado, recordemos que

$$\cos(\theta) = \frac{p \cdot \Psi(t)}{\|p\| \|\Psi(t)\|}$$

Esta igualdad es válida para todo  $\theta \in [-\pi, \pi]$  por lo estudiado en (2.2.4), de este modo como el ángulo formado por  $p = (1, 0)$  y  $\Psi(t)$  es el mismo que el formado por  $s$  y  $\bar{\Psi}(t)$ , teniendo en cuenta que  $\|\Psi(t)\| = \|\bar{\Psi}(t)\|$ ,  $\|s\| = 1$  entonces

$$\cos(\theta) = \frac{s \cdot \bar{\Psi}(t)}{\|s\| \|\bar{\Psi}(t)\|} = \frac{1}{\|\Psi(t)\|} \left( \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{-A|B|}{B\sqrt{A^2 + B^2}}, 0 \right) \cdot (\bar{\Psi}_1(t), \bar{\Psi}_2(t), \bar{\Psi}_3(t))$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\|\Psi(t)\|} \left( \frac{|B|\bar{\Psi}_1(t)}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{A|B|\bar{\Psi}_2(t)}{B\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

$$B\sqrt{A^2 + B^2} \|\Psi(t)\| \cos(\theta) = B|B|\bar{\Psi}_1(t) - A|B|\bar{\Psi}_2(t)$$

$$B\bar{\Psi}_1(t) - A\bar{\Psi}_2(t) = \frac{B}{|B|} \sqrt{A^2 + B^2} \|\Psi(t)\| \cos(\theta)$$

$$B\bar{\Psi}_1(t) - A\bar{\Psi}_2(t) = \frac{B}{|B|} \left( \sqrt{A^2 + B^2} \right) \Psi_1(t) \quad (2.2.10)$$

De la **Figura 9** también se tiene que

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} = \frac{d}{h}$$

La distancia  $d$  entre  $\bar{\Psi}'(t)$  a la recta  $Ax + By = 0$  viene dada por

$$d = \frac{|A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

de estas dos últimas igualdades y del hecho que  $h = |\Psi_2(t)|$  se sigue que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} = \frac{d}{h} = \frac{|A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t)|}{|\Psi_2(t)|\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\frac{|\Psi_2(t)|\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} = |A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t)|$$

$$|A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t)| = \frac{|\Psi_2(t)|\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

Se sabe que  $\bar{\Psi}_3 = A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t)$  por ser una curva plana contenida en  $Z = AX + BY$ , además  $\bar{\Psi}_3(t)$  será positivo cuando  $\bar{\Psi}_3(t)$  esté sobre el plano  $XY$  y negativo en caso contrario, puesto que el eje  $U$  pasó a convertirse en la recta  $Ax + By = 0$  entonces el signo de  $\bar{\Psi}_3(t)$  dependerá solo de  $\Psi_2(t)$ . En otras palabras  $\bar{\Psi}_3(t) = A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t) \geq 0 \Leftrightarrow \Psi_2(t) \geq 0$ . Por lo que podemos escribir

$$A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t) = \frac{\Psi_2(t)\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \quad (2.2.11)$$

Las ecuaciones ( 2.2.10) y ( 2.2.11) se resuelven para  $\bar{\Psi}_1(t)$  y  $\bar{\Psi}_2(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} B\bar{\Psi}_1(t) - A\bar{\Psi}_2(t) = \frac{B}{|B|} \sqrt{A^2 + B^2} \Psi_1(t) \\ A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \Psi_2(t) \end{array} \right.$$

multiplicando la primera ecuación por  $B$  y la segunda por  $A$  y sumando se tiene

$$\left\{ \begin{array}{l} B^2\bar{\Psi}_1(t) - AB\bar{\Psi}_2(t) = \frac{B^2}{|B|} \left( \sqrt{A^2 + B^2} \right) \Psi_1(t) \\ A^2\bar{\Psi}_1(t) + AB\bar{\Psi}_2(t) = \frac{A\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \Psi_2(t) \end{array} \right.$$

de donde

$$(A^2 + B^2)\bar{\Psi}_1(t) = \frac{B^2}{|B|} \sqrt{A^2 + B^2} \Psi_1(t) + \frac{A\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \Psi_2(t)$$

$$\bar{\Psi}_1(t) = \frac{|B|\sqrt{A^2 + B^2}}{(A^2 + B^2)} \Psi_1(t) + \frac{A\sqrt{A^2 + B^2}}{(A^2 + B^2)\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \Psi_2(t)$$

$$\bar{\Psi}_1(t) = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Psi_1(t) + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \Psi_2(t) \quad (2.2.12)$$

Del mismo modo, multiplicando la primera ecuación por  $-A$  y la segunda por  $B$  y sumando se obtiene

$$\left\{ \begin{array}{l} -AB\bar{\Psi}_1(t) + A^2\bar{\Psi}_2(t) = -\frac{AB}{|B|} \sqrt{A^2 + B^2} \Psi_1(t) \\ AB\bar{\Psi}_1(t) + B^2\bar{\Psi}_2(t) = \frac{B\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \Psi_2(t) \end{array} \right.$$

$$(A^2 + B^2)\bar{\Psi}_2(t) = -\frac{AB}{|B|}\sqrt{A^2 + B^2}\Psi_1(t) + \frac{B\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}\Psi_2(t)$$

$$\bar{\Psi}_2(t) = \frac{-AB}{|B|\sqrt{A^2 + B^2}}\Psi_1(t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}}\Psi_2(t) \quad (2.2.13)$$

Finalmente, como  $\bar{\Psi}_3(t) = A\bar{\Psi}_1(t) + B\bar{\Psi}_2(t)$

$$\bar{\Psi}_3(t) = A \left[ \frac{|B|\Psi_1(t)}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \frac{\Psi_2(t)}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \right] + B \left[ \frac{-AB\Psi_1(t)}{|B|\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B\Psi_2(t)}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \right]$$

$$\bar{\Psi}_3(t) = \Psi_1(t) \left[ \frac{A|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \frac{AB^2}{|B|\sqrt{A^2 + B^2}} \right] + \Psi_2(t) \left[ \frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \right]$$

$$\bar{\Psi}_3(t) = \Psi_1(t) \left[ \frac{AB^2 - AB^2}{|B|\sqrt{A^2 + B^2}} \right] + \Psi_2(t) \left[ \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \right]$$

$$\bar{\Psi}_3(t) = \Psi_2(t) \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}$$

Por lo tanto,  $\mu(\Psi(t)) = \mu(\Psi_1(t), \Psi_2(t)) = (\bar{\Psi}_1(t), \bar{\Psi}_2(t), \bar{\Psi}_3(t))$  está dada por

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(t) &= \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\Psi_1(t) + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}}\Psi_2(t) \\ \bar{\Psi}_2(t) &= \frac{-AB}{|B|\sqrt{A^2 + B^2}}\Psi_1(t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}}\Psi_2(t) \\ \bar{\Psi}_3(t) &= \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}\Psi_2(t) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

**Observación 2.34.**

De las ecuaciones anteriores se cumple que

$$\bar{\Psi}_1^2(t) + \bar{\Psi}_2^2(t) = \Psi_1^2(t) + \frac{\Psi_2^2(t)}{1 + A^2 + B^2} \quad (2.2.15)$$

En efecto, por simplicidad sea  $w = A^2 + B^2$  entonces:

$$\bar{\Psi}_1^2(t) + \bar{\Psi}_2^2(t) = \left[ \frac{|B|\Psi_1(t)}{\sqrt{w}} + \frac{A\Psi_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right]^2 + \left[ \frac{-AB\Psi_1(t)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\Psi_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right]^2$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1^2(t) + \bar{\Psi}_2^2(t) &= \frac{B^2\Psi_1^2(t)}{w} + \frac{2A|B|\Psi_1(t)\Psi_2(t)}{(w)\sqrt{1+w}} + \frac{A^2\Psi_2^2(t)}{(w)(1+w)} \\ &\quad + \frac{A^2B^2\Psi_1^2(t)}{B^2w} - \frac{2AB^2\Psi_1(t)\Psi_2(t)}{|B|w\sqrt{1+w}} + \frac{B^2\Psi_2^2(t)}{w(1+w)} \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}_1^2(t) + \bar{\Psi}_2^2(t) = \left[ \frac{w}{w} \right] \Psi_1^2(t) + \left[ \frac{w}{w(1+w)} \right] \Psi_2^2(t) = \Psi_1^2(t) + \frac{\Psi_2^2(t)}{1 + A^2 + B^2}$$

**Observación 2.35.**

La elección de  $p = (1, 0)$  fue impuesta de forma un tanto forzosa, si antes de aplicar  $\mu$  se rota en sentido antihorario  $\Psi(t)$  un determinado ángulo  $\delta$  entonces, por las ecuaciones (2.2.14) en lugar de tomar  $\Psi_1(t)$  y  $\Psi_2(t)$  se toma

$$\Psi_1(t) = \cos(\delta)\Psi_1(t) - \sin(\delta)\Psi_2(t)$$

$$\Psi_2(t) = \sin(\delta)\Psi_1(t) + \cos(\delta)\Psi_2(t)$$

De esta manera el vector  $p$  será  $p = (\cos(\delta), \sin(\delta))$  y la curva puede ser rotada previamente. La rotación especial  $\mu$  también nos permite obtener un vector normal al plano en la cara principal, este vector está dado por  $N = \mu(1,0) \times \mu(0,1)$ , de (2.2.14) se tiene que

$$N = \left( \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{-AB}{|B|\sqrt{A^2 + B^2}}, 0 \right) \times \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \right)$$

$$N = \left( \frac{-AB}{|B|\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \frac{-|B|}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}}, \frac{B}{|B|\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \right)$$

La importancia de la normal  $N$  radica en conocer su dirección, mas no su magnitud por lo que puede considerarse

$$N = \left( \frac{-A}{B}, -1, \frac{1}{B} \right) \quad (2.2.16)$$

siempre que  $B \neq 0$ .

### 2.2.2 Rotaciones especiales inversas

#### Teorema 2.36.

Las aplicaciones  $\lambda$ ,  $\mu$  así definidas son inversas.

#### Demostración:

Sea  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $z = Ax + By$ ,  $B \neq 0$  se sabe que

$$\lambda(x, y, z) = \left( \frac{(x, y, z) \cdot p}{\|p\|}, \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right)$$

Donde  $\kappa = \frac{(yp_1 - xp_2) B}{\|yp_1 - xp_2\| \|B\|}$

Por otro lado

$$\mu(a, b) = \left( \frac{|B|}{\sqrt{w}} a + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} b, \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} a + \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} b, \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} b \right)$$

Donde  $\mu(a, b)$  pertenece al plano inclinado  $z = Ax + By$ ,  $w = A^2 + B^2$ . Primero se probará que  $\mu \circ \lambda = i_{\mathbb{R}^3}$ .

Sea  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  con  $z \neq 0$  y  $p = \left( |B|, -A \frac{|B|}{B}, 0 \right)$  entonces

$$\kappa = \frac{(yp_1 - xp_2)}{|yp_1 - xp_2|} \cdot \frac{B}{|B|} = \frac{\left( y|B| + xA \frac{|B|}{B} \right)}{\left| y|B| + xA \frac{|B|}{B} \right|} \cdot \frac{B}{|B|} = \frac{(B|B|y + A|B|x)}{|B|B|y + A|B|x|}$$

$$\kappa = \frac{z}{|z|} \tag{2.2.17}$$

también se tiene

$$\mu(\lambda(x, y, z)) = \mu \left( \frac{(x, y, z) \cdot p}{\|p\|}, \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right)$$

$$\begin{aligned} \mu(\lambda(x, y, z)) = & \left( \frac{|B|}{\sqrt{w}} \left[ \frac{(x, y, z) \cdot p}{\|p\|} \right] + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right], \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} \left[ \frac{(x, y, z) \cdot p}{\|p\|} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right], \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right] \right) \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

operando el producto interior y vectorial

$$(x, y, z) \cdot p = (x, y, z) \cdot \left( |B|, -A \frac{|B|}{B}, 0 \right) = |B|x - A \frac{|B|}{B} y \tag{2.2.19}$$

también

$$(x, y, z) \times p = (x, y, z) \times \left( |B|, -A \frac{|B|}{B}, 0 \right) = \left( A \frac{|B|}{B} z, |B| z, -|B| y - A \frac{|B|}{B} x \right) = \frac{|B|}{B} (Az, Bz, -z)$$

$$\|(x, y, z) \times p\| = \left\| \frac{|B|}{B} (Az, Bz, -z) \right\| = |z| \sqrt{1+w} \quad (2.2.20)$$

Además

$$\|p\| = \left\| \left( |B|, -A \frac{|B|}{B}, 0 \right) \right\| = \sqrt{B^2 + A^2} = \sqrt{w} \quad (2.2.21)$$

Analizando cada componente de  $\mu(\lambda((x, y, z)))$  y reemplazando (2.2.17), (2.2.19),

(2.2.20), (2.2.21) en (2.2.18)

$$\begin{aligned} \mu(\lambda(x, y, z))_1 &= \frac{|B|}{\sqrt{w}} \left[ \frac{(x, y, z) \cdot p}{\|p\|} \right] + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right] \\ &= \frac{|B|}{\|p\|\sqrt{w}} \left[ |B|x - A \frac{|B|}{B} y \right] + \frac{A}{\|p\|\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ |z| \sqrt{1+w} \kappa \right] \\ &= \frac{B^2 x - AB y}{w} + \frac{A|z|}{w} \kappa \\ &= \frac{B^2 x - AB y}{w} + \frac{A|z|}{w} \frac{z}{|z|} \\ &= \frac{B^2 x - AB y + A(Ax + By)}{w} \\ &= \frac{B^2 x + A^2 x}{w} = x \end{aligned}$$

$$\mu(\lambda(x, y, z))_2 = \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} \left[ \frac{(x, y, z) \cdot p}{\|p\|} \right] + \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-AB}{\|p\|\|B\|\sqrt{w}} \left[ |B|x - A \frac{|B|}{B} y \right] + \frac{B}{\|p\|\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ |z|\sqrt{1+w} \kappa \right] \\
&= \frac{-AB|B|x + A^2|B|y}{|B|w} + \frac{B|z|}{w} \kappa \\
&= \frac{-ABx + A^2y}{w} + \frac{B|z|}{w} \frac{z}{|z|} \\
&= \frac{-ABx + A^2y}{w} + \frac{B(Ax + By)}{w} \\
&= \frac{A^2y + B^2y}{w} = y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda(x, y, z))_3 &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\|(x, y, z) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right] \\
&= \frac{\sqrt{w}}{\|p\|\sqrt{1+w}} \left[ |z|\sqrt{1+w} \kappa \right] \\
&= \frac{|z|\sqrt{w}}{\sqrt{w}} \frac{z}{|z|} = z
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mu(\lambda(x, y, z)) = (x, y, z)$$

por consiguiente

$$\mu \circ \lambda = i_{\mathbb{R}^3} \tag{2.2.22}$$

Ahora se probará que  $\lambda \circ \mu = i_{\mathbb{R}^2}$ . Sea  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  con  $y \neq 0$  si  $w = A^2 + B^2$  entonces

$$\lambda(\mu(x, y)) = \left( \frac{\mu(x, y) \cdot p}{\|p\|}, \frac{\|\mu(x, y) \times p\|}{\|p\|} \kappa \right) \quad (2.2.23)$$

luego  $\mu(x, y)$  se encuentra sobre el plano inclinado  $z = Ax + By$ , se elige un punto  $p$  en la

intersección con el plano XY es  $p = \left( |B|, -A \frac{|B|}{B}, 0 \right)$  cuya norma es

$$\|p\| = \sqrt{w} \quad (2.2.24)$$

Operando el producto interno y vectorial

$$\begin{aligned} \mu(x, y) \cdot p &= \left( \frac{|B|x}{\sqrt{w}} + \frac{Ay}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-ABx}{|B|\sqrt{w}} + \frac{By}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \right) \cdot \left( |B|, -A \frac{|B|}{B}, 0 \right) \\ &= \frac{|B|^2 x}{\sqrt{w}} + \frac{A|B|y}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} - \frac{ABx}{|B|\sqrt{w}} \left( -A \frac{|B|}{B} \right) + \frac{By}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left( -A \frac{|B|}{B} \right) \\ &= \frac{|B|^2 x}{\sqrt{w}} + \frac{A|B|y}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} + \frac{A^2 |B|x}{|B|\sqrt{w}} - \frac{A|B|y}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \\ &= \frac{B^2 x + A^2 x}{\sqrt{w}} \\ &= \sqrt{wx} \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mu(x, y) \times p &= \left( \frac{|B|x}{\sqrt{w}} + \frac{Ay}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-ABx}{|B|\sqrt{w}} + \frac{By}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \right) \times \left( |B|, -A \frac{|B|}{B}, 0 \right) \\ &= \left( A \frac{|B|}{B} \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, |B| \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, -A \frac{|B|}{B} \left[ \frac{|B|x}{\sqrt{w}} + \frac{Ay}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] - |B| \left[ \frac{-ABx}{|B|\sqrt{w}} + \frac{By}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( A \frac{|B|}{B} \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, |B| \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, -\frac{ABx}{\sqrt{w}} - \frac{A^2|B|y}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} + \frac{ABx}{\sqrt{w}} - \frac{B|B|y}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right) \\
&= \left( A \frac{|B|}{B} \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, |B| \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, -\frac{(A^2|B|y + B^2|B|y)}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right) \\
&= \left( A \frac{|B|}{B} \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, |B| \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, -\frac{(A^2|B|y + B^2|B|y)}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right) \\
&= \left( A \frac{|B|}{B} \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, |B| \frac{y\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}, -\frac{\sqrt{w}|B|y}{B\sqrt{1+w}} \right) \\
&= \frac{y|B|\sqrt{w}}{B\sqrt{1+w}}(A, B, -1)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|\mu(x, y) \times p\| &= \left\| \frac{y|B|\sqrt{w}}{B\sqrt{1+w}}(A, B, -1) \right\| = \left| \frac{y\sqrt{w}}{B\sqrt{1+w}} \right| |B| \sqrt{A^2 + B^2 + 1} \\
&= |y\sqrt{w}|
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Además, por la definición de  $\kappa$  en (2.2.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{(\mu_2(x, y) p_1 - \mu_1(x, y) p_2) B}{|\mu_2(x, y) p_1 - \mu_1(x, y) p_2| |B|} \\
&= \frac{\left( \left[ \frac{-ABx}{|B|\sqrt{w}} + \frac{By}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] |B| - \left[ \frac{|B|x}{\sqrt{w}} + \frac{Ay}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] \left[ -A \frac{|B|}{B} \right] \right) B}{\left| \left[ \frac{-ABx}{|B|\sqrt{w}} + \frac{By}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] |B| - \left[ \frac{|B|x}{\sqrt{w}} + \frac{Ay}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] \left[ -A \frac{|B|}{B} \right] \right| |B|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left( \left[ \frac{-ABx}{\sqrt{w}} + \frac{B|B|y}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] + \left[ \frac{ABx}{\sqrt{w}} + \frac{A^2|B|y}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] \right) B}{\left| \left[ \frac{-ABx}{\sqrt{w}} + \frac{B|B|y}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] + \left[ \frac{ABx}{\sqrt{w}} + \frac{A^2|B|y}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right] \right| |B|} \\
&= \frac{\left( \frac{B^2|B|y + A^2|B|y}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right) B}{\left| \frac{B^2|B|y + A^2|B|y}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right| |B|} \\
&= \frac{\left( \frac{w|B|y}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right) B}{\left| \frac{w|B|y}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right| |B|} \\
&= \frac{\left( \frac{|B|y}{B} \right) B}{\left| \frac{|B|y}{B} \right| |B|} = \frac{y}{|y|} \tag{2.2.27}
\end{aligned}$$

Analizando cada componente de  $\lambda(\mu(x, y))$ , reemplazando (2.2.24), (2.2.25), (2.2.26), (2.2.27) en (2.2.23)

$$\lambda_1(\mu(x, y)) = \frac{\mu(x, y) \cdot p}{\|p\|} = \frac{\sqrt{wx}}{\|p\|} = x$$

$$\lambda_2(\mu(x, y)) = \frac{\|\mu(x, y) \times p\|}{\|p\|} \kappa = \frac{|y\sqrt{w}|}{\|p\|} \frac{y}{|y|} = y$$

por lo que

$$\lambda(\mu(x, y)) = (x, y)$$

$$\lambda \circ \mu = i_{\mathbb{R}^2} . \tag{2.2.28}$$

de (2.2.22), (2.2.28) se concluye que

$$\mu = \lambda^{-1}$$

**Teorema 2.37.**

La curvatura de un camino  $\alpha(t)$  es invariante ante las rotaciones especiales  $\lambda$  y  $\mu$ .

**Demostración:**

Se deben notar que tanto  $\lambda$  como  $\mu$  son transformaciones lineales, basta probar cualquiera de ellas. Sea  $\Psi(t)$  de clase  $C^2$  una curva en el plano de curvatura  $k(t)$  y  $\mu(\Psi(t)) = \bar{\Psi}(t)$  entonces del Teorema 2.12. se tiene que la curvatura  $\bar{k}(t)$  de  $\bar{\Psi}(t)$  está dada

por 
$$\bar{k}(t) = \frac{\|\bar{\Psi}'(t) \times \bar{\Psi}''(t)\|}{\|\bar{\Psi}'(t)\|^3} \quad y$$

$$\mu(\Psi_1, \Psi_2) = \left( \frac{|B|}{\sqrt{w}} \Psi_1(t) + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \Psi_2(t), \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} \Psi_1(t) + \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \Psi_2(t), \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \Psi_2(t) \right)$$

de donde para simplificar los pasos se hace  $a = \frac{|B|}{\sqrt{w}}$ ,  $b = \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}$ ,  $c = \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}}$ ,

$d = \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}$ ,  $e = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}$  entonces derivando

$$\bar{\Psi}(t) = (a\Psi_1(t) + b\Psi_2(t), c\Psi_1(t) + d\Psi_2(t), e\Psi_2(t))$$

$$\bar{\Psi}'(t) = (a\Psi_1'(t) + b\Psi_2'(t), c\Psi_1'(t) + d\Psi_2'(t), e\Psi_2'(t))$$

$$\bar{\Psi}''(t) = (a\Psi_1''(t) + b\Psi_2''(t), c\Psi_1''(t) + d\Psi_2''(t), e\Psi_2''(t))$$

luego

$$\bar{\Psi}'(t) \times \bar{\Psi}''(t) = (ec[\Psi_1' \Psi_2'' - \Psi_1'' \Psi_2'], -eb[\Psi_1' \Psi_2'' - \Psi_1'' \Psi_2'], (ad - bc)[\Psi_1' \Psi_2'' - \Psi_1'' \Psi_2'])$$

tomando norma  $\|\bar{\Psi}'(t) \times \bar{\Psi}''(t)\| = |\Psi'_1 \Psi''_2 - \Psi''_1 \Psi'_2| \| (ec, -eb, ad - bc) \|$  y operando

$\| (ec, -ea, ad - bc) \|$  y teniendo en cuenta que  $ad - bc = \frac{B}{|B|\sqrt{1+w}}$  se obtiene

$$\| (ec, -ea, ad - bc) \|^2 = \left( \frac{-AB}{|B|\sqrt{1+w}} \right)^2 + \left( \frac{-|B|}{\sqrt{1+w}} \right)^2 + \left( \frac{B}{|B|\sqrt{1+w}} \right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + 1}{1+w} = 1$$

$$\|\bar{\Psi}'(t) \times \bar{\Psi}''(t)\| = |\Psi'_1 \Psi''_2 - \Psi''_1 \Psi'_2|$$

Por otro lado, observe que  $a^2 + c^2 = 1$ ,  $b^2 + d^2 + e^2 = 1$  y  $ab + cd = 0$  teniendo esto en cuenta

$$\|\bar{\Psi}'(t)\|^2 = (a^2 \Psi_1'^2 + 2ab \Psi_1' \Psi_2' + b^2 \Psi_2'^2) + (c^2 \Psi_1'^2 + 2cd \Psi_1' \Psi_2' + d^2 \Psi_2'^2) + e^2 \Psi_2'^2$$

$$\|\bar{\Psi}'(t)\|^2 = \Psi_1'^2 + \Psi_2'^2 \text{ por lo que}$$

$$\|\bar{\Psi}'(t)\|^3 = |\Psi_1'^2 + \Psi_2'^2|^{3/2}$$

$$\text{Finalmente } \bar{k}(t) = \frac{\|\bar{\Psi}'(t) \times \bar{\Psi}''(t)\|}{\|\bar{\Psi}'(t)\|^3} = \frac{|\Psi'_1 \Psi''_2 - \Psi''_1 \Psi'_2|}{|\Psi_1'^2 + \Psi_2'^2|^{3/2}} = k(t)$$

## 2.3 Rotaciones en $\mathbb{R}^n$

### 2.3.1 Rotaciones en $\mathbb{R}^2$

Dado un vector  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  en el sistema XY. Si  $\theta > 0$  entonces las coordenadas de  $p' = (x', y')$  el vector que se obtiene al rotar  $p$  un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario alrededor del origen. Se cumple que

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

La relación anterior puede expresarse en forma matricial del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matriz

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

es invertible para todo  $\theta$  real, se verifica que  $\det R(\theta) = 1$  y  $R^{-1}(\theta) = R(\theta)^T$ . Una matriz que cumple esta segunda igualdad es llamada matriz ortogonal y si verifica ambas se llama matriz de rotación. Si  $R(\theta)$ ,  $R(\theta_1)$  y  $R(\theta_2)$  son matrices de rotación entonces se cumple

i)  $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$

ii)  $R(\theta + 2k\pi) = R(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

iii)  $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$

iv)  $R(0) = I$

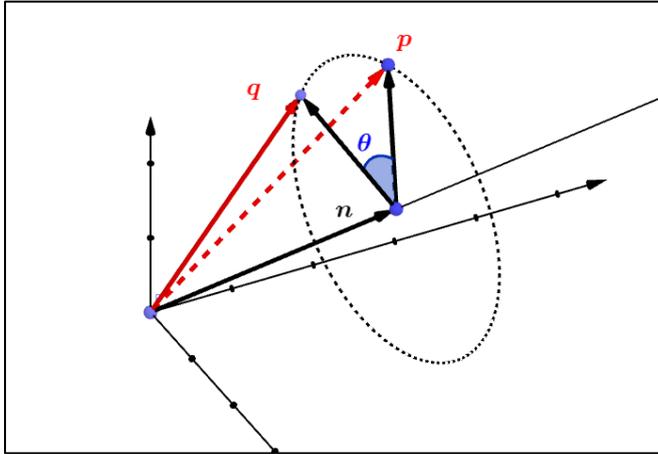
Con la multiplicación de matrices y con las igualdades  $R(0) = I$ ,  $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$  el conjunto de todas las matrices de rotación formará una estructura algebraica denominada grupo.

### 2.3.2 Rotaciones en $\mathbb{R}^3$

En  $\mathbb{R}^3$  las rotaciones se dan respecto a un eje, considere  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  un vector el cual debe ser rotado un ángulo  $\theta$  alrededor de un eje de giro o eje de rotación que pasa por el origen, digamos  $n$ .

**Figura 10.**

*Rotación de un vector  $p$  alrededor de  $n$  en sentido antihorario*



La rotación es tal que se respetará la regla de la mano derecha rotando en sentido antihorario. Se busca una matriz de orden  $3 \times 3$  denotada por  $R(n, \theta)$  de tal forma que  $p' = R(n, \theta)p$ . Algunas de las propiedades que se espera que satisfaga dicha matriz son similares para el caso de dos dimensiones.

- i)  $R(n, \theta + 2k\pi) = R(n, \theta)$
- ii)  $R(n, \theta)^{-1} = R(n, -\theta) = R(-n, \theta)$  ( 2.3.1)
- iii)  $R(n, 0) = I$

La igualdad  $R(n, -\theta) = R(-n, \theta)$  en ii) nos dice que rotar  $p$  en sentido antihorario un ángulo  $-\theta$  sobre  $n$ , es lo mismo que rotar el vector  $p$  alrededor de  $-n$  un ángulo  $\theta$ . Debe observarse que  $R(n, \theta_1)R(n, \theta_2) = R(n, \theta_1 + \theta_2)$  representa dos rotaciones sobre el mismo eje de giro  $n$  con ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ .

La condición i) dice que gira ángulos superiores a  $2\pi$  pueden simplificarse, en realidad puede restringirse solo hasta  $[0, \pi]$  gracias a la condición ii). Y la condición iii) dice que rotar

un ángulo  $\theta$  es mantener fijo el vector  $p$ . Como se verá más adelante, existen tres matrices importantes que nos permitirán descomponer cada matriz de rotación en  $\mathbb{R}^3$  además la matriz buscada  $R(n, \theta)$  vendrá dada por la fórmula de rotación de Rodrigues.

### 2.3.3 Los ángulos de Euler

Como caso particular a las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  tenemos las rotaciones alrededor de los ejes coordenados, es decir considerando  $n = i, j, k$  los vectores canónicos. Las matrices de rotación asociadas a estos ejes las denotamos por  $R_x(\alpha)$ ,  $R_y(\beta)$  y  $R_z(\theta)$  están dadas por

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Slabaugh, 1999).

No es de sorprender que estas matrices guarden una relación con las matrices de rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  pues estas pueden interpretarse como rotaciones alrededor del eje  $Z$ . Los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\theta$  son conocidos como los ángulos de Euler. Es posible componer tres rotaciones sucesivas  $R = R_z(\theta)R_y(\beta)R_x(\alpha)$ , aunque debe tenerse cuidado con el orden pues en general las matrices no conmutan. Más adelante se verá que toda matriz de rotación  $R$  siempre puede descomponerse en un producto  $R = R_z(\theta)R_y(\beta)R_x(\alpha)$  para ciertos  $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$  aunque esta descomposición no es única.

### 2.3.4 La fórmula de rotación de Rodrigues

En la sección anterior no se mostró que forma debía tener la matriz en  $\mathbb{R}^3$  buscada, la respuesta a esta incógnita nos la dará la fórmula de rotación de Rodrigues. El eje de rotación puede considerarse por simplicidad unitario ya que solo importa el sentido de la rotación y no

su magnitud. Así pues, en un espacio tridimensional una rotación quedará definida en base a un vector unitario  $n$  y un número real  $\theta$ .

El siguiente resultado se debe a Euler quién lo descubrió en 1775 haciendo uso de los cosenos directores de un vector unitario, y posteriormente descubierto por Olinde Rodrigues en 1840. (Dai, 2015)

**Teorema 2.38. (Fórmula de rotación de Rodrigues)**

Sea  $n \in \mathbb{R}^3$  un vector unitario, entonces la matriz de rotación sobre  $\mathbb{R}^3$  es una transformación lineal dada por

$$R(n, \theta) = I + (\sin \theta)\Lambda_n + (1 - \cos \theta)\Lambda_n^2$$

donde  $\Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Muchas veces se escribe también de manera equivalente gracias a la **Proposición 2.20**.

$$R(n, \theta) = \cos \theta I + (1 - \cos \theta)\text{proy}_n + (\sin \theta)\Lambda_n$$

antes de demostrar este teorema puede verificarse rápidamente que  $R(n, \theta)$  dado por el teorema satisface todas las condiciones ( 2.3.1) probemos la condición ii), se tiene que

$$R(n, \theta) = I + (\sin \theta)\Lambda_n + (1 - \cos \theta)\Lambda_n^2$$

entonces

$$R(n, -\theta) = I - (\sin \theta)\Lambda_n + (1 - \cos \theta)\Lambda_n^2$$

$$\begin{aligned} R(n, \theta)R(n, -\theta) &= \left( I + (\sin \theta)\Lambda_n + (1 - \cos \theta)\Lambda_n^2 \right) \left( I - (\sin \theta)\Lambda_n + (1 - \cos \theta)\Lambda_n^2 \right) \\ &= I + \sin \theta \Lambda_n + (1 - \cos \theta)\Lambda_n^2 - \sin \theta \Lambda_n - \sin^2 \theta \Lambda_n^2 - \sin \theta (1 - \cos \theta)\Lambda_n^3 \\ &\quad + (1 - \cos \theta)\Lambda_n^2 + \sin \theta (1 - \cos \theta)\Lambda_n^3 + (1 - \cos \theta)^2 \Lambda_n^4 \end{aligned}$$

usando la Proposición 2.20.

$$R(n, \theta)R(n, -\theta) = I + (2 - 2 \cos \theta - \sin^2 \theta) \Lambda_n^2 + (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) (-\Lambda_n^2) = I$$

del mismo modo  $R(n, -\theta)R(n, \theta) = I$  y por tanto  $R(n, \theta)^{-1} = R(n, -\theta)$

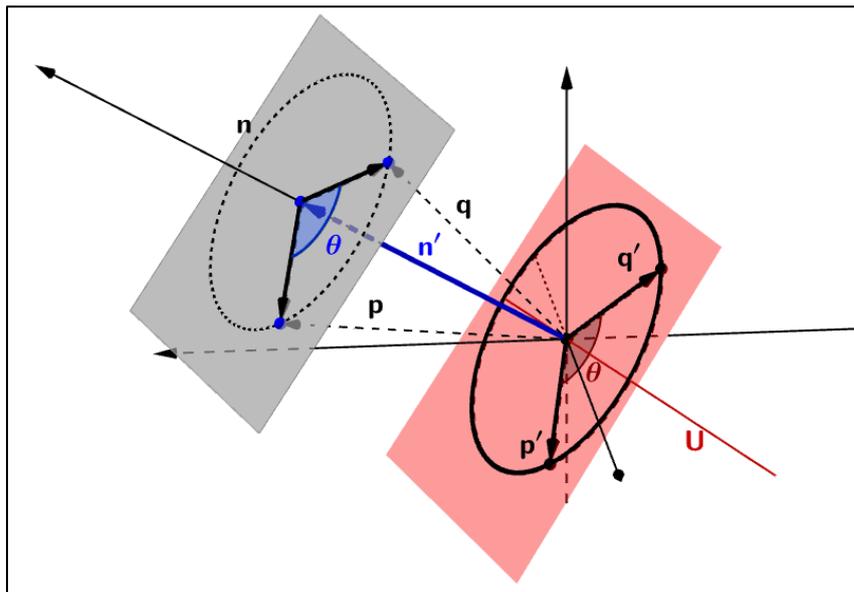
Las otras dos condiciones se verifican inmediatamente. Ahora se dará una demostración alternativa para la fórmula de rotación Rodrigues en base a las rotaciones especiales.

**Demostración: (Fórmula de rotación de Rodrigues).**

Consideremos el siguiente gráfico

**Figura 11.**

*Traslación del plano de rotación*



*Nota.* En la figura se está trasladando el plano de rotación hacia el origen pues es aquí donde se definieron las rotaciones especiales  $\lambda$  y  $\mu$ .

Sea  $\theta$  el ángulo de la rotación,  $\mathbb{P}: z = Ax + By + C$  con  $B \neq 0$  el plano que pasa por  $p$  con vector normal  $n$ , en general  $\mathbb{P}$  no necesariamente pasa por el origen, para simplificar el

problema se trasladará  $\mathbb{P}$  al origen  $\mathbb{P}' : z = Ax + By$ , para ello, según el gráfico si  $n'$  es la proyección de  $p$  sobre  $n$  entonces

$$n' = \text{proy}_n p = (p \cdot n) p = kn$$

donde  $k = p \cdot n$ , también se define

$$\begin{aligned} p' &= p - n' = p - kn \\ q' &= q - n' = q - kn \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Sea  $r$  el radio descrito por la rotación entonces

$$r = \|p - n'\| = \|p - kn\|$$

dado que el arco de circunferencia descrita por la rotación es una curva sobre el plano que pasa por el origen  $\mathbb{P}'$  podemos considerar la ecuación de esta curva como la imagen de una circunferencia  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^2$  mediante la rotación especial  $\mu$ , es decir  $\mu(\alpha(t)) \in \mathbb{P}'$ . Sea

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Para demostrar el teorema se debe obtener un valor adecuado para  $t$  de tal forma que  $\mu(\alpha(t)) = q'$ . De (2.2.16) se sabe que un vector normal al plano  $\mathbb{P}$  está dado por

$$N = \left( -\frac{A}{B}, -1, \frac{1}{B} \right)$$

Luego, como  $n$  es el eje de rotación unitario (también normal al plano) se tiene que

$$n = \frac{N}{\|N\|}$$

por lo que

$$n = (n_1, n_2, n_3) = \left( -\frac{A}{B}, -1, \frac{1}{B} \right) \frac{|B|}{\sqrt{1+w}}$$

donde  $w = A^2 + B^2$ , por consiguiente

$$\begin{cases} n_1 = -\frac{A|B|}{B\sqrt{1+w}} \\ n_2 = -\frac{|B|}{\sqrt{1+w}} \\ n_3 = \frac{|B|}{B\sqrt{1+w}} \end{cases}$$

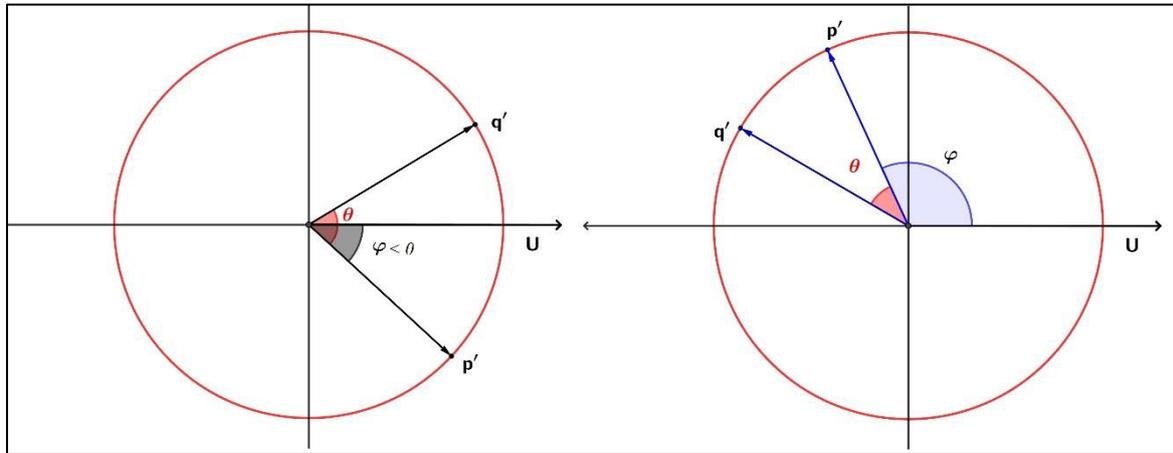
resolviendo para  $A$  y  $B$  se tiene

$$\begin{aligned} A &= -\frac{n_1}{n_3} \\ B &= -\frac{n_2}{n_3} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Sea  $u = \mu(r, 0)$  un vector perteneciente a la recta  $Ax + By = 0$  en el lado principal de la recta  $Ax + By = 0$ . Como  $\theta$  es el ángulo positivo formado entre  $p'$  y  $q'$  pues si pérdida de generalidad se puede considerar una rotación antihoraria, también se define  $\varphi$  como el ángulo que va desde  $u$  hasta  $p'$ , este ángulo puede ser negativo  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , dependiendo de la proyección de  $p$ .

**Figura 12.**

Los dos casos de proyección de  $p$  y  $q$



Del gráfico se observa que en cualquier caso  $t = \theta + \varphi$ , sea  $q^*$  la preimagen de  $q'$  esto es  $\mu(q^*) = q'$  entonces se cumple que

$$q^* = \alpha(t) = \alpha(\theta + \varphi) = (r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi) \quad (2.3.4)$$

Luego

$$q' = \mu(q^*) = \mu(\alpha(\theta + \varphi))$$

por lo que solo queda obtener los valores de  $\sin \varphi$  y  $\cos \varphi$  pues tanto  $r$  y  $\theta$  son valores conocidos.

**Primera parte:** Hallando  $\cos \varphi$

De la **Figura 12** se observa que  $\varphi$  es el ángulo entre  $l$  y  $p'$  entonces

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot p'}{\|u\| \|p'\|}$$

La igualdad anterior es válida para todo  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  como se estudió en la sección (2.2.1). Puesto que  $u$  es el vector que se obtiene al intersecar los planos  $z = 0 \wedge z = Ax + By$  con primera componente positiva, siendo este el lado principal puede considerarse

$$u = \left(1, -\frac{A}{B}, 0\right)$$

$$u = \left(1, -\frac{n_1}{n_2}, 0\right) \quad (2.3.5)$$

teniendo en cuenta que  $\|u\| = \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}{|n_2|}$  y  $r = \|p - kn\|$

$$\cos \varphi = \frac{u \cdot (p - kn)}{\|u\| \|p - kn\|} = \frac{|n_2|}{r \sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \left[ \left(1, -\frac{n_1}{n_2}, 0\right) \cdot (p_1 - kn_1, p_2 - kn_2, p_3 - kn_3) \right]$$

$$\cos \varphi = \frac{|n_2|}{r \sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \left[ p_1 - kn_1 - \frac{p_2 n_1}{n_2} + kn_1 \right] = \frac{[p_1 n_2 - p_2 n_1] |n_2|}{r \sqrt{n_1^2 + n_2^2} n_2}$$

Siempre que  $n_2 \neq 0$ . Recordando la propiedad de las rotaciones negativas  $R(n, \theta) = R(-n, -\theta)$ , puede considerarse  $n_2 < 0$ . (El caso  $n_2 = 0$  no se toma en cuenta ya que esto implicaría que  $B = 0$ ) finalmente

$$\cos \varphi = \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{r \sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (2.3.6)$$

**Segunda parte:** Hallando  $\sin \varphi$

Dado que

$$\sin \varphi = \frac{\|p' \times u\|}{\|p'\| \|u\|} \quad (2.3.7)$$

Siempre que  $\varphi \in [0, \pi]$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
p' \times u &= (p - kn) \times u = (p_1 - kn_1, p_2 - kn_2, p_3 - kn_3) \times \left(1, -\frac{n_1}{n_2}, 0\right) \\
&= \left(\frac{n_1}{n_2} p_3 - k \frac{n_1 n_3}{n_2}, p_3 - kn_3, -\frac{p_1 n_1}{n_2} + \frac{kn_1^2}{n_2} - p_2 + kn_2\right) \\
&= \frac{1}{n_2} (n_1 p_3 - kn_1 n_3, p_3 n_2 - kn_2 n_3, -p_1 n_1 + kn_1^2 - p_2 n_2 + kn_2^2) \\
&= \frac{1}{n_2} (n_1 p_3 - kn_1 n_3, p_3 n_2 - kn_2 n_3, -(p_1 n_1 + p_2 n_2) + k(n_1^2 + n_2^2)) \\
&= \frac{1}{n_2} (n_1 p_3 - kn_1 n_3, p_3 n_2 - kn_2 n_3, -(k - p_3 n_3) + k(1 - n_3^2)) \\
&= \frac{1}{n_2} (n_1 p_3 - kn_1 n_3, p_3 n_2 - kn_2 n_3, p_3 n_3 - kn_3^2) \\
&= \frac{1}{n_2} (n_1 (p_3 - kn_3), n_2 (p_3 - kn_3), n_3 (p_3 - kn_3)) \\
&= \frac{(p_3 - kn_3)}{n_2} (n_1, n_2, n_3)
\end{aligned}$$

Esto implica que  $\|p' \times u\| = \frac{|p_3 - kn_3|}{|n_2|} \|n\|$ , dado que  $n$  es unitario

$$\|p' \times u\| = \frac{|p_3 - kn_3|}{|n_2|}, n_2 \neq 0$$

reemplazando este último resultado en ( 2.3.7)

$$\sin \varphi = \frac{\|p' \times u\|}{\|p'\| \|u\|} = \frac{\|p' \times u\|}{\|p - kn\| \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}{|n_2|}} = \frac{|n_2|}{r \sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \frac{|p_3 - kn_3|}{|n_2|} = \frac{|p_3 - kn_3|}{r \sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

Esta igualdad es solo válida cuando  $\varphi \in [0, \pi]$ . Si  $\varphi \in [-\pi, 0]$  debemos agregar un signo negativo en esta última igualdad. Sea  $c = \pm 1$  el factor de compensación, por lo definido en ( 2.2.6) se tiene que

$$c = \frac{B (u_1 p'_2 - u_2 p'_1)}{|B| |u_1 p'_2 - u_2 p'_1|}$$

reemplazando ( 2.3.2), ( 2.3.3) y ( 2.3.5)

$$\begin{aligned} c &= \frac{B (u_1 p'_2 - u_2 p'_1)}{|B| |u_1 p'_2 - u_2 p'_1|} \\ &= \frac{-n_2 |n_3| (p_2 - kn_2 + (n_1/n_2)(p_1 - kn_1))}{|n_2| n_3 |p_2 - kn_2 + (n_1/n_2)(p_1 - kn_1)|} \\ &= \frac{-n_2 |n_3| (p_2 n_2 - kn_2^2 + p_1 n_1 - kn_1^2) |n_2|}{|n_2| n_3 |p_2 n_2 - kn_2^2 + p_1 n_1 - kn_1^2| n_2} \\ &= \frac{-|n_3| (p_2 n_2 + p_1 n_1 - kn_2^2 - kn_1^2)}{n_3 |p_2 n_2 + p_1 n_1 - kn_2^2 - kn_1^2|} \\ &= \frac{-|n_3| (k - p_3 n_3 - k(n_1^2 + n_2^2))}{n_3 |k - p_3 n_3 - k(n_1^2 + n_2^2)|} \text{ pues } k = n \cdot p \\ &= \frac{-|n_3| (k - p_3 n_3 - k(1 - n_3^2))}{n_3 |k - p_3 n_3 - k(1 - n_3^2)|} \\ &= \frac{-|n_3| (kn_3^2 - p_3 n_3)}{n_3 |kn_3^2 - p_3 n_3|} \\ &= \frac{-(kn_3 - p_3)}{|kn_3 - p_3|} \end{aligned}$$

De este modo

$$\sin \varphi = \frac{|p_3 - kn_3|}{r \sqrt{n_1^2 + n_2^2}} c, \forall \varphi \in [-\pi, \pi]$$

$$\sin \varphi = \frac{|p_3 - kn_3|}{r\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \left( \frac{-(kn_3 - p_3)}{|kn_3 - p_3|} \right)$$

$$\sin \varphi = \frac{p_3 - kn_3}{r\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}, \forall \varphi \in [-\pi, \pi] \quad (2.3.8)$$

de (2.3.6) y (2.3.8) en (2.3.4)

$$\begin{aligned} q^* &= (r \cos \theta \cos \varphi - r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi + r \cos \theta \sin \varphi) \\ &= \left( r \cos \theta \left( \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{r\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) - r \sin \theta \left( \frac{p_3 - kn_3}{r\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right), r \sin \theta \left( \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{r\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) + r \cos \theta \left( \frac{p_3 - kn_3}{r\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) \right) \\ &= \left( \cos \theta \left( \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) - \sin \theta \left( \frac{p_3 - kn_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right), \sin \theta \left( \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) + \cos \theta \left( \frac{p_3 - kn_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) \right) \\ &= (Q_1, Q_2) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_1 &= \cos \theta \left( \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) - \sin \theta \left( \frac{p_3 - kn_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) \\ Q_2 &= \sin \theta \left( \frac{n_1 p_2 - n_2 p_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) + \cos \theta \left( \frac{p_3 - kn_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) \end{aligned}$$

dado que  $q' = \mu(q^*) = \mu(Q_1, Q_2)$  se tendrá

$$\begin{aligned} q'_1 &= \frac{|B|}{\sqrt{w}} Q_1 + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} Q_2 \\ q'_2 &= \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} Q_1 + \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} Q_2 \\ q'_3 &= \left[ \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \right] Q_2 \end{aligned}$$

donde

$$w = A^2 + B^2 = \left(\frac{-n_1}{n_3}\right)^2 + \left(\frac{-n_2}{n_3}\right)^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{n_3^2}$$

luego

$$\sqrt{w} = \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}{|n_3|} \wedge \sqrt{1+w} = \frac{1}{|n_3|}$$

Hallando  $q'_1$

$$q'_1 = \frac{|B|}{\sqrt{w}} Q_1 + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} Q_2$$

$$q'_1 = \frac{|B|}{\sqrt{w}} \left[ \frac{\cos \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) - \sin \theta (p_3 - kn_3)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right] + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\sin \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) + \cos \theta (p_3 - kn_3)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right]$$

$$q'_1 = \frac{|B|}{\sqrt{w}} \left[ \frac{\cos \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) - \sin \theta (p_3 - kn_3)}{|n_3| \sqrt{w}} \right] + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{\sin \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) + \cos \theta (p_3 - kn_3)}{|n_3| \sqrt{w}} \right]$$

$$q'_1 = \left| \frac{-n_2}{n_3} \right| \frac{1}{|w| |n_3|} \left[ \cos \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) - \sin \theta (p_3 - kn_3) \right] + \left( \frac{-n_1}{n_3} \right) \frac{1}{w} \left[ \sin \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) + \cos \theta (p_3 - kn_3) \right]$$

$$q'_1 = \frac{|n_2|}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ \cos \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) - \sin \theta (p_3 - kn_3) \right] - \frac{n_1 n_3}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ \sin \theta (n_1 p_2 - n_2 p_1) + \cos \theta (p_3 - kn_3) \right]$$

$$q'_1 = \frac{\cos \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ |n_2| (n_1 p_2 - n_2 p_1) - n_1 n_3 (p_3 - kn_3) \right] + \frac{\sin \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ -|n_2| (p_3 - kn_3) - n_1 n_3 (n_1 p_2 - n_2 p_1) \right]$$

puesto que  $n_2 < 0$

$$q'_1 = \frac{\cos \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ -n_1 n_2 p_2 + n_2^2 p_1 - n_1 n_3 p_3 + k n_1 n_3^2 \right] + \frac{\sin \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ n_2 p_3 - k n_2 n_3 - n_1^2 n_3 p_2 + n_1 n_3 n_2 p_1 \right]$$

$$q'_1 = \frac{\cos \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ -n_1 (n_2 p_2 + n_3 p_3) + n_2^2 p_1 + k n_1 n_3^2 \right] \\ + \frac{\sin \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ n_2 p_3 - (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3) n_2 n_3 - n_1^2 n_3 p_2 + n_1 n_3 n_2 p_1 \right]$$

$$q'_1 = \frac{\cos \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ -n_1 (k - n_1 p_1) + n_2^2 p_1 + k n_1 n_3^2 \right] \\ + \frac{\sin \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ n_2 p_3 - n_1 n_2 n_3 p_1 - n_2^2 n_3 p_2 - n_2 n_3^2 p_3 - n_1^2 n_3 p_2 + n_1 n_3 n_2 p_1 \right]$$

pues  $k = n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3$

$$q'_1 = \frac{\cos \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ -k n_1 + n_1^2 p_1 + n_2^2 p_1 + k n_1 n_3^2 \right] \\ + \frac{\sin \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ n_2 p_3 - n_1 n_2 n_3 p_1 - n_2^2 n_3 p_2 - n_2 n_3^2 p_3 - n_1^2 n_3 p_2 + n_1 n_2 n_3 p_1 \right]$$

$$q'_1 = \frac{\cos \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ p_1 (n_1^2 + n_2^2) - k n_1 (1 - n_3^2) \right] + \frac{\sin \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ (1 - n_3^2) n_2 p_3 - (n_1^2 + n_2^2) n_3 p_2 \right]$$

$$q'_1 = \frac{\cos \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ p_1 (n_1^2 + n_2^2) - k n_1 (1 - n_3^2) \right] + \frac{\sin \theta}{(n_1^2 + n_2^2)} \left[ (1 - n_3^2) n_2 p_3 - (n_1^2 + n_2^2) n_3 p_2 \right]$$

Como  $\|n\| = 1$  se tiene que  $1 - n_3^2 = n_1^2 + n_2^2$  luego

$$q'_1 = \cos \theta [p_1 - k n_1] + \sin \theta [n_2 p_3 - n_3 p_2]$$

del mismo modo se obtiene

$$q'_2 = \cos \theta [p_2 - k n_2] + \sin \theta [n_3 p_1 - n_1 p_3]$$

$$q'_3 = \cos \theta [p_3 - k n_3] + \sin \theta [n_1 p_2 - n_2 p_1]$$

de esta manera

$$q' = \cos \theta (p_1 - kn_1, p_2 - kn_2, p_3 - kn_3) + \sin \theta [(n_2 p_3 - n_3 p_2, n_3 p_1 - n_1 p_3, n_1 p_2 - n_2 p_1)]$$

$$q' = \cos \theta (p - kn) + \sin \theta (n \times p) \quad (2.3.9)$$

reemplazando (2.3.9) en (2.3.2)

$$q' = q - kn = \cos \theta (p - kn) + \sin \theta (n \times p)$$

$$q = \cos \theta (p - kn) - (p - kn) + p + \sin \theta (n \times p)$$

$$q = p + (\cos \theta - 1)(p - kn) + \sin \theta (n \times p)$$

$$q = p + (\cos \theta - 1)p - (\cos \theta - 1)kn + \sin \theta (n \times p)$$

$$q = \cos \theta p + (1 - \cos \theta)kn + \sin \theta (n \times p)$$

$$q = R(n, \theta)p = [\cos \theta I + (1 - \cos \theta) \text{proy}_n + (\sin \theta) \Lambda_n] p$$

equivalentemente

$$q = R(n, \theta)p = [I + (1 - \cos \theta) \Lambda_n^2 + \sin \theta \Lambda_n] p$$

$$R(n, \theta) = I + \sin \theta \Lambda_n + (1 - \cos \theta) \Lambda_n^2 \quad (2.3.10)$$

lo que completa la demostración.

### Proposición 2.39.

Sea  $R(n, \theta)$  la matriz de rotación de Rodrigues entonces  $\text{Tr}(R(n, \theta)) = 1 + 2 \cos \theta$  y

$$2n \sin \theta = (R_{32} - R_{23}, R_{13} - R_{31}, R_{21} - R_{12}). \quad (\text{Three-Dimensional Rotation Matrices, 2012}).$$

**Demostración:**

Puesto que  $R(n, \theta) = I + (1 - \cos \theta) \Lambda_n^2 + \sin \theta \Lambda_n$  se tiene que

$$R(n, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(n, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta + n_1^2 (1 - \cos \theta) & n_1 n_2 (1 - \cos \theta) - n_3 \sin \theta & n_1 n_3 (1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2 (1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta & \cos \theta + n_2^2 (1 - \cos \theta) & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) - n_1 \sin \theta \\ n_1 n_3 (1 - \cos \theta) - n_2 \sin \theta & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta & \cos \theta + n_3^2 (1 - \cos \theta) \end{pmatrix}$$

de donde

$$\text{Tr}(R(n, \theta)) = 3 \cos \theta + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)(1 - \cos \theta) = 1 + 2 \cos \theta$$

por otro lado, se observa que

$$R_{32} - R_{23} = n_2 n_3 (1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta - n_2 n_3 (1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta = 2n_1 \sin \theta$$

$$R_{13} - R_{31} = n_1 n_3 (1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta - n_1 n_3 (1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta = 2n_2 \sin \theta$$

$$R_{21} - R_{12} = n_1 n_2 (1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta - n_1 n_2 (1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta = 2n_3 \sin \theta$$

$$2n \sin \theta = (R_{32} - R_{23}, R_{13} - R_{31}, R_{21} - R_{12})$$

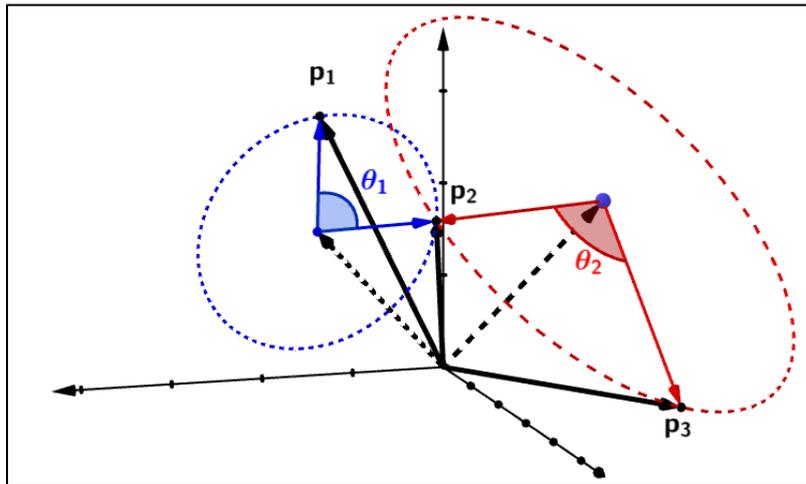
**2.3.5 El vector de Rodrigues-Gibbs y composición finita de rotaciones**

Luego de presentar la fórmula de Rodrigues para la rotación de vectores se podría pensar que realizar dos rotaciones sucesivas en torno a dos ejes  $n_1$  y  $n_2$  con ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$

es inmediata, es decir se necesita calcular la primera rotación de un vector no nulo  $p$  dada por  $R(n_2, \theta_2)p$ , enseguida se calcula la segunda rotación  $R(n_1, \theta_1)[R(n_2, \theta_2)p]$ .

**Figura 13.**

*Composición de dos rotaciones sucesivas en torno a diferentes ejes*



Esto implicaría calcular  $R(n_1, \theta_1)R(n_2, \theta_2)p_1 = R(n_1, \theta_1)p_2 = p_3$ , lo que llevaría a un cálculo extenso para hallar  $p_3$ , y más aún para una cantidad finita de composiciones pues solo basta ver de (2.3.10), que  $R(n, \theta)$  se puede expresar matricialmente como

$$R(n, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta + n_1^2 (1 - \cos \theta) & n_1 n_2 (1 - \cos \theta) - n_3 \sin \theta & n_1 n_3 (1 - \cos \theta) + n_2 \sin \theta \\ n_1 n_2 (1 - \cos \theta) + n_3 \sin \theta & \cos \theta + n_2^2 (1 - \cos \theta) & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) - n_1 \sin \theta \\ n_1 n_3 (1 - \cos \theta) - n_2 \sin \theta & n_2 n_3 (1 - \cos \theta) + n_1 \sin \theta & \cos \theta + n_3^2 (1 - \cos \theta) \end{pmatrix} \quad (2.3.11)$$

Puesto  $R(n, \theta)$  es una matriz de rotación, tiene sentido esperar que el producto de  $R(n_1, \theta_1)R(n_2, \theta_2)$  sea otra matriz de rotación  $R(n, \theta)$  tal que  $R(n, \theta) = R(n_1, \theta_1)R(n_2, \theta_2)$  por lo que debe existir una relación entre  $n, \theta$  con  $n_1, n_2, \theta_1$  y  $\theta_2$ .

La siguiente definición se debe a Willard Gibbs quién introdujo un vector usando la mitad de la tangente del ángulo de rotación, que llamó “vector semitangente”. Dependiendo de

la fuente que se consulte, actualmente este vector es llamado vector de Rodrigues o vector de Gibbs. (Valdenebro, 2016)

**Definición 2.40.**

Sea  $n \in \mathbb{R}^3$  un vector no nulo tal que  $\|n\| = 1$  y  $\theta \in [0, \pi)$  entonces se llamará vector de Cayley–Gibbs–Rodrigues

$$\tau(n, \theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)n$$

(Valdenebro, 2016)

Con esta definición el vector  $\tau$  ya no es unitario, sino que pose norma  $\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$ . Si no hay confusión solo se representará el vector de Gibbs–Rodrigues por  $\tau$  y no por  $\tau(n, \theta)$ .

**Lema 2.41.**

Sea  $n \in \mathbb{R}^3$  un vector unitario no nulo y  $\theta \in [0, \pi)$  un ángulo de rotación, si  $p \in \mathbb{R}^3$  entonces

$$R(n, \theta) = I + \frac{2}{1 + \tau \cdot \tau} \left( \Lambda_\tau + \Lambda_\tau^2 \right) = R(\tau)$$

(Valdenebro, 2016)

**Demostración:**

Puesto que  $\Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$  entonces  $t\Lambda_n = \begin{pmatrix} 0 & -tn_3 & tn_2 \\ tn_3 & 0 & -tn_1 \\ -tn_2 & tn_1 & 0 \end{pmatrix} = \Lambda_{t \cdot n}$ , por la

fórmula de rotación de Rodrigues ( 2.3.10) se tiene

$$R(n, \theta) = I + \sin \theta \Lambda_n + (1 - \cos \theta) \Lambda_n^2$$

$$R(n, \theta) = I + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Lambda_n + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Lambda_n^2$$

$$R(n, \theta) = I + 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Lambda_n + 2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Lambda_n^2$$

$$R(n, \theta) = I + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \Lambda_n + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \Lambda_n^2 \right]$$

$$R(n, \theta) = I + \frac{2}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ \Lambda_n \tan(\theta/2) + \left( \Lambda_n \tan(\theta/2) \right)^2 \right]$$

$$R(n, \theta) = I + \frac{2}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ \Lambda_\tau + \Lambda_\tau^2 \right] = I + \frac{2}{1 + \tau \cdot \tau} \left[ \Lambda_\tau + \Lambda_\tau^2 \right].$$

Con esta nueva representación para rotaciones la expresión  $R(\tau)$  será más amigable al momento de componer dos rotaciones sin necesidad de pasar dos veces por la fórmula (2.3.11), esto se ve en el siguiente teorema.

**Teorema 2.42. (Teorema de la composición de rotaciones)**

Si  $R(\tau_1)R(\tau_2) = R(\tau)$  entonces

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \times \tau_2}{1 - \tau_1 \cdot \tau_2}$$

(Pujol, 2013)

**Demostración:**

Se sabe de la **Proposición 2.39.** cómo calcular  $n$  y  $\theta$  a partir de  $R(n, \theta)$ . Sea

$\tau_1 = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)a$  ,  $\tau_2 = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)b$  y  $\tau = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)n$  con  $\|a\| = \|b\| = \|n\| = 1$ , dado  $p \in \mathbb{R}^3$  un vector no

nulo, si

$$p' = R(n, \theta)p_1 = R(a, \alpha)R(b, \beta)p_1$$

Denotemos por  $R_{ij}$  al elemento  $ij$  de  $R(n, \theta)$  entonces por (2.3.11) y por la Proposición

2.30.

$$R_{ij} = R_{ij}(n, \theta) = \cos(\theta)\delta_{ij} + (1 - \cos \theta)n_i n_j - \sin(\theta)\delta_{ijr} n_r \quad (2.3.12)$$

con  $r \notin \{i, j\}$ , por las propiedades de las constantes  $\delta_{ij}$  y  $\delta_{ijr}$  en el capítulo 2.1.4. Del

producto de matrices se tiene

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^3 R_{ik}(a, \alpha)R_{kj}(b, \beta)$$

la igualdad (2.3.12) es válida para cualquier  $a, b, \alpha$  y  $\beta$  por tanto

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \left[ \cos(\alpha)\delta_{ik} + (1 - \cos \alpha)a_i a_k - \sin(\alpha)\delta_{ikp} a_p \right] \left[ \cos(\beta)\delta_{kj} + (1 - \cos \beta)b_k b_j - \sin(\beta)\delta_{kjm} b_m \right] \\ R_{ij} &= \sum_{k=1}^3 \left[ \cos(\alpha)\cos(\beta)\delta_{ik}\delta_{kj} + \cos(\alpha)(1 - \cos \beta)\delta_{ik}b_k b_j - \cos(\alpha)\sin(\beta)\delta_{ik}\delta_{kjm} b_m \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos \alpha)\cos(\beta)\delta_{kj}a_i a_k + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)a_i a_k b_k b_j - (1 - \cos \alpha)\sin(\beta)\delta_{kjm} b_m a_i a_k \right. \\ &\quad \left. - \sin(\alpha)\cos(\beta)\delta_{kj}\delta_{ikp} a_p - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta)b_k b_j \delta_{ikp} a_p + \sin(\alpha)\sin(\beta)\delta_{ikp}\delta_{kjm} b_m a_p \right] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Agrupando y teniendo en cuenta las propiedades en la **Proposición 2.29.** reemplazando

i) – viii) en (2.3.13)

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \cos(\alpha)\cos(\beta)\delta_{ij} + \cos(\alpha)(1 - \cos \beta)b_i b_j + (1 - \cos \alpha)\cos(\beta)a_i a_j \\ &\quad + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)a_i b_j (a \cdot b) - [\cos(\alpha)\sin(\beta)b_m + \sin(\alpha)\cos(\beta)a_m] \delta_{ijm} \\ &\quad - (1 - \cos \alpha)\sin(\beta)a_i (b \times a)_j - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta)b_j (b \times a)_i + \sin(\alpha)\sin(\beta) [b_i a_j - \delta_{ij} (a \cdot b)] \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

para hallar la traza de  $R(n, \theta)$  se hace  $i = j$  en esta última expresión

$$\begin{aligned} R_{ii} &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)(1 - \cos \beta)b_i^2 + (1 - \cos \alpha)\cos(\beta)a_i^2 + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)a_i b_i (a \cdot b) \\ &\quad - (1 - \cos \alpha)\sin(\beta)a_i (b \times a)_i - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta)b_i (b \times a)_i + \sin(\alpha)\sin(\beta) [b_i a_i - (a \cdot b)] \end{aligned}$$

sumando desde  $i = 1$  hasta 3 y teniendo en cuenta las propiedades y la hipótesis

$$\begin{aligned} Tr(R(n, \theta)) &= \sum_{i=1}^3 R_{ii} \\ Tr(R(n, \theta)) &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha)(1 - \cos \beta) b_i^2 + (1 - \cos \alpha) \cos(\beta) a_i^2 \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) a_i b_i (a \cdot b) - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) a_i (b \times a)_i \right. \\ &\quad \left. - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) b_i (b \times a)_i + \sin(\alpha) \sin(\beta) [b_i a_i - (a \cdot b)] \right\} \end{aligned}$$

Dado que  $a \cdot (b \times a) = b \cdot (b \times a) = 0$  se tendrá

$$\begin{aligned} Tr(R(n, \theta)) &= 3 \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha)(1 - \cos \beta) \|b\|^2 + (1 - \cos \alpha) \cos(\beta) \|a\|^2 \\ &\quad + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)^2 + \sin(\alpha) \sin(\beta) [(a \cdot b) - 3(a \cdot b)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(R(n, \theta)) &= 3 \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) + \cos(\beta) - 2 \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ &\quad + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)^2 - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)(a \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tr(R(n, \theta)) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) + \cos(\beta) + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)^2 \\ &\quad - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)(a \cdot b) \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Se define  $\Omega$  como

$$\Omega = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)(a \cdot b) \tag{2.3.16}$$

entonces

$$\Omega^2 = 4 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - 8 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)(a \cdot b) + 4 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)(a \cdot b)^2$$

esto es

$$\Omega^2 = (1 + \cos \alpha)(1 + \cos \beta) - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)(a \cdot b) + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)^2$$

de donde

$$\Omega^2 = 1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)^2 - 2 \sin(\alpha) \sin(\beta)(a \cdot b) \quad (2.3.17)$$

reemplazando (2.3.15) en (2.3.17)

$$\Omega^2 = 1 + \text{Tr}(R(n, \theta)) \quad (2.3.18)$$

De la **Proposición 2.39.** en (2.3.18)

$$\Omega^2 = 1 + (1 + 2 \cos \theta) = 2 + 2 \cos \theta = 4 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

si se considera la solución positiva

$$\Omega = 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.3.19)$$

de (2.3.19) en (2.3.16)

$$2 \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) - 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) (a \cdot b) = 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) = \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) (a \cdot b) \quad (2.3.20)$$

Hasta aquí se tiene una relación entre  $\theta$  con  $\alpha, \beta, a, b$ , todavía queda relacionar estos elementos con  $n$ . Por otro lado, de la **Proposición 2.39.** se tiene la relación

$$2n \sin \theta = (R_{32} - R_{23}, R_{13} - R_{31}, R_{21} - R_{12}) \quad (2.3.21)$$

se hallará en forma general  $R_{ij} - R_{ji}$  a partir de (2.3.14) además  $m \neq i, j$

$$\begin{aligned}
R_{ij} - R_{ji} = & \left\{ \cos(\alpha) \cos(\beta) \delta_{ij} + \cos(\alpha)(1 - \cos \beta) b_i b_j + (1 - \cos \alpha) \cos(\beta) a_i a_j \right. \\
& + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) a_i b_j (a \cdot b) - [\cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m] \dot{\delta}_{ijm} \\
& \left. - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) a_i (b \times a)_j - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) b_j (b \times a)_i + \sin(\alpha) \sin(\beta) [b_i a_j - \delta_{ij} (a \cdot b)] \right\} \\
& - \left\{ \cos(\alpha) \cos(\beta) \delta_{ji} + \cos(\alpha)(1 - \cos \beta) b_j b_i + (1 - \cos \alpha) \cos(\beta) a_j a_i \right. \\
& + (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) a_j b_i (a \cdot b) - [\cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m] \dot{\delta}_{jim} \\
& \left. - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) a_j (b \times a)_i - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) b_i (b \times a)_j + \sin(\alpha) \sin(\beta) [b_j a_i - \delta_{ji} (a \cdot b)] \right\}
\end{aligned}$$

Por simetría se eliminan los tres primeros sumandos de  $R_{ij}$  y  $R_{ji}$  luego

$$\begin{aligned}
R_{ij} - R_{ji} = & \left\{ (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) a_i b_j (a \cdot b) - [\cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m] \dot{\delta}_{ijm} \right. \\
& \left. - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) a_i (b \times a)_j - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) b_j (b \times a)_i + \sin(\alpha) \sin(\beta) [b_i a_j - \delta_{ij} (a \cdot b)] \right\} \\
& - \left\{ (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) a_j b_i (a \cdot b) - [\cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m] \dot{\delta}_{jim} \right. \\
& \left. - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) a_j (b \times a)_i - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) b_i (b \times a)_j + \sin(\alpha) \sin(\beta) [b_j a_i - \delta_{ji} (a \cdot b)] \right\}
\end{aligned}$$

agrupando

$$\begin{aligned}
R_{ij} - R_{ji} = & (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b) [a_i b_j - a_j b_i] + [\cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m] [\dot{\delta}_{jim} - \dot{\delta}_{ijm}] \\
& - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) [a_i (b \times a)_j - a_j (b \times a)_i] - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) [b_j (b \times a)_i - b_i (b \times a)_j] \\
& + \sin(\alpha) \sin(\beta) [b_i a_j - b_j a_i]
\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de la **Proposición 2.31.** y teniendo en cuenta que

$$\dot{\delta}_{jim} - \dot{\delta}_{ijm} = 2 \text{ para } (i, j) \in \{(3, 2), (1, 3), (2, 1)\} \text{ con } m \neq i, j$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} - R_{ji} = & (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)(b \times a)_m + 2[\cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m] \\
& - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) [a_m (a \cdot b) - b_m] - \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) [b_m (a \cdot b) - a_m] \\
& + \sin(\alpha) \sin(\beta) [-(b \times a)_m]
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij} - R_{ji} = & (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)(b \times a)_m + 2[\cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m] \\
& + (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) [b_m - a_m (a \cdot b)] + \sin(\alpha)(1 - \cos \beta) [a_m - b_m (a \cdot b)] \\
& - \sin(\alpha) \sin(\beta) (b \times a)_m
\end{aligned}$$

agrupando en dos partes y simplificando cada sumando usando (2.3.16) se tiene

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)(a \cdot b)(b \times a)_m - \sin(\alpha) \sin(\beta)(b \times a)_m \\
&= \left[ 4 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) (a \cdot b) - 4 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) \right] (b \times a)_m \\
&= 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) \left[ 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) (a \cdot b) - 2 \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) \right] (b \times a)_m \\
&= 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) [-\Omega] (b \times a)_m \\
&= 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) [\Omega] (a \times b)_m \\
&= 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) \left[ 2 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] (a \times b)_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad & 2 \left[ \cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m \right] + (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) [b_m - a_m (a \cdot b)] \\
&+ \sin(\alpha) (1 - \cos \beta) [a_m - b_m (a \cdot b)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos(\alpha) \sin(\beta) b_m + 2 \sin(\alpha) \cos(\beta) a_m + b_m (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) \\
&\quad - a_m (a \cdot b) (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) + a_m \sin(\alpha) (1 - \cos \beta) - b_m (a \cdot b) \sin(\alpha) (1 - \cos \beta) \\
&= a_m \left[ 2 \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) (1 - \cos \beta) - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) (a \cdot b) \right] \\
&\quad + b_m \left[ 2 \cos(\alpha) \sin(\beta) + (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) (1 - \cos \beta) (a \cdot b) \right] \\
&= a_m \left[ \sin(\alpha) (1 + \cos \beta) - (1 - \cos \alpha) \sin(\beta) (a \cdot b) \right] + b_m \left[ (1 + \cos \alpha) \sin(\beta) - \sin(\alpha) (1 - \cos \beta) (a \cdot b) \right] \\
&= a_m \left[ 4 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) - 4 \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) (a \cdot b) \right] \\
&\quad + b_m \left[ 4 \cos^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) - 4 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin^2 \left( \frac{\beta}{2} \right) (a \cdot b) \right] \\
&= 2 \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) \left[ 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) a_m + 2 \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) b_m \right] \\
&\quad - 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) (a \cdot b) \left[ 2 \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\beta}{2} \right) a_m + 2 \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{\beta}{2} \right) b_m \right]
\end{aligned}$$

$$= \left[ 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) a_m + 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) b_m \right] \left[ 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) (a \cdot b) \right]$$

reemplazando el valor de  $\Omega$  de (2.3.16)

$$= \left[ 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) a_m + 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) b_m \right] [\Omega]$$

$$= \left[ 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) a_m + 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) b_m \right] \left[ 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

reemplazando los resultados de **i)** y **ii)** en (2.3.22)

$$\begin{aligned} R_{ij} - R_{ji} &= 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \left[ 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] (a \times b)_m \\ &+ \left[ 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) a_m + 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) b_m \right] \left[ 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

puesto que  $m \neq i, j$  se tiene que

Para  $i = 3 \wedge j = 2 \rightarrow m = 1$

$$\begin{aligned} R_{32} - R_{23} &= 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (a \times b)_1 \\ &+ 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) a_1 + 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) b_1 \end{aligned}$$

Para  $i = 1 \wedge j = 3 \rightarrow m = 2$

$$\begin{aligned} R_{13} - R_{31} &= 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (a \times b)_2 \\ &+ 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) a_2 + 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) b_2 \end{aligned}$$

Para  $i = 2 \wedge j = 1 \rightarrow m = 3$

$$R_{21} - R_{12} = 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (a \times b)_3 \\ + 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) a_3 + 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) b_3$$

se sigue de (2.3.21)

$$2n \sin \theta = (R_{32} - R_{23}, R_{13} - R_{31}, R_{21} - R_{12}) \\ = 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (a \times b) + 4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) a + 4 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) b$$

$$n \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) (a \times b) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) a + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) b \quad (2.3.24)$$

dividiendo (2.3.24) y (2.3.20)

$$n \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) (a \times b) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) a + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) b}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) (a \cdot b)}$$

$$n \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) (a \times b) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) a + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) b}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) (a \cdot b)}$$

$$n \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) a + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) b + \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) a\right] \times \left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) b\right]}{1 - \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) a\right] \cdot \left[\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) b\right]}$$

pero  $\tau_1 = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) a$ ,  $\tau_2 = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) b$  y  $\tau = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) n$

Por lo tanto, si  $R(\tau_1)R(\tau_2) = R(\tau)$

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \times \tau_2}{1 - \tau_1 \cdot \tau_2}$$

**Ejemplo 2.43.**

$$\text{Sean } p = (1, 1, 1), a = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right), b = \left( \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right), \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ y } \beta = \frac{\pi}{3}$$

calcule  $R(a, \alpha)R(b, \beta)p$ .

Sea

$$\tau_1 = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)a = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

$$\tau_2 = \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)b = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right) = \frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 3, 2)$$

por el **Teorema 2.42** se tiene que

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \times \tau_2}{1 - \tau_1 \cdot \tau_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3) + \frac{1}{\sqrt{42}}(-1, 3, 2) + \frac{1}{14\sqrt{3}}[(1, 2, 3) \times (-1, 3, 2)]}{1 - \frac{1}{14\sqrt{3}}[(1, 2, 3) \cdot (-1, 3, 2)]}$$

$$\tau = \frac{\sqrt{42}(1, 2, 3) + \sqrt{14}(-1, 3, 2) + (-5, -5, 5)}{14\sqrt{3} - 11}$$

$$\tau = \frac{1}{14\sqrt{3} - 11}(\sqrt{42} - \sqrt{14} - 5, 2\sqrt{42} + 3\sqrt{14} - 5, 3\sqrt{14} + 2\sqrt{14} + 5)$$

$$\tau \approx (-0.170651819347008, 1.448175080130263, 2.409708848769259)$$

luego

$$R(a, \alpha)R(b, \beta)p = R(\tau)p = \left( I + \frac{2}{1 + \tau \cdot \tau} [\Lambda_\tau + \Lambda_\tau^2] \right) p$$

operando obtenemos el aproximado

$$R(\tau)p = (-1.132265680723842, 0.997109263397610, 0.850733533547168)$$

el mismo resultado se obtiene si se calcula primero  $R(b, \beta)p$  y luego  $R(a, \alpha)(R(b, \beta)p)$ .

#### Observación 2.44.

En general se puede componer una cantidad finita de rotaciones, solo queda aplicar el último teorema varias veces.

#### Corolario 2.45.

Sean  $\tau_i = \tan\left(\frac{\theta_i}{2}\right)u_i$  con  $i=1, 2, \dots, n$  las representaciones de Gibbs, siendo  $\theta_i$  un ángulo

de rotación y  $u_i$  su eje de rotación, dado  $p_1 \in \mathbb{R}^3$ , si  $p_{n+1} = R(\tau_1)R(\tau_2)\dots R(\tau_{n-1})R(\tau_n)p$

entonces

$$p_{n+1} = R(\tau_1^*)p$$

Donde

$$\tau_k^* = \begin{cases} \frac{\tau_k + \tau_{k+1}^* + \tau_k \times \tau_{k+1}^*}{1 - \tau_k \cdot \tau_{k+1}^*}, & \text{si } k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \tau_n & \text{si } k = n \end{cases}$$

#### 2.3.6 Generalización la fórmula de rotación de Rodrigues en $\mathbb{R}^n$

En esta sección  $n$  denotará la dimensión del espacio y no un vector como se venía haciendo hasta el momento, esto para evitar confusiones, otra de las razones importantes es que en  $\mathbb{R}^n$  no usaremos directamente un eje de giro sino un hiperplano. En la generalización la fórmula de rotación de Rodrigues para vectores en  $\mathbb{R}^n$  se definirán dos operaciones entre vectores  $n$ -dimensionales, esto se debe a que el producto vectorial que aparece en la fórmula

de Rodrigues solo existe en  $\mathbb{R}^3$  y no es posible extenderla a dimensiones superiores, pero si contaremos con el producto tensorial que tiene una estrecha relación con el producto cruz. Puede decirse que no se trabajará directamente con el eje de rotación  $n$ , sino con un hiperplano al que el eje de rotación es ortogonal; en  $\mathbb{R}^3$  esto sería equivalente a trabajar ya no con  $n$  sino con el plano de rotación. La manera en la que se llevará a cabo el salto a  $n$  dimensiones es mediante la exponencial de matrices. Esto se debe a que existe una relación entre la exponencial de la matriz  $\Lambda_n$  y la rotación de Rodrigues.

**Proposición 2.46.**

Dado  $n \in \mathbb{R}^3$  tal que  $\|n\| = 1$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  entonces

$$R(n, \theta) = \exp(\theta \Lambda_n)$$

(Hanson, 2011).

**Demostración:**

Teniendo en cuenta la definición de la exponencial de matrices y la **Proposición 2.20.**

$$\exp(\theta \Lambda_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\theta \Lambda_n)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta^k (\Lambda_n)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (\Lambda_n)^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (\Lambda_n)^{2k+1}$$

$$\exp(\theta \Lambda_n) = I + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (-1)^k (I - \text{proy}_n) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \Lambda_n$$

$$\exp(\theta \Lambda_n) = I + (I - \text{proy}_n) \left[ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (-1)^k - 1 \right] + \Lambda_n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k$$

$$\exp(\theta \Lambda_n) = I + (I - \text{proy}_n) [\cos \theta - 1] + \Lambda_n \sin \theta$$

$$\exp(\theta \Lambda_n) = R(n, \theta)$$

este es el punto de partida para la siguiente definición.

**Definición 2.47.**

Sean  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vectores  $n$ -dimensionales no nulos, la aplicación

$$\otimes: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$(u, v) \rightarrow u \otimes v = uv^t$$

es llamada **producto tensorial** para vectores  $n$ -dimensionales. (Hanson, 2011).

En forma extendida se puede expresar

$$u \otimes v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

obsérvese que la componente  $ij$  de  $u \otimes v$  es  $u_i v_j$ , es decir

$$(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$$

es claro que el producto tensorial  $\otimes$  no es conmutativo ya que  $u_i v_j \neq v_i u_j$  en general.

**Proposición 2.48.**

Si  $w \in \mathbb{R}^n$  entonces

$$(u \otimes v)(w) = (u \otimes v)w = (v \cdot w)u$$

es una aplicación lineal.

En efecto, sea  $c = (u \otimes v)w$  entonces

$$c_i = \sum_{k=1}^n (u \otimes v)_{ik} w_k = \sum_{k=1}^n u_i v_k w_k = u_i \sum_{k=1}^n v_k w_k = (v \cdot w)u_i$$

$$(u \otimes v)w = (v \cdot w)u$$

La aplicación  $(u \otimes v): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal desde que puede expresarse en términos del producto interior. En efecto,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $\forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\begin{aligned} (u \otimes v)(\alpha w_1 + \beta w_2) &= [v \cdot (\alpha w_1 + \beta w_2)]u \\ &= [\alpha(v \cdot w_1) + \beta(v \cdot w_2)]u \\ &= \alpha(v \cdot w_1)u + \beta(v \cdot w_2)u \\ &= \alpha(u \otimes v)w_1 + \beta(u \otimes v)w_2 \end{aligned}$$

**Definición 2.49.**

Si  $u, v \in \mathbb{R}^n$  son vectores n-dimensionales no nulos, el **producto cuña (wedge product)** de  $u$  y  $v$  está dado por

$$\Lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_{n \times n}$$

$$(u, v) \rightarrow u \Lambda v = u \otimes v - v \otimes u$$

(Hanson, 2011).

Las componentes de  $u \Lambda v$  son de la forma

$$(u \Lambda v)_{ij} = (u \otimes v)_{ij} - (v \otimes u)_{ij} = u_i v_j - v_i u_j \quad (2.3.25)$$

en particular para  $\mathbb{R}^3$ , si  $u = (u_1, u_2, u_3)$  y  $v = (v_1, v_2, v_3)$  entonces

$$u \Lambda v = u \otimes v - v \otimes u = \begin{pmatrix} u_1 v_1 - v_1 u_1 & u_1 v_2 - v_1 u_2 & u_1 v_3 - v_1 u_3 \\ u_2 v_1 - v_2 u_1 & u_2 v_2 - v_2 u_2 & u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 & u_3 v_2 - v_3 u_2 & u_3 v_3 - v_3 u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - v_1 u_2 & u_1 v_3 - v_1 u_3 \\ u_2 v_1 - v_2 u_1 & 0 & u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 & u_3 v_2 - v_3 u_2 & 0 \end{pmatrix}$$

y puesto que  $u \times v = (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - v_3 u_1, u_1 v_2 - v_1 u_2)$

$$u\Lambda v = \begin{pmatrix} 0 & u_1v_2 - v_1u_2 & u_1v_3 - v_1u_3 \\ u_2v_1 - v_2u_1 & 0 & u_2v_3 - v_2u_3 \\ u_3v_1 - v_3u_1 & u_3v_2 - v_3u_2 & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{u \times v} = \Lambda_{-(u \times v)}$$

el producto cuña satisface las siguientes propiedades

i)  $u\Lambda u = 0$

ii)  $u\Lambda v = -v\Lambda u$

iii)  $u^t(v\Lambda w) \neq (u\Lambda v)w$ , no es asociativo

iv)  $u\Lambda(\alpha v) = \alpha(u\Lambda v) = (\alpha u)\Lambda v$

v)  $u\Lambda(v+w) = u\Lambda v + u\Lambda w$  (distributividad)

vi)  $u^t(v\Lambda w) + v^t(w\Lambda u) + w^t(u\Lambda v) = 0$ , (Identidad de Jacobi)

vii)  $r^t(u\Lambda v)s = (r \cdot u)(v \cdot s) - (r \cdot v)(u \cdot s)$ , (Identidad de Lagrange)

viii)  $u^t(u\Lambda v)u = v^t(u\Lambda v)v = 0$

ix)  $u^t(u\Lambda v)v = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2 = |u|^2|v|^2 \sin^2 \theta$

### Demostración de vi)

$$\begin{aligned} u^t(v\Lambda w) + v^t(w\Lambda u) + w^t(u\Lambda v) &= u^t(v \otimes w - w \otimes v) + v^t(w \otimes u - u \otimes w) + w^t(u \otimes v - v \otimes u) \\ &= u^t(vw^t - wv^t) + v^t(wu^t - uw^t) + w^t(uv^t - vu^t) \\ &= u^tvw^t - u^twv^t + v^t wu^t - v^t uw^t + w^t uv^t - w^t vu^t \\ &= (u \cdot v)w^t - (u \cdot w)v^t + (v \cdot w)u^t - (v \cdot u)w^t + (w \cdot u)v^t - (w \cdot v)u^t = 0 \end{aligned}$$

### Demostración de vii)

$$\begin{aligned} r^t(u\Lambda v)s &= r^t(u \otimes v - v \otimes u)s = r^t(uv^t - vu^t)s = r^t uv^t s - r^t vu^t s = (r^t u)(v^t s) - (r^t v)(u^t s) \\ r^t(u\Lambda v)s &= (r \cdot u)(v \cdot s) - (r \cdot v)(u \cdot s) \end{aligned}$$

Las propiedades (viii) y (ix) son consecuencia de (vii).

Se verá ahora que la se puede relacionar la norma matricial

$$\|A\| = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)} \quad (2.3.26)$$

con el seno del ángulo formado por los vectores del producto cuña.

**Proposición 2.50.**

Sean  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vectores no nulos formando un ángulo  $\theta$  entonces

$$\|u \wedge v\| = |u| |v| \sin \theta$$

**Demostración:** Por definición

$$\begin{aligned} \|u \wedge v\|^2 &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u \wedge v)_{ij}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i v_j - v_i u_j)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^2 v_j^2 + v_i^2 u_j^2 - 2u_i u_j v_i v_j) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i^2 v_j^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (v_i^2 u_j^2) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (u_i u_j v_i v_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (u_i^2) \sum_{j=1}^n (v_j^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (u_j^2) \sum_{j=1}^n (v_i^2) - \sum_{i=1}^m (u_i v_i) \sum_{j=1}^n (u_j v_j) \\ &= \frac{1}{2} |u|^2 |v|^2 + \frac{1}{2} |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)(u \cdot v) \\ &= |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2, \text{ usando la propiedad (ix)} \\ &= |u|^2 |v|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

**Lema 2.51.**

Si  $a, b, u, v \in \mathbb{R}^n$  entonces

i)  $tr(u \otimes v) = u \cdot v$

$$\text{ii) } (a \otimes b)(u \otimes v) = (b \cdot u)(a \otimes v)$$

$$\text{iii) } (u \wedge v)^2 = -\|u \wedge v\|^2 \text{ proy}_{uv}$$

$$\text{iv) } \|u \wedge v\|^2 \text{ proy}_{uv} = |v|(u \otimes u) - (u \cdot v)(u \otimes v + v \otimes u) + |u|^2 (v \otimes v)$$

$$\text{v) } (u \wedge v)^3 = -\|u \wedge v\|^2 (u \wedge v)$$

donde  $\|u \wedge v\|$  es la norma definida en (2.3.26). (Hanson, 2011)

### Demostración:

$$\text{i) } \text{tr}(u \otimes v) = \sum_{k=1}^n (u \otimes v)_{ij} = \sum_{k=1}^n u_i v_j = (u \cdot v)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \quad [(a \otimes b)(u \otimes v)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n (a \otimes b)_{ik} (u \otimes v)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_i b_k u_k v_j \\ &= a_i v_j \sum_{k=1}^n b_k u_k \\ &= a_i v_j (b \cdot u) \\ &= (b \cdot u)(a \otimes v)_{ij} \end{aligned}$$

luego  $(a \otimes b)(u \otimes v) = (b \cdot u)(a \otimes v)$

iii) Por lo visto en (2.1.3) se sabe que

$$(\text{proy}_{uv})_{ij} = \frac{1}{\|u \wedge v\|^2} M_{ij}$$

donde  $M_{ij} = |v|^2 u_i u_j - (u \cdot v) v_i u_j - (u \cdot v) u_i v_j + |u|^2 v_i v_j$ , entonces

$$\|u \wedge v\|^2 (\text{proy}_{uv})_{ij} = |v|^2 u_i u_j - (u \cdot v) v_i u_j - (u \cdot v) u_i v_j + |u|^2 v_i v_j$$

$$\|u\Lambda v\|^2 (proy_{uv})_{ij} = u_i u_j \sum_{k=1}^n (v_k^2) - v_i u_j \sum_{k=1}^n (u_k v_k) - u_i v_j \sum_{k=1}^n (u_k v_k) + v_i v_j \sum_{k=1}^n (u_k^2)$$

$$\|u\Lambda v\|^2 (proy_{uv})_{ij} = \sum_{k=1}^n \left[ u_i u_j v_k^2 - v_i u_j u_k v_k - u_i v_j u_k v_k + v_i v_j u_k^2 \right]$$

$$\|u\Lambda v\|^2 (proy_{uv})_{ij} = \sum_{k=1}^n \left[ u_j v_k (u_i v_k - v_i u_k) - v_j u_k (u_i v_k - v_i u_k) \right]$$

$$\|u\Lambda v\|^2 (proy_{uv})_{ij} = \sum_{k=1}^n (u_i v_k - v_i u_k) (u_j v_k - v_j u_k) \text{ por (2.3.25) se sabe que}$$

$$\|u\Lambda v\|^2 (proy_{uv})_{ij} = - \sum_{k=1}^n (u\Lambda v)_{ik} (u\Lambda v)_{kj}$$

$$\|u\Lambda v\|^2 (proy_{uv})_{ij} = -(u\Lambda v)_{ij}^2, \text{ en consecuencia}$$

$$-\|u\Lambda v\|^2 (proy_{uv}) = (u\Lambda v)^2$$

**iv)** Tenemos que  $(u\Lambda v)^2 = (u\Lambda v)(u\Lambda v)$  luego

$$\begin{aligned} (u\Lambda v)^2 &= (u\Lambda v)(u\Lambda v) \\ &= (u \otimes v - v \otimes u)(u \otimes v - v \otimes u) \\ &= (u \otimes v)(u \otimes v) - (u \otimes v)(v \otimes u) - (v \otimes u)(u \otimes v) + (v \otimes u)(v \otimes u) \quad \text{ahora usando (ii)} \\ &= (v \cdot u)(u \otimes v) - (v \cdot v)(u \otimes u) - (u \cdot u)(v \otimes v) + (u \cdot v)(v \otimes u) \\ &= - \left[ |v|^2 (u \otimes u) + |u|^2 (v \otimes v) - (u \cdot v)(u \otimes v + v \otimes u) \right] \end{aligned}$$

luego por **(iii)**  $(u\Lambda v)^2 = -\|u\Lambda v\|^2 proy_{uv}$

$$-\|u\wedge v\|^2 \text{proy}_{uv} = -\left[|v|^2(u\otimes u) + |u|^2(v\otimes v) - (u\cdot v)(u\otimes v + v\otimes u)\right]$$

$$\|u\wedge v\|^2 \text{proy}_{uv} = |v|^2(u\otimes u) + |u|^2(v\otimes v) - (u\cdot v)(u\otimes v + v\otimes u)$$

v) Dado que  $(u\wedge v)^3 = (u\wedge v)^2(u\wedge v)$ , en forma similar usando

$$\begin{aligned} (u\wedge v)^3 &= (u\wedge v)^2(u\wedge v) \\ &= \left[(u\cdot v)(u\otimes v) - |v|^2(u\otimes u) - |u|^2(v\otimes v) + (u\cdot v)(v\otimes u)\right](u\otimes v - v\otimes u) \\ &= (u\cdot v)(u\otimes v)(u\otimes v) - |v|^2(u\otimes u)(u\otimes v) - |u|^2(v\otimes v)(u\otimes v) + (u\cdot v)(v\otimes u)(u\otimes v) \\ &\quad - (u\cdot v)(u\otimes v)(v\otimes u) + |v|^2(u\otimes u)(v\otimes u) + |u|^2(v\otimes v)(v\otimes u) - (u\cdot v)(v\otimes u)(v\otimes u) \\ &= (u\cdot v)^2(u\otimes v) - |v|^2|u|^2(u\otimes v) - |u|^2(u\cdot v)(v\otimes v) + (u\cdot v)|u|^2(v\otimes v) \\ &\quad - (u\cdot v)|v|^2(u\otimes u) + |v|^2(u\cdot v)(u\otimes u) + |u|^2|v|^2(v\otimes u) - (u\cdot v)^2(v\otimes u) \\ &= (u\cdot v)^2(u\otimes v) - |v|^2|u|^2(u\otimes v) + |u|^2|v|^2(v\otimes u) - (u\cdot v)^2(v\otimes u) \\ &= (u\cdot v)^2[u\otimes v - v\otimes u] - |v|^2|u|^2[u\otimes v - v\otimes u] \\ &= [u\otimes v - v\otimes u]\left[(u\cdot v)^2 - |v|^2|u|^2\right] \\ &= [u\wedge v]\left[-\|u\wedge v\|^2\right] \\ &= -\|u\wedge v\|^2(u\wedge v) \end{aligned}$$

En general se tiene que  $\forall k \geq 1$  se cumple que

- i)  $(u\wedge v)^{2k} = (-1)^k \|u\wedge v\|^{2k} \text{proy}_{uv}$
- ii)  $(u\wedge v)^{2k+1} = (-1)^k \|u\wedge v\|^{2k} u\wedge v$

usemos inducción para probar **(ii)**. Para  $k = 1$  se tiene que  $(u\wedge v)^3 = -\|u\wedge v\|^2 u\wedge v$  es válida

por lo probado anteriormente, considerando válida **(ii)** para  $k = n$  se verá que para  $k = n + 1$

también es válida, se tiene

$$\begin{aligned} (u\wedge v)^{2(n+1)+1} &= (u\wedge v)^{2n+3} = (u\wedge v)^{2n+1}(u\wedge v)^2 = \left[(-1)^n \|u\wedge v\|^{2n} u\wedge v\right](u\wedge v)^2 \quad \text{por la hipótesis inductiva} \\ &= (-1)^n \|u\wedge v\|^{2n} (u\wedge v)^3 = (-1)^n \|u\wedge v\|^{2n} \left[-\|u\wedge v\|^2 u\wedge v\right] = (-1)^{n+1} \|u\wedge v\|^{2n+2} u\wedge v \\ &= (-1)^{(n+1)} \|u\wedge v\|^{2(n+1)} u\wedge v \end{aligned}$$

**Teorema 2.52. (Fórmula de rotación de Rodrigues en  $\mathbb{R}^n$ )**

Para todo  $u, v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|u \wedge v\| = 1$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\exp(\theta u \wedge v) = I - (1 - \cos \theta) \text{proy}_{uv} + \sin \theta (u \wedge v) \quad (2.3.27)$$

(Hanson, 2011)

**Demostración:**

Por definición de la exponencial de una matriz

$$\begin{aligned} \exp(\theta u \wedge v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta u \wedge v)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} (u \wedge v)^k \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} (u \wedge v)^k, \text{ agrupando los exponentes pares e impares} \\ &= I + \left[ \frac{\theta}{1!} (u \wedge v) + \frac{\theta^2}{2!} (u \wedge v)^2 + \frac{\theta^3}{3!} (u \wedge v)^3 + \frac{\theta^4}{4!} (u \wedge v)^4 + \frac{\theta^5}{5!} (u \wedge v)^5 \dots \right] \\ &= I + \left[ \frac{\theta^2}{2!} (u \wedge v)^2 + \frac{\theta^4}{4!} (u \wedge v)^4 + \dots \right] + \left[ \frac{\theta}{1!} (u \wedge v) + \frac{\theta^3}{3!} (u \wedge v)^3 + \frac{\theta^5}{5!} (u \wedge v)^5 + \dots \right] \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (u \wedge v)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (u \wedge v)^{2k+1} \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \|u \wedge v\|^{2k} \text{proy}_{uv} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k \|u \wedge v\|^{2k} (u \wedge v), \text{ por el último resultado} \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} (-1)^k \text{proy}_{uv} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k (u \wedge v), \text{ pues } \|u \wedge v\| = 1 \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} \text{proy}_{uv} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} (u \wedge v) \\ &= I + \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} - 1 \right] \text{proy}_{uv} + \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] (u \wedge v) \\ &= I + [\cos \theta - 1] \text{proy}_{uv} + [\sin \theta] (u \wedge v) \\ &= I - (1 - \cos \theta) \text{proy}_{uv} + \sin \theta (u \wedge v) \end{aligned}$$

Se puede denotar  $R(u, v, \theta) = \exp(\theta u \wedge v)$  la matriz de rotación. Este último teorema generaliza la ecuación de rotación de Rodrigues para  $\mathbb{R}^n$ , es decir, rota vectores  $n$ -dimensionales, pero no usa el eje de rotación (que también es  $n$ -dimensional) sino que lo hace a través de del hiperplano  $S(u, v)$  generado por  $u$  y  $v$  al que el eje de rotación es perpendicular.

**Ejemplo 2.53.**

Considere  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$ ,  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)$ ,  $p = (2, 3, 4)$  y  $\theta = \frac{\pi}{6}$  entonces se tiene

$$q = R(u, v, \theta)p = p - (1 - \cos \theta) \text{proy}_{uv} p + \sin \theta (u \wedge v) p$$

$$q = R(u, v, \theta)p \approx (2.232051, 0.598076, 4.232051, 2.598076)$$

Se comprueba fácilmente que el ángulo formado por sus proyecciones sobre  $S\{u, v\}$  son  $a = \text{proy}_{uv} p = (2, 3, 2, 3)$  y  $b = \text{proy}_{uv} q \approx (3.232051, 1.598076, 3.232051, 1.598076)$  y forman un ángulo  $\alpha = \arccos \left( \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|} \right) = 0.523599 \approx \frac{\pi}{6}$  como se esperaba. Si particularizamos

este teorema para el caso tridimensional se obtendrá, como es de esperar, la rotación de vectores en  $\mathbb{R}^3$ . Para el caso de  $\mathbb{R}^4$  también se puede obtener un eje de rotación.

**Corolario 2.54.**

Dados  $u, v, p \in \mathbb{R}^4$  tal que  $\|u \wedge v\| = 1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  y  $q = R(u, v, \theta)p$  entonces un eje de rotación  $\eta \in \mathbb{R}^4$  perpendicular al hiperplano generado por  $u$  y  $v$  se obtiene al resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} u \cdot \eta = 0 \\ v \cdot \eta = 0 \\ p \cdot \eta = c \\ q \cdot \eta = c \end{cases}$$

$$\text{Donde } c = \sqrt{\frac{p \cdot q - |p|^2 \cos \theta}{1 - \cos \theta}}$$

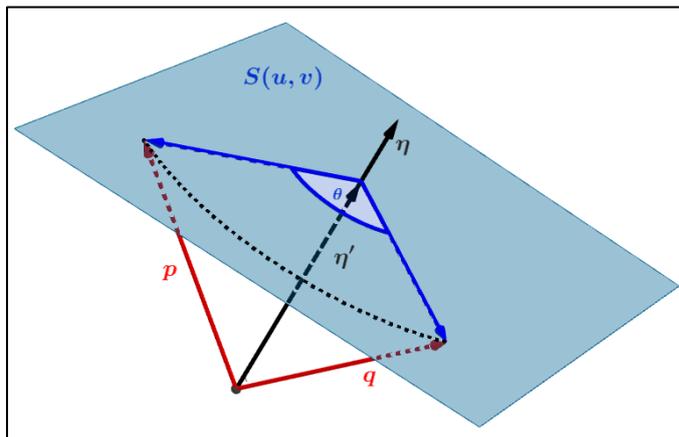
**Demostración:**

Puesto que  $\eta$  debe ser perpendicular al hiperplano generado por  $u$  y  $v$  entonces debe ser ortogonal a cada uno de ellos, esto muestra que las dos primeras condiciones son necesarias

$$u \cdot \eta = 0 \quad \wedge \quad v \cdot \eta = 0 \quad (2.3.28)$$

**Figura 14.**

*Rotación en  $R^4$*



Por otro lado, del gráfico, sea  $\eta' = \text{proy}_{\eta}(p) = \text{proy}_{\eta}(q)$  entonces

$$\eta' = \frac{(\eta \cdot p)\eta}{|\eta|^2} = \frac{(\eta \cdot q)\eta}{|\eta|^2} \quad (2.3.29)$$

De (2.3.28) y (2.3.29) se observa que es suficiente considerar  $|\eta|=1$ . Por lo que

$\eta' = (\eta \cdot p)\eta$ , además esto también dice que  $(p - \eta') \perp \eta$ . Como  $\theta$  es el ángulo de rotación

se cumple que  $\cos \theta = \frac{(p - \eta') \cdot (q - \eta')}{r^2}$ , donde  $r = \|p - \eta'\| = \|q - \eta'\|$ , entonces

$$\begin{aligned}
\|p-\eta\|^2 \cos \theta &= (p-\eta) \cdot (q-\eta) \\
(p-\eta) \cdot (p-\eta) \cos \theta &= (p-\eta) \cdot (q-\eta) \\
[p-\eta(n \cdot p)\eta] \cdot [p-(\eta \cdot p)\eta] \cos \theta &= [p-(\eta \cdot p)\eta] \cdot [q-\eta(n \cdot p)\eta] \\
[(p \cdot p) - (\eta \cdot p)^2 - (\eta \cdot p)^2 + (\eta \cdot p)^2 (\eta \cdot \eta)] \cos \theta &= [(p \cdot q) - (\eta \cdot p)^2 - (\eta \cdot p)^2 + (\eta \cdot p)^2 (\eta \cdot \eta)] \\
[|p|^2 - 2(\eta \cdot p)^2 + (\eta \cdot p)^2 |\eta|^2] \cos \theta &= [(p \cdot q) - 2(\eta \cdot p)^2 + (\eta \cdot p)^2 |\eta|^2] \\
[|p|^2 - (\eta \cdot p)^2] \cos \theta &= [(p \cdot q) - (\eta \cdot p)^2] \quad , \text{ pues } |\eta|=1 \\
(\eta \cdot p)^2 (1 - \cos \theta) &= (p \cdot q) - |p|^2 \cos \theta
\end{aligned}$$

$$(\eta \cdot p) = (\eta \cdot q) = \pm \sqrt{\frac{(p \cdot q) - |p|^2 \cos \theta}{(1 - \cos \theta)}} \quad (2.3.30)$$

Por lo tanto, de (2.3.28) y (2.3.30)

$$\begin{cases} u \cdot \eta = 0 \\ v \cdot \eta = 0 \\ p \cdot \eta = c \\ q \cdot \eta = c \end{cases}$$

Donde  $c = \sqrt{\frac{p \cdot q - |p|^2 \cos \theta}{1 - \cos \theta}}$

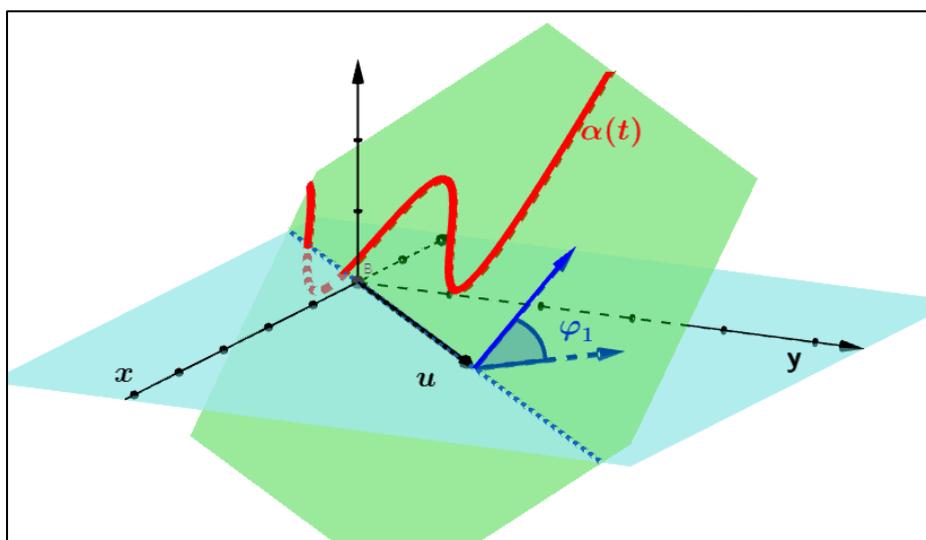
## 2.4 Aplicaciones

### 2.4.1 Las rotaciones especiales como composición de rotaciones

En esta sección se probará que las rotaciones especiales  $\mu$  y  $\lambda$  son rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  cómo se mencionó en la sección 2.2.1. Es decir que existe un vector  $n$  y número real  $\theta$  tal que  $\lambda = R(n, \theta)$ . Para ello primero, considere el siguiente gráfico

**Figura 15.**

*Primera rotación del plano inclinado*



*Nota.* En la figura se observa que la primera rotación se hará en torno al eje  $u$  contenido en la recta  $AX + BY = 0$  de tal manera que los planos lleguen a coincidir.

Se observa que la extensión  $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  está compuesta por dos rotaciones, la primera es la rotación del punto  $(x, y, z)$  alrededor del eje  $u = \left(1, -\frac{A}{B}, 0\right)$  un ángulo al que por ahora se representa por  $\varphi_1$ . La segunda rotación se da respecto al eje  $z$  con un ángulo  $\varphi_2$ . Para

obtener una correcta orientación de la rotación se debe analizar las posiciones del plano  $z = Ax + By$ . Por tanto, se tiene que  $\lambda = R(z, \varphi_2)R(u, \varphi_1)$

**Parte 1:** Se hallará  $R(u, \varphi_1)$ , podemos notar que el ángulo para la primera rotación debe estar en sentido horario respecto de  $u$ , por ello se toma el negativo  $\varphi_1 = \gamma - \pi$ , donde  $\gamma \in \langle 0, \pi \rangle$ . Puesto que  $|\tan \gamma| = \sqrt{w}$ , analizando los cuatro casos vistos en la sección 2.1.4 y la

**Observación 2.16.** se tiene que dependiendo si  $\gamma$  es agudo u obtuso

$$\cos \gamma = -\frac{B}{|B|} \frac{1}{\sqrt{1+w}}, \quad \sin \gamma = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}$$

de donde

$$\cos \varphi_1 = \frac{B}{|B|} \frac{1}{\sqrt{1+w}}, \quad \sin \varphi_1 = -\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}$$

Para la primera rotación se usará la fórmula de Rodrigues, se considera el vector unitario  $u = \left(1, -\frac{A}{B}, 0\right) \frac{|B|}{\sqrt{w}}$ , esto es  $R(u, \varphi_1) = I + \sin(\varphi_1)\Lambda_u + (1 - \cos(\varphi_1))\Lambda_u^2$

donde

$$\Lambda_u = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(u, \varphi_1) = I + \sin(\varphi_1) \frac{|B|}{\sqrt{w}} \frac{1}{B} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & -B \\ A & B & 0 \end{pmatrix} + (1 - \cos(\varphi_1)) \frac{B^2}{w} \frac{1}{B^2} \begin{pmatrix} -A^2 & -AB & 0 \\ -AB & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{pmatrix}$$

reemplazando los valores de  $\sin \varphi_1$  y  $\cos \varphi_1$

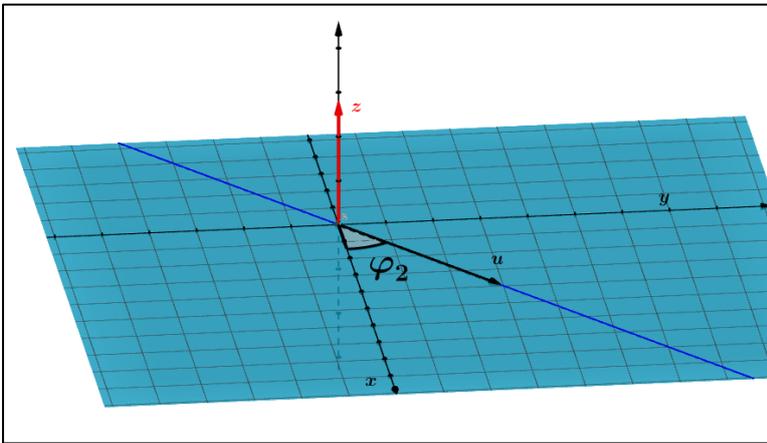
$$R(u, \varphi_1) = I - \frac{|B|}{B\sqrt{w+1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & -B \\ A & B & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{B}{|B|\sqrt{1+w}} \right) \begin{pmatrix} -A^2 & -AB & 0 \\ -AB & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{pmatrix}$$

**Parte 2:** Se hallará  $R(z, \varphi_2)$ , esta es solamente la matriz de rotación sobre el eje  $z$ .

Debe notarse que esta rotación puede ser horaria o antihoraria, es decir el sentido de la rotación depende de la orientación y posición del plano, cómo puede verse en el siguiente gráfico.

**Figura 16.**

*Segunda rotación alrededor del eje  $Z$*



*Nota.* Plano rotado  $\varphi_1$  hasta coincidir con el plano  $z = 0$ , debe rotarse en sentido horario o antihorario un ángulo  $\varphi_2$  hasta coincidir  $u$  con el eje  $x$ , este caso corresponde a  $AB < 0$ .

Dado que  $\varphi_2 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle - \{0\}$  entonces el coseno es siempre positivo, pero el seno

dependerá del signo de  $AB$  para determinar la orientación de la rotación, así pues, se tiene

$\cos \varphi_2 = \frac{|B|}{\sqrt{w}}$ ,  $\sin \varphi_2 = \frac{AB}{|AB|} \frac{|A|}{\sqrt{w}} = \frac{AB}{|B|\sqrt{w}}$ , luego por lo visto en la sección 2.3.3

$$R(z, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(z, \varphi_2) = \begin{pmatrix} \frac{|B|}{\sqrt{w}} & -\frac{AB}{|B|\sqrt{w}} & 0 \\ \frac{AB}{|B|\sqrt{w}} & \frac{|B|}{\sqrt{w}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|B|\sqrt{w}} \begin{pmatrix} B^2 & -AB & 0 \\ AB & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & |B|\sqrt{w} \end{pmatrix}$$

finalmente se tendrá  $\lambda = R(z, \varphi_2)R(u, \varphi_1)$

$$\lambda = \frac{1}{|B|\sqrt{w}} \begin{pmatrix} B^2 & -AB & 0 \\ AB & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & |B|\sqrt{w} \end{pmatrix} \left\{ I - \frac{|B|}{B\sqrt{w+1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & -B \\ A & B & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{w} \left( 1 - \frac{B}{|B|\sqrt{1+w}} \right) \begin{pmatrix} -A^2 & -AB & 0 \\ -AB & -B^2 & 0 \\ 0 & 0 & -w \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = \frac{1}{|B|\sqrt{w}} \begin{pmatrix} B^2 & -AB & 0 \\ AB & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & |B|\sqrt{w} \end{pmatrix} - \frac{1}{B\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Bw \\ A|B|\sqrt{w} & B|B|\sqrt{w} & 0 \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{|B|w\sqrt{w}} - \frac{1}{Bw\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -ABw & -B^2w & 0 \\ 0 & 0 & -|B|w\sqrt{w} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \frac{|B|}{\sqrt{w}} & \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} & \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} & \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \\ \frac{-A|B|}{B\sqrt{1+w}} & \frac{-|B|}{\sqrt{1+w}} & \frac{B}{|B|\sqrt{1+w}} \end{pmatrix}$$

No es difícil notar que  $\det \lambda = 1$  y  $\lambda^{-1} = \lambda^T$ , lo que implica que  $\lambda$  es una matriz de rotación. A decir verdad, esta es una matriz que extiende a la vista en la sección 2.2.1, además dado que  $R(z, \varphi_2)R(u, \varphi_1) = R(\tau_2)R(\tau_1) = R(\tau)$ , por el **Teorema 2.42** se tiene que existe

$$\tau = \frac{\tau_2 + \tau_1 + \tau_2 \times \tau_1}{1 - \tau_1 \cdot \tau_2}$$

donde  $\tau_2 = \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)z$ ,  $\tau_1 = \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)u$ .

Luego, existen  $n \in \mathbb{R}^3$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  tales que  $\lambda = R(z, \varphi_2)R(u, \varphi_1) = R(n, \theta)$  donde  $\tan\frac{\theta}{2} = \|\tau\|$  y  $n = \frac{\tau}{\|\tau\|}$ . Esto muestra que la denominada “rotación especial”  $\lambda$  es en sí una rotación en  $\square^3$  y su inversa  $\mu$  también lo es

$$\mu = \lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{|B|}{\sqrt{w}} & \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} & \frac{-A|B|}{B\sqrt{1+w}} \\ \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} & \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} & \frac{-|B|}{\sqrt{1+w}} \\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} & \frac{B}{|B|\sqrt{1+w}} \end{pmatrix}$$

### Observación 2.55.

Esta matriz asociada a  $\mu$  es un caso particular de la vista en 2.2.1, ya que aquí el punto  $p$  se encuentra en la recta  $Ax + By = 0$  y no en general sobre el plano  $z = Ax + By$ .

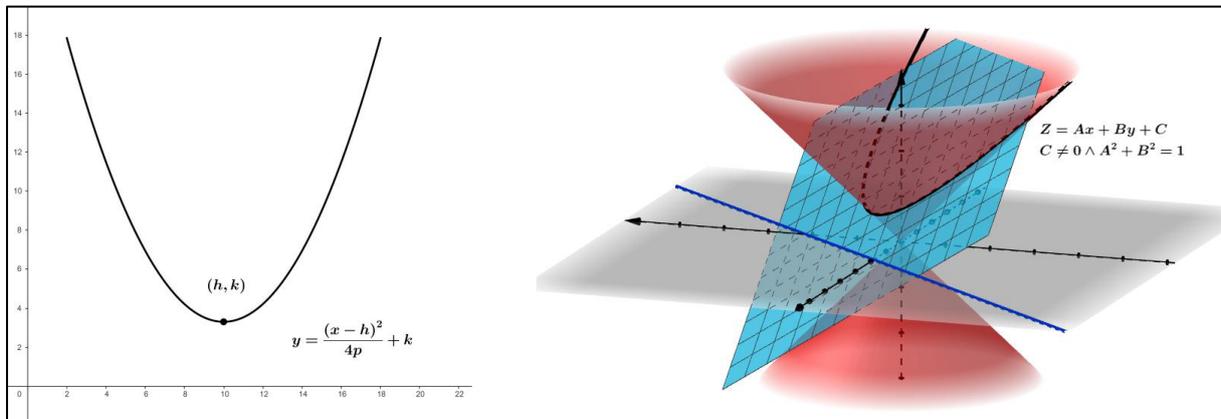
### 2.4.2 Las cónicas en $\mathbb{R}^3$

En esta sección se estudiará las curvas cónicas en  $\mathbb{R}^3$ , la parábola, elipse e hipérbola. Es bien sabido que estas se obtienen al intersecar dos superficies, un cono doble y un plano. El objetivo será obtener una sola parametrización continua de estas curvas y algunos puntos importantes de estas, para ello se hace uso de las rotaciones especiales. El método consiste en tomar un punto  $\Psi(t)$  de la curva y mediante un proceso de coeficientes indeterminados ajustar esta curva inicialmente en  $\mathbb{R}^2$  a la intersección de las superficies mencionadas.

#### La parábola

**Figura 17.**

*Ajuste de una parábola de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^3$*



Dadas las superficies  $z^2 = x^2 + y^2 \wedge z = Ax + By + C$ ,  $C \neq 0$  si  $w = A^2 + B^2 = 1$  la condición necesaria para que la intersección de las superficies sea una parábola pues el ángulo de inclinación del plano es  $\beta = \frac{\pi}{4}$  de donde  $\tan \beta = \sqrt{A^2 + B^2} = 1$ . Se hará uso de la rotación especial  $\mu$  definida en el capítulo 2.2.1 cuya parametrización está dada por (2.2.14) para ajustar una parábola arbitraria en  $\mathbb{R}^2$  al plano inclinado y al cono doble, esta curva buscada se denotará por  $\Psi(t)$ .

Se define la ecuación de la parábola con eje focal vertical centrada en  $(h, k)$  y parámetro  $p$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \left( t + h, \frac{t^2}{4p} + k \right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.4.1)$$

Puesto  $C \neq 0$  el plano no necesariamente pasa por el origen, una traslación al origen soluciona este hecho. De este modo, primero se aplica  $\mu$  y luego se suma  $C$  a la tercera componente de la curva para así ubicarla sobre el plano. Aplicando la rotación especial  $\mu$  y teniendo en cuenta que  $w = 1$  se tiene

$$\mu(\alpha(t)) = \left( \frac{|B|\alpha_1(t)}{\sqrt{w}} + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-AB\alpha_1(t)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{\alpha_2(t)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \right)$$

$$\mu(\alpha(t)) = \left( |B|\alpha_1(t) + \frac{A}{\sqrt{2}}\alpha_2(t), \frac{-AB}{|B|}\alpha_1(t) + \frac{B}{\sqrt{2}}\alpha_2(t), \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2(t) \right)$$

hasta aquí  $\mu(\alpha(t))$  está contenida en el plano  $z = Ax + By \quad \forall t \in \mathbb{R}$  luego

$$\Psi(t) = \left( |B|\alpha_1(t) + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{2}}, \frac{-AB\alpha_1(t)}{|B|} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha_2(t)}{\sqrt{2}} + C \right) \quad (2.4.2)$$

está en el plano  $z = Ax + By + C$  y debe satisfacer la ecuación del cono doble, es decir

$$\left[ \frac{\alpha_2(t)}{\sqrt{2}} + C \right]^2 = \left[ |B|\alpha_1(t) + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left[ \frac{-AB\alpha_1(t)}{|B|} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{2}} \right]^2$$

usando la identidad ( 2.2.15) para reducir la suma de cuadrados derecha

$$\left[ \frac{\alpha_2(t)}{\sqrt{2}} + C \right]^2 = \alpha_1^2(t) + \frac{\alpha_2^2(t)}{1+A^2+B^2}$$

$$\frac{\alpha_2^2(t)}{2} + C^2 + \sqrt{2}C\alpha_2(t) = \alpha_1^2(t) + \frac{\alpha_2^2(t)}{2}$$

$$C^2 + \sqrt{2}C \left[ \frac{t^2}{4p} + k \right] = (t+h)^2$$

$$t^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}C}{4p} \right) + t(2h) + h^2 - C^2 - \sqrt{2}kC = 0$$

esta igualdad es válida  $\forall t \in \mathbb{R}$  por tanto

$$1 - \frac{\sqrt{2}C}{4p} = 0 \wedge 2h = 0 \wedge h^2 - C^2 - \sqrt{2}kC = 0$$

se sigue que

$$p = \frac{\sqrt{2}C}{4} \wedge h = 0 \wedge k = -\frac{C}{\sqrt{2}} \quad (2.4.3)$$

reemplazando (2.4.3) y (2.4.1) en (2.4.2)

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \left( |B|(t+h) + \frac{A}{\sqrt{2}} \left[ \frac{t^2}{4p} + k \right], \frac{-AB}{|B|}(t+h) + \frac{B}{\sqrt{2}} \left[ \frac{t^2}{4p} + k \right], \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{t^2}{4p} + k \right] + C \right) \\ &= \left( |B|t + \frac{A}{\sqrt{2}} \left[ \frac{t^2}{\sqrt{2}C} - \frac{C}{\sqrt{2}} \right], \frac{-ABt}{|B|} + \frac{B}{\sqrt{2}} \left[ \frac{t^2}{\sqrt{2}C} - \frac{C}{\sqrt{2}} \right], \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{t^2}{\sqrt{2}C} - \frac{C}{\sqrt{2}} \right] + C \right) \\ &= \left( |B|t + \frac{At^2}{2C} - \frac{AC}{2}, \frac{-ABt}{|B|} + \frac{Bt^2}{2C} - \frac{BC}{2}, \frac{t^2}{2C} - \frac{C}{2} + C \right) \\ \Psi(t) &= \left( \frac{A}{2C}t^2 + |B|t - \frac{AC}{2}, \frac{B}{2C}t^2 - \frac{AB}{|B|}t - \frac{BC}{2}, \frac{1}{2C}t^2 + \frac{C}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

La expresión (2.4.4) es la parametrización buscada de la parábola  $\Psi(t)$  y es válida  $\forall t \in \mathbb{R}$  con  $A^2 + B^2 = 1$ . Ahora se mostrará una relación existente entre los focos de las cónicas. Los extremos del lado recto  $L_1$  y  $L_2$  de  $\Psi(t)$  se obtienen para  $t = \pm 2p = \pm \sqrt{2} \frac{C}{2}$

$$L_1 = \Psi(-2p) = \Psi\left(-\frac{\sqrt{2}C}{2}\right) = \left(-\frac{AC}{4} - \frac{|B|\sqrt{2}C}{2}, -\frac{BC}{4} + \frac{AB\sqrt{2}C}{2|B|}, \frac{3C}{4}\right)$$

$$L_2 = \Psi(2p) = \Psi\left(\frac{\sqrt{2}C}{2}\right) = \left(-\frac{AC}{4} + \frac{|B|\sqrt{2}C}{2}, -\frac{BC}{4} - \frac{AB\sqrt{2}C}{2|B|}, \frac{3C}{4}\right)$$

luego el foco  $F = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$

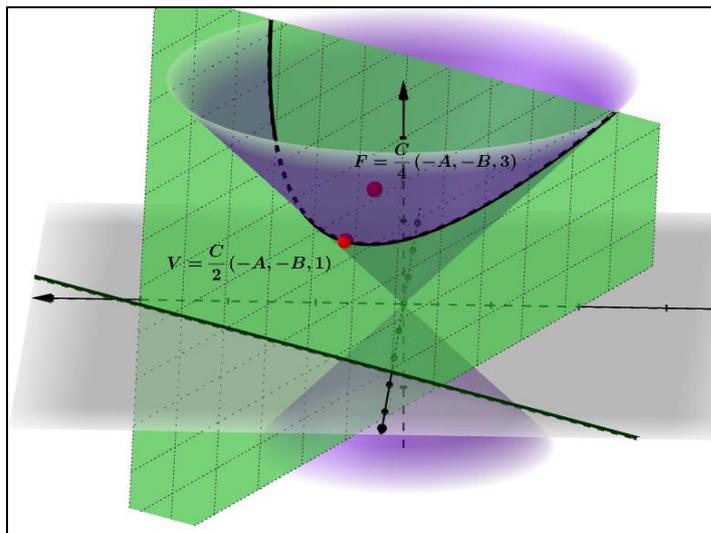
$$F = \frac{1}{2} \left( -\frac{AC}{4} - \frac{|B|\sqrt{2}C}{2}, -\frac{BC}{4} + \frac{AB\sqrt{2}C}{2|B|}, \frac{3C}{4} \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{AC}{4} + \frac{|B|\sqrt{2}C}{2}, -\frac{BC}{4} - \frac{AB\sqrt{2}C}{2|B|}, \frac{3C}{4} \right)$$

Por lo tanto, el foco y el vértice están dados por

$$F = \frac{C}{4}(-A, -B, 3), \quad V = \Psi(0) = \frac{C}{2}(-A, -B, 1)$$

**Figura 18.**

*Parábola en  $\mathbb{R}^3$*



*Nota.* En la figura se observa el foco y el vértice de una parábola en  $\mathbb{R}^3$  cuando  $C > 0$ , el eje focal es perpendicular a la recta  $Ax + By + C = 0$  y está contenida en el plano.

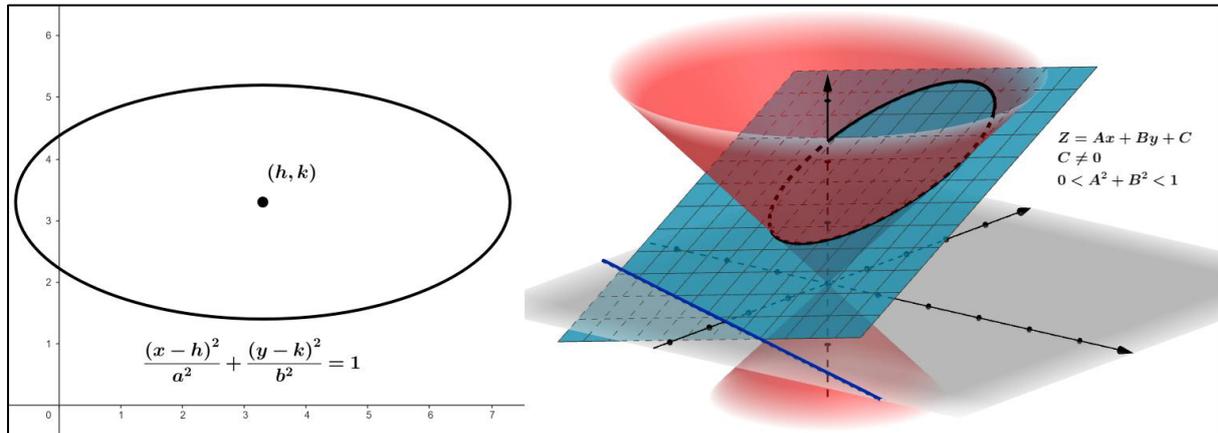
**Observación 2.56.**

- El hecho de que  $h=0$  y  $k=-C/\sqrt{2}$  nos indica que el eje focal de la parábola corta al eje  $Z$  pues no presenta desplazamiento ni a la izquierda ni a la derecha, además la parábola se desplaza hacia abajo si  $C > 0$  y hacia arriba si  $C < 0$ .
- De  $p = \sqrt{2}C/4$  se puede afirmar que si  $C \rightarrow \pm\infty$  entonces  $p \rightarrow \pm\infty$  la parábola se abrirá más para valores grandes de  $C$ .
- Si  $C = 0$ , el plano pasa por el origen y por la condición  $w=1$ , la única intersección de las superficies será una recta.

## La elipse

**Figura 19.**

*Ajuste de una elipse de  $R^2$  a  $R^3$*



Para el caso de la elipse se procede del mismo modo que el de la parábola. Se consideran las superficies  $z^2 = x^2 + y^2 \wedge z = Ax + By + C$ , con  $C \neq 0$  y  $0 < A^2 + B^2 < 1$  representa la condición necesaria para que la intersección de las superficies sea una elipse ya que  $\tan \beta = \sqrt{A^2 + B^2} < 1$ . Se tiene la ecuación de la elipse centrada en  $(h, k)$  con parámetros  $a, b > 0$ .

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (a \cos(t) + h, b \sin(t) + k) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

luego

$$\mu(\alpha(t)) = \left( \frac{|B|\alpha_1(t)}{\sqrt{w}} + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-AB\alpha_1(t)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{\alpha_2(t)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \right)$$

está en el plano  $z = Ax + By$  por lo que

$$\Psi(t) = \left( \frac{|B|\alpha_1(t)}{\sqrt{w}} + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-AB\alpha_1(t)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{\alpha_2(t)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C \right) \quad (2.4.5)$$

está sobre el plano  $z = Ax + By + C$  con  $C \neq 0$ , luego  $\Psi(t)$  debe satisfacer la ecuación del cono doble  $z^2 = x^2 + y^2$ , es decir

$$\left[ \frac{\alpha_2(t)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C \right]^2 = \left[ \frac{|B|\alpha_1(t)}{\sqrt{w}} + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right]^2 + \left[ \frac{-AB\alpha_1(t)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \right]^2$$

usando la igualdad ( 2.2.15)

$$\left[ \frac{\alpha_2(t)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C \right]^2 = [\alpha_1(t)]^2 + \frac{[\alpha_2(t)]^2}{1+w}$$

$$\frac{\alpha_2^2(t)w}{1+w} + C^2 + \frac{2C\sqrt{w}\alpha_2(t)}{\sqrt{1+w}} = [\alpha_1(t)]^2 + \frac{\alpha_2^2(t)}{1+w}$$

$$\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) \left( \frac{1-w}{1+w} \right) - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \alpha_2(t) - C^2 = 0 \quad (2.4.6)$$

$$[a \cos(t) + h]^2 + [b \sin(t) + k]^2 r - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} [b \sin(t) + k] - C^2 = 0$$

donde  $r = \left( \frac{1-w}{1+w} \right)$

$$a^2 \cos^2(t) + h^2 + 2ah \cos(t) + [b^2 \sin^2(t) + k^2 + 2bk \sin(t)] r - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} b \sin(t) - \frac{2Ck\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 = 0$$

$$a^2 \cos^2(t) + h^2 + 2ah \cos(t) + [b^2 - b^2 \cos^2(t) + k^2 + 2bk \sin(t)] r - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} b \sin(t) - \frac{2Ck\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 = 0$$

$$\cos^2(t) [a^2 - rb^2] + \cos(t) [2ah] + \sin(t) \left[ 2bkr - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} b \right] - \frac{2Ck\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 + h^2 + rb^2 + rk^2 = 0$$

Esta última igualdad se cumple para  $\forall t \in [0, 2\pi]$  por lo que los coeficientes deben ser nulos

$$a^2 - rb^2 = 0 \wedge 2ah = 0 \wedge 2bkr - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}b = 0 \wedge -\frac{2Ck\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 + h^2 + rb^2 + rk^2 = 0$$

dado que  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$

$$a = \sqrt{r}b \wedge h = 0 \wedge k = \frac{C\sqrt{w}}{r\sqrt{1+w}} \wedge rb^2 = \frac{2Ck\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C^2 - rk^2$$

simplificando el valor de  $k$

$$k = \frac{C\sqrt{w}}{r\sqrt{1+w}} = \frac{C\sqrt{w}}{\left(\frac{1-w}{1+w}\right)\sqrt{1+w}} = \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{1-w}$$

también

$$rb^2 = \frac{2Ck\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C^2 - rk^2$$

$$\left(\frac{1-w}{1+w}\right)b^2 = \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \left[ \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{1-w} \right] + C^2 - \left[ \frac{1-w}{1+w} \right] \left[ \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{1-w} \right]^2$$

$$\left(\frac{1-w}{1+w}\right)b^2 = \frac{2C^2w}{1-w} + C^2 - \frac{C^2w}{1-w}$$

$$\left(\frac{1-w}{1+w}\right)b^2 = \frac{C^2}{1-w}, \text{ como } 0 < w < 1 \text{ entonces}$$

$$b = |C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w}$$

y puesto que  $a = \sqrt{r}b$  entonces

$$a = \sqrt{\frac{1-w}{1+w}} |C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w} = \frac{|C|}{\sqrt{1-w}}$$

por lo tanto, en la elipse se verifica que

$$a = \frac{|C|}{\sqrt{1-w}} \wedge b = |C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w} \wedge k = \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{1-w} \wedge h = 0 \quad (2.4.7)$$

donde  $0 < w = A^2 + B^2 < 1$ .

Debe observarse que a partir de  $a = \sqrt{r}b$  se sigue  $a < b$  pues  $r = \left(\frac{1-w}{1+w}\right) = 1 - \frac{2w}{1+w} < 1$

, reemplazando (2.4.7) en (2.4.5)

$$\Psi(t) = \left( \frac{|B|(a \cos(t) + h)}{\sqrt{w}} + \frac{A(b \sin(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-AB(a \cos(t) + h)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B(b \sin(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{(b \sin(t) + k)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C \right)$$

simplificando cada componente de  $\Psi(t)$

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \frac{|B|(a \cos(t) + h)}{\sqrt{w}} + \frac{A(b \sin(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \\ &= \frac{|B|}{\sqrt{w}} \left( \frac{|C|}{\sqrt{1-w}} \cos(t) \right) + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left( |C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w} \sin(t) + \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{1-w} \right) \\ &= \frac{|BC|}{\sqrt{w}\sqrt{1-w}} \cos(t) + \frac{A|C|}{\sqrt{w}(1-w)} \sin(t) + \frac{AC}{1-w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(t) &= -\frac{AB(a \cos(t) + h)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B(b \sin(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \\ &= -\frac{AB}{|B|\sqrt{w}} \left( \frac{|C|}{\sqrt{1-w}} \cos(t) \right) + \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left( |C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w} \sin(t) + \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{1-w} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{AB|C|}{|B|\sqrt{w}\sqrt{1-w}} \cos(t) + \frac{B|C|}{\sqrt{w}(1-w)} \sin(t) + \frac{BC}{1-w}$$

$$\Psi_3(t) = \frac{(b \sin(t) + k)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \left( |C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w} \sin(t) + \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{1-w} \right) + C$$

$$= |C| \frac{\sqrt{w}}{1-w} \sin(t) + \frac{C}{1-w}$$

por lo tanto

$$\Psi(t) = \left( \frac{|BC|\cos(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1-w}} + \frac{A|C|\sin(t)}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{AC}{1-w}, -\frac{AB|C|\cos(t)}{|B|\sqrt{w}\sqrt{1-w}} + \frac{B|C|\sin(t)}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{BC}{1-w}, |C| \frac{\sqrt{w}\sin(t)}{1-w} + \frac{C}{1-w} \right)$$

Para hallar los focos de la elipse debemos primero hallar su centro y dos extremos que, sin pérdida de generalidad se puede considerar cualquier par de valores en  $[0, 2\pi]$  cuya semisuma resulte ser el centro. Se consideran los extremos  $P_1 = \Psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$  y  $P_2 = \Psi\left(\frac{3\pi}{2}\right)$  luego

$$P_1 = \left( \frac{A|C|}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{AC}{1-w}, \frac{B|C|}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{BC}{1-w}, |C| \frac{\sqrt{w}}{1-w} + \frac{C}{1-w} \right)$$

$$P_2 = \left( -\frac{A|C|}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{AC}{1-w}, -\frac{B|C|}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{BC}{1-w}, -|C| \frac{\sqrt{w}}{1-w} + \frac{C}{1-w} \right)$$

entonces el centro de la elipse es  $O = \left( \frac{P_1 + P_2}{2} \right) = \left( \frac{AC}{1-w}, \frac{BC}{1-w}, \frac{C}{1-w} \right)$

Finalmente, para hallar  $F_1$  y  $F_2$  los focos apliquemos la relación de un punto sobre un segmento por una razón dada y (2.4.7)

$$F_1 = \frac{1}{b} \left[ \sqrt{b^2 - a^2} P_1 + (b - \sqrt{b^2 - a^2}) O \right]$$

$$bF_1 = \frac{\sqrt{2}|C|\sqrt{w}}{1-w} \left( \frac{A|C|}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{AC}{1-w}, \frac{B|C|}{\sqrt{w}(1-w)} + \frac{BC}{1-w}, \frac{|C|\sqrt{w}}{1-w} + \frac{C}{1-w} \right) \\ + \left( |C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w} - \frac{\sqrt{2}|C|\sqrt{w}}{1-w} \right) \left( \frac{AC}{1-w}, \frac{BC}{1-w}, \frac{C}{1-w} \right)$$

$$(1-w)^2 bF_1 = \sqrt{2}C \left( AC + A|C|\sqrt{w}, BC + B|C|\sqrt{w}, Cw + |C|\sqrt{w} \right) \\ + C|C| \left( A\sqrt{1+w} - \sqrt{2}A\sqrt{w}, B\sqrt{1+w} - \sqrt{2}B\sqrt{w}, \sqrt{1+w} - \sqrt{2}\sqrt{w} \right)$$

$$bF_1 = \left( \frac{\sqrt{2}AC^2}{(1-w)^2}, \frac{\sqrt{2}BC^2}{(1-w)^2}, \frac{\sqrt{2}C^2w}{(1-w)^2} \right) + \left( \frac{AC|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2}, \frac{BC|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2}, \frac{C|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2} \right)$$

$$bF_1 = \left( \frac{\sqrt{2}AC^2}{(1-w)^2} + \frac{AC|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2}, \frac{\sqrt{2}BC^2}{(1-w)^2} + \frac{BC|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2}, \frac{\sqrt{2}C^2w}{(1-w)^2} + \frac{C|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2} \right)$$

reemplazando  $b$

$$|C| \frac{\sqrt{1+w}}{1-w} F_1 = \left( \frac{\sqrt{2}AC^2}{(1-w)^2} + \frac{AC|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2}, \frac{\sqrt{2}BC^2}{(1-w)^2} + \frac{BC|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2}, \frac{\sqrt{2}C^2w}{(1-w)^2} + \frac{C|C|\sqrt{1+w}}{(1-w)^2} \right)$$

$$F_1 = \left( \frac{\sqrt{2}A|C|}{\sqrt{1+w}(1-w)} + \frac{AC}{(1-w)}, \frac{\sqrt{2}B|C|}{\sqrt{1+w}(1-w)} + \frac{BC}{(1-w)}, \frac{\sqrt{2}|C|w}{\sqrt{1+w}(1-w)} + \frac{C}{(1-w)} \right)$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}|C|}{\sqrt{1+w}(1-w)} (A, B, w) + \frac{C}{(1-w)} (A, B, 1)$$

del mismo modo o teniendo en cuenta que  $F_2 = 2C - F_1$  se sigue que

$$F_2 = -\frac{\sqrt{2}|C|}{\sqrt{1+w}(1-w)}(A, B, w) + \frac{C}{(1-w)}(A, B, 1)$$

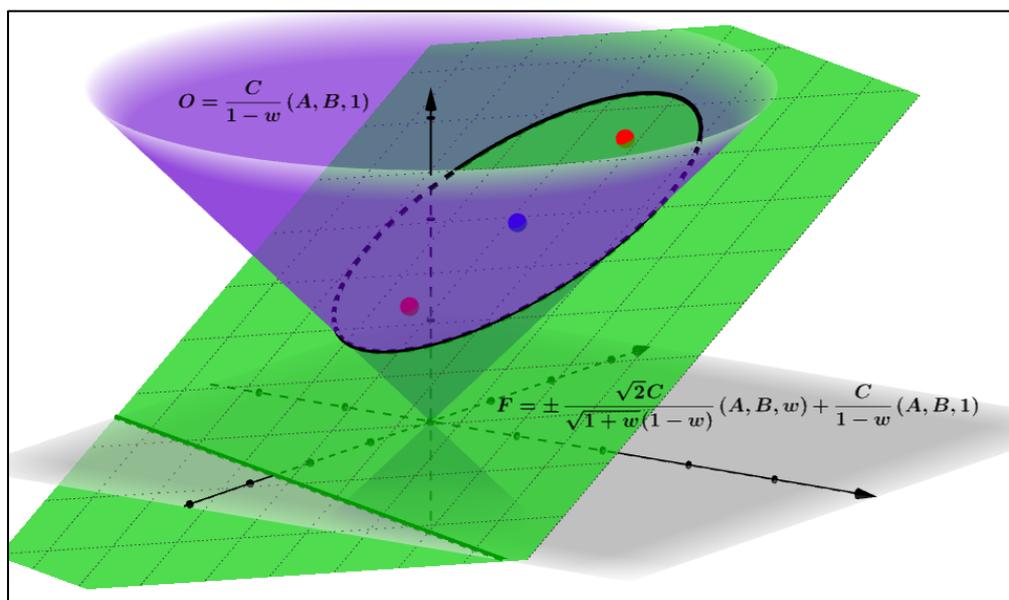
por lo tanto, los focos de la elipse vienen dados por

$$F = \pm \frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{1+w}(1-w)}(A, B, w) + \frac{C}{(1-w)}(A, B, 1) \quad (2.4.8)$$

y el centro es  $O = \frac{C}{(1-w)}(A, B, 1)$

**Figura 20.**

*Elipse en  $R^3$*



*Nota.* En la figura se muestra los focos y el centro de la elipse.

Se observa que la excentricidad

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}|C|\sqrt{w}}{1-w}}{\frac{|C|\sqrt{1+w}}{1-w}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}$$

dado que  $0 < w < 1$  se tendrá que

$$0 < w < 1 \rightarrow 2w < 1 + w \rightarrow \frac{2w}{1+w} < 1 \rightarrow e = \sqrt{\frac{2w}{1+w}} < 1$$

se sigue que  $0 < e < 1$  como se esperaba. Además  $a < b$  ya que  $a = b\sqrt{w}$ .

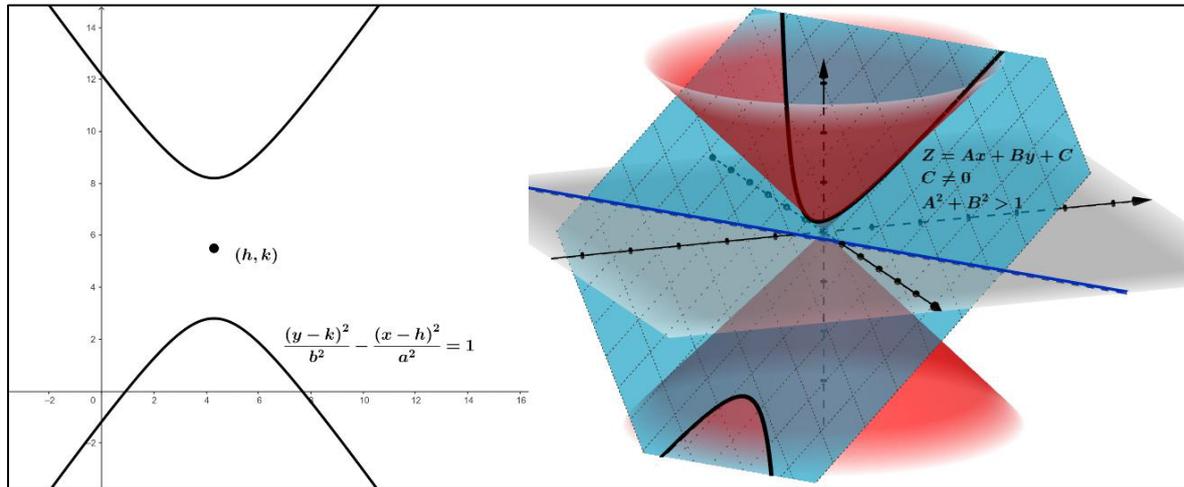
### Observaciones 2.57.

- Para  $w = A^2 + B^2 = 0$  no puede considerarse dentro de las ecuaciones pues el uso la aplicación  $\mu$  contiene divisiones por  $B \neq 0$ .
- Si  $w = A^2 + B^2 = 0$  implica resolver el sistema  $z^2 = x^2 + y^2 \wedge z = C$  lo que da como resultado la circunferencia de radio  $|C|$  y  $\Psi(t) = (|C|\cos(t), |C|\sin(t), C)$ .
- Que  $h = 0$  implica que el eje focal de la elipse corta al eje  $Z$ , mientras que  $k$  nos dice que la elipse está desplazada hacia arriba si  $C > 0$  y hacia abajo si  $C < 0$ .
- De  $a$  y  $b$  se tendrá que la elipse se hará más grande a medida que  $C \rightarrow \pm\infty$  o que  $w \rightarrow 1^-$ .
- El hecho de que  $0 < e < 1$  quiere decir que existe una biyección entre el conjunto de elipses y las curvas que se obtienen al intersecar un cono doble con un plano inclinado que verifique que  $0 < w < 1$ .

## Hipérbola

**Figura 21.**

*Hipérbola en  $R^2$  y  $R^3$*



El caso de la hipérbola es especial pues esta se obtiene de dos modos, el primero es cuando el plano está inclinado  $w = A^2 + B^2 > 1$  y el otro cuando el plano es vertical, este segundo caso un tratamiento especial pues no se puede aplicar  $\mu$  como se venía haciendo. Para el primer caso tenemos lo siguiente:

Dadas las superficies  $z^2 = x^2 + y^2 \wedge z = Ax + By + C$  con  $C \neq 0$  y  $w = A^2 + B^2 > 1$  entonces la intersección de las superficies es una hipérbola. Se tiene la parametrización de una hipérbola centrada en  $(h, k)$  y parámetros  $a, b > 0$ , y eje focal vertical.

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (a \tan(t) + h, b \sec(t) + k) \quad \forall t \in [0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

luego

$$\mu(\alpha(t)) = \left( \frac{|B|\alpha_1(t)}{\sqrt{w}} + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-A\alpha_1(t)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{\alpha_2(t)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \right)$$

está contenida en el plano  $z = Ax + By$  por lo que

$$\Psi(t) = \left( \frac{|B|\alpha_1(t)}{\sqrt{w}} + \frac{A\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-AB\alpha_1(t)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\alpha_2(t)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{\alpha_2(t)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C \right) \quad (2.4.9)$$

está sobre el plano  $z = Ax + By + C$ , luego  $\Psi(t)$  debe satisfacer la ecuación del cono doble

$z^2 = x^2 + y^2$ , usando la relación (2.4.6) se cumple que

$$\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) \left( \frac{1-w}{1+w} \right) - \frac{2C\sqrt{w}\alpha_2(t)}{\sqrt{1+w}} - C^2 = 0$$

$$[a \tan(t) + h]^2 + [b \sec(t) + k]^2 \left( \frac{1-w}{1+w} \right) - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} [b \sec(t) + k] - C^2 = 0$$

$$a^2 \tan^2(t) + h^2 + 2ah \tan(t) - [b^2 \sec^2(t) + k^2 + 2bk \sec(t)] r - \frac{2bC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \sec(t) - \frac{2kC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 = 0$$

donde  $r = \left( \frac{w-1}{1+w} \right) > 0$

$$a^2 \sec^2(t) - a^2 + h^2 + 2ah \tan(t) - [b^2 \sec^2(t) + k^2 + 2bk \sec(t)] r - \frac{2bC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \sec(t) - \frac{2kC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 = 0$$

$$\sec^2(t) [a^2 - b^2 r] + \sec(t) \left[ -2bkr - \frac{2bC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \right] + \tan(t) [2ah] + h^2 - a^2 - rk^2 - \frac{2kC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 = 0$$

Como esta última igualdad es cierta  $\forall t \in [0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$  entonces todos los

coeficientes deben ser nulo, por tanto

$$a^2 - b^2 r = 0 \wedge 2ah \wedge -2bkr - \frac{2bC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} = 0 \wedge h^2 - a^2 - rk^2 - \frac{2kC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2 = 0$$

puesto que  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$

$$a = b\sqrt{r} \wedge h = 0 \wedge k = -\frac{C\sqrt{w}}{r\sqrt{1+w}} \wedge a^2 = -rk^2 - \frac{2kC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2$$

de donde

$$k = -\frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1}$$

también

$$a^2 = -rk^2 - \frac{2kC\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - C^2$$

$$a^2 = -\left(\frac{w-1}{1+w}\right)\left[-\frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1}\right]^2 - \frac{2C\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}}\left[-\frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1}\right] - C^2$$

$$a^2 = -\frac{C^2w}{(w-1)} + \frac{2C^2w}{(w-1)} - C^2 = \frac{C^2}{(w-1)}$$

$$a = \frac{|C|}{\sqrt{w-1}}$$

lo que implica que

$$b = \frac{a}{\sqrt{r}} = \frac{|C|}{\sqrt{w-1}}\sqrt{\frac{1+w}{w-1}} = \frac{|C|\sqrt{1+w}}{w-1}$$

$$b = \frac{|C|\sqrt{1+w}}{w-1}$$

por lo tanto, en la hipérbola se verifica que

$$a = \frac{|C|}{\sqrt{w-1}} \wedge b = \frac{|C|\sqrt{1+w}}{w-1} \wedge k = -\frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1} \wedge h = 0 \quad (2.4.10)$$

donde  $w = A^2 + B^2 > 1$

Debe observarse que de la relación  $a = \sqrt{rb}$  se sigue que  $a < b$  pues como  $w > 1$

entonces  $r = \left( \frac{w-1}{1+w} \right) = \frac{2w}{1+w} - 1 < \frac{2w}{w} - 1 = 1$ , reemplazando (2.4.10) en (2.4.9)

$$\Psi(t) = \left( \frac{|B|(a \tan(t) + h)}{\sqrt{w}} + \frac{A(b \sec(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-AB(a \tan(t) + h)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B(b \sec(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{(b \sec(t) + k)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C \right)$$

simplificando cada componente de  $\Psi(t)$  con los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $h$  y  $k$

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \frac{|B|(a \tan(t) + h)}{\sqrt{w}} + \frac{A(b \sec(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \\ &= \frac{|B|}{\sqrt{w}} \left[ \frac{|C|}{\sqrt{w-1}} \tan(t) \right] + \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{|C|\sqrt{1+w}}{w-1} \sec(t) - \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1} \right] \\ &= \frac{|BC|}{\sqrt{w}\sqrt{w-1}} \tan(t) + \frac{A|C|}{\sqrt{w}(w-1)} \sec(t) - \frac{AC}{w-1} \\ \Psi_2(t) &= \frac{-AB(a \tan(t) + h)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B(b \sec(t) + k)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \\ &= \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} \left[ \frac{|C|}{\sqrt{w-1}} \tan(t) \right] + \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \left[ \frac{|C|\sqrt{1+w}}{w-1} \sec(t) - \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1} \right] \\ &= -\frac{AB|C|}{|B|\sqrt{w}\sqrt{w-1}} \tan(t) + \frac{B|C|}{\sqrt{w}(w-1)} \sec(t) - \frac{BC}{w-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3(t) &= \frac{(b \sec(t) + k)\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} + C \\ &= \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \left[ \frac{|C|\sqrt{1+w}}{w-1} \sec(t) - \frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1} \right] + C \end{aligned}$$

$$= \frac{|C|\sqrt{w}}{w-1} \sec(t) - \frac{C}{w-1}$$

por lo tanto

$$\Psi(t) = \left( \frac{|BC|\tan(t)}{\sqrt{w}\sqrt{w-1}} + \frac{A|C|\sec(t)}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{AC}{w-1}, -\frac{AB|C|\tan(t)}{|B|\sqrt{w}\sqrt{w-1}} + \frac{B|C|\sec(t)}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{BC}{w-1}, \frac{|C|\sqrt{w}\sec(t)}{w-1} - \frac{C}{w-1} \right)$$

Para hallar los focos de la elipse debemos primero hallar su centro para después hallar las coordenadas de los focos. Sean los vértices de la hipérbola  $P_1 = \Psi(0)$  y  $P_2 = \Psi(\pi)$  luego

$$P_1 = \left( \frac{A|C|}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{AC}{w-1}, \frac{B|C|}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{BC}{w-1}, \frac{|C|\sqrt{w}}{w-1} - \frac{C}{w-1} \right)$$

$$P_2 = \left( -\frac{A|C|}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{AC}{w-1}, -\frac{B|C|}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{BC}{w-1}, -\frac{|C|\sqrt{w}}{w-1} - \frac{C}{w-1} \right)$$

el centro de la hipérbola es

$$O = \left( \frac{P_1 + P_2}{2} \right) = \left( -\frac{AC}{w-1}, -\frac{BC}{w-1}, -\frac{C}{w-1} \right) = \frac{C}{1-w} (A, B, 1)$$

finalmente, para hallar  $F_1$  y  $F_2$  los focos apliquemos la relación de punto en un segmento por una razón dada

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + a^2}} \left( (\sqrt{b^2 + a^2} - b)O + bF_1 \right)$$

por consiguiente

$$bF_1 = \sqrt{b^2 + a^2} P_1 - (\sqrt{b^2 + a^2} - b)C$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b} P_1 - \left( \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b} - 1 \right) C = \frac{\sqrt{2}\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} P_1 - \left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - 1 \right) C$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \left( \frac{A|C|}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{AC}{w-1}, \frac{B|C|}{\sqrt{w}(w-1)} - \frac{BC}{w-1}, \frac{|C|\sqrt{w}}{w-1} - \frac{C}{w-1} \right) + \left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} - 1 \right) \left( \frac{AC}{w-1}, \frac{BC}{w-1}, \frac{C}{w-1} \right)$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{1+w}} \left( \frac{\sqrt{2}A|C|}{(w-1)} - \frac{\sqrt{2}AC\sqrt{w}}{(w-1)}, \frac{\sqrt{2}B|C|}{(w-1)} - \frac{\sqrt{2}BC\sqrt{w}}{(w-1)}, \frac{\sqrt{2}|C|w}{(w-1)} - \frac{\sqrt{2}C\sqrt{w}}{(w-1)} \right) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+w}} \left( \frac{\sqrt{2}AC\sqrt{w}}{(w-1)} - \frac{AC\sqrt{1+w}}{(w-1)}, \frac{\sqrt{2}BC\sqrt{w}}{(w-1)} - \frac{BC\sqrt{1+w}}{(w-1)}, \frac{\sqrt{2}C\sqrt{w}}{(w-1)} - \frac{C\sqrt{1+w}}{(w-1)} \right)$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{1+w}} \left( \frac{\sqrt{2}A|C|}{(w-1)} - \frac{AC\sqrt{1+w}}{(w-1)}, \frac{\sqrt{2}B|C|}{(w-1)} - \frac{BC\sqrt{1+w}}{(w-1)}, \frac{\sqrt{2}|C|w}{(w-1)} - \frac{C\sqrt{1+w}}{(w-1)} \right)$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}|C|}{(w-1)\sqrt{1+w}} (A, B, w) - \frac{C}{(w-1)} (A, B, 1)$$

del mismo modo o teniendo en cuenta que  $F_2 = 2C - F_1$  se sigue que

$$F_2 = -\frac{\sqrt{2}|C|}{(w-1)\sqrt{1+w}} (A, B, w) - \frac{C}{(w-1)} (A, B, 1)$$

por lo tanto, los focos de la hipérbola vienen dados por

$$F = \pm \frac{\sqrt{2}C}{(w-1)\sqrt{1+w}} (A, B, w) - \frac{C}{(w-1)} (A, B, 1)$$

donde  $w = A^2 + B^2 > 1$  y la excentricidad

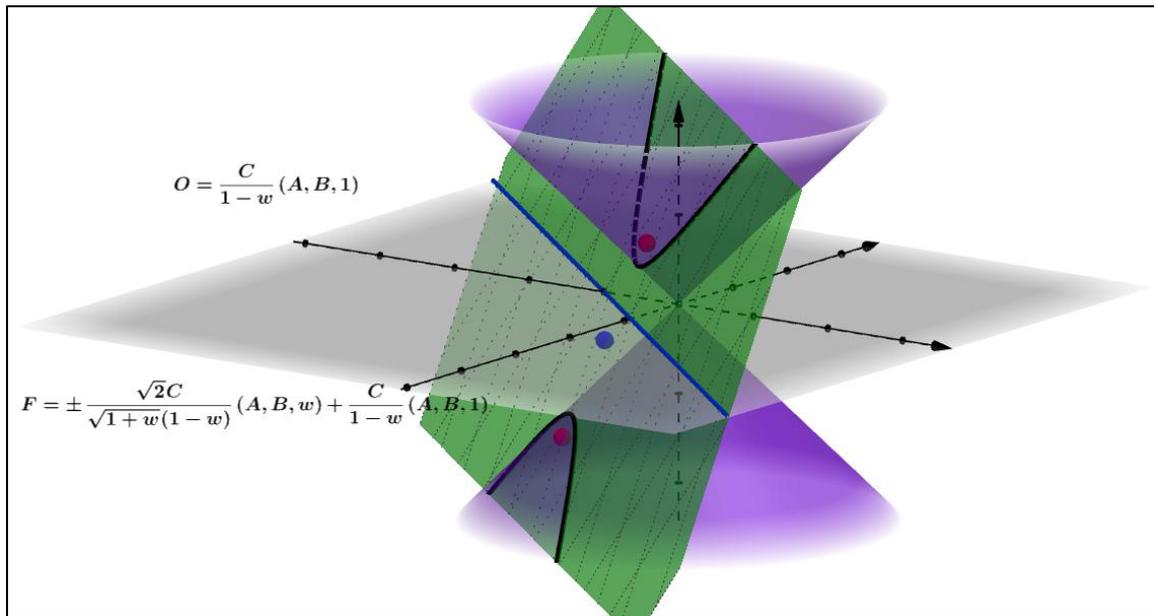
$$e = \frac{\sqrt{b^2 + a^2}}{b} = \frac{\sqrt{2}|C|\sqrt{w}}{w-1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} < \sqrt{2}$$

similar que el caso para la elipse, pero aquí al ser  $w > 1$  se tiene si  $w \rightarrow +\infty$  entonces  $e \rightarrow \sqrt{2}$  y si  $w \rightarrow 1^+$  entonces  $e \rightarrow 1^+$  por lo que

$$1 < e < \sqrt{2}$$

**Figura 22.**

*Hipérbola en  $R^3$*



*Nota.* En la figura se muestra los focos y el centro de la Hipérbola.

**Observaciones:**

- Se debe cumplir que  $B \neq 0$  pues se está usando  $\mu$ .
- El hecho de que  $h = 0$  nos dice que el eje focal de la hipérbola corta al eje  $Z$  y de

$$k = -\frac{C\sqrt{w}\sqrt{1+w}}{w-1}$$

se concluye que la hipérbola está desplazada hacia arriba si  $C < 0$

y hacia abajo si  $C > 0$ .

- De  $a = \frac{|C|}{\sqrt{w-1}} \wedge b = \frac{|C|\sqrt{1+w}}{w-1}$  se tendrá que la hipérbola se hará más ancha a medida que  $C \rightarrow \pm\infty$  o que  $w \rightarrow 1^+$ .
- Puesto que  $1 < e < \sqrt{2}$  se sigue que al intersecar las dos superficies no podremos encontrar hipérbolas con excentricidad mayores o iguales a  $\sqrt{2}$ .
- Cuando el plano es perpendicular al plano XY la excentricidad de la hipérbola es  $1 < e \leq \sqrt{2}$ .

### 2.4.3 Órbitas satelitales

La primera ley de Kepler nos indica que las órbitas descritas por los planetas alrededor del Sol son elípticas, encontrando al Sol ubicado en uno de los focos. Lo mismo ocurre con los satélites que orbitan la Tierra pues estos siguen las mismas leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. En esta sección se mostrará una forma de obtener las coordenadas (posición y velocidad) de los satélites que orbitan nuestro planeta usando rotaciones especiales, para ello se dan algunas definiciones previas sobre términos de satélites en órbita.

#### Definiciones de términos para satélites en órbita terrestre

- **Plano Ecuatorial:** Es el plano que pasa por el por el ecuador terrestre y perpendicular al eje de la Tierra.
- **Perigeo:** El punto de la órbita del satélite que está más cerca de la Tierra.
- **Apogeo:** El punto de la órbita del satélite que está más lejos alejado de la Tierra.
- **Línea de ápsides:** Es la línea que une el perigeo y el apogeo y que pasa por el centro de la Tierra (esto se debe a la simetría de la elipse y que la Tierra este ubicada en uno de los focos).

- **Nodo ascendente:** Es el punto donde se intersecan el plano ecuatorial y la órbita cuando el satélite va de hemisferio sur a hemisferio norte.
- **Nodo descendente:** Es el punto donde se intersecan el plano ecuatorial y la órbita cuando el satélite va de hemisferio norte a hemisferio sur.
- **Línea de nodos:** Es la línea que une el nodo ascendente y nodo descendente y pasa también por el centro de la Tierra.

(Roddy, 2006)

Para poder ubicar el satélite en la órbita respecto a un sistema de coordenadas tridimensionales es necesario conocer un conjunto de números denominados elementos orbitales.

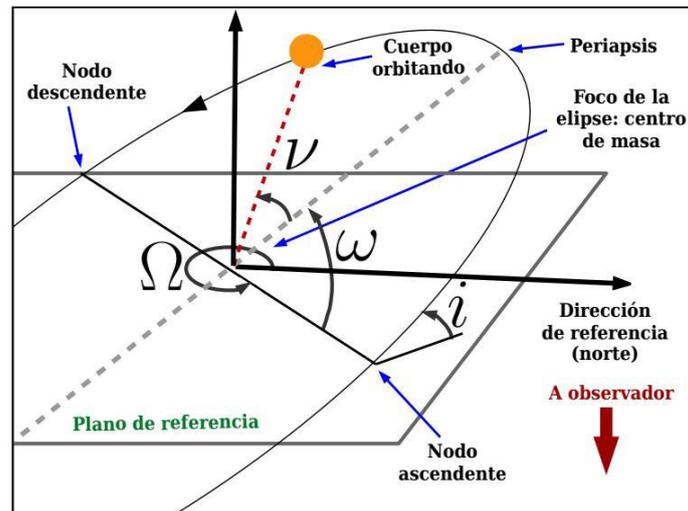
#### **Elementos orbitales keplerianos**

- 1) **Semieje mayor ( $a$ ):** Representa la longitud del semieje mayor de la elipse.
- 2) **Excentricidad ( $e$ ):** Es un parámetro que determina la cantidad en la que la órbita se desvía de un círculo perfecto.
- 3) **Ascensión recta del nodo ascendente ( $\Omega$ ):** Es el ángulo en sentido antihorario, en el plano ecuatorial, desde el eje X hasta el nodo ascendente, tiene un rango de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .
- 4) **Inclinación ( $i$ ):** Es el ángulo formado por los planos orbital y ecuatorial. Se mide en el nodo ascendente, yendo de este a norte tiene un rango de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .
- 5) **Argumento de perigeo ( $\omega$ ):** Es el ángulo desde el nodo ascendente hasta el perigeo en el plano orbital y en la dirección del movimiento del satélite. También puede interpretarse como un ángulo de rotación de la elipse sobre el plano orbital respecto a la línea de nodos.
- 6) **Anomalía Verdadera ( $v$ ):** Es el ángulo desde el perigeo hasta la posición en la que se encuentra el satélite sobre la órbita.

(Roddy, 2006)

### Figura 23.

#### *Elementos Orbitales*



*Nota.* En la figura se muestra la órbita de un cuerpo y sus elementos orbitales. Adaptado de, *Todos los parámetros orbitales que caracterizan la órbita de un cuerpo orbitando alrededor de un centro de masa* por Henrique López, 2016, Estabilidad orbital de planetas circumbinarios.

Es importante mencionar que los elementos orbitales 1 y 2 definen la forma y el tamaño de la órbita, los elementos 3 y 4 muestran cómo está posicionado el plano orbital respecto al sistema de coordenadas, y los dos últimos elementos orbitales nos ayudarán a ubicar la posición exacta del satélite en su órbita. Cabe aclarar que todos los ángulos están dados en el sistema sexagesimal y las distancias estarán dadas en kilómetros.

Se despreciarán las fuerzas perturbadoras externas que puedan influir en el movimiento de los satélites terrestres, como se sabe no solo la Tierra determina la órbita satelital, sino que objetos masivos como el Sol, la Luna, Júpiter entre otras pueden llegar a modificar la órbita.

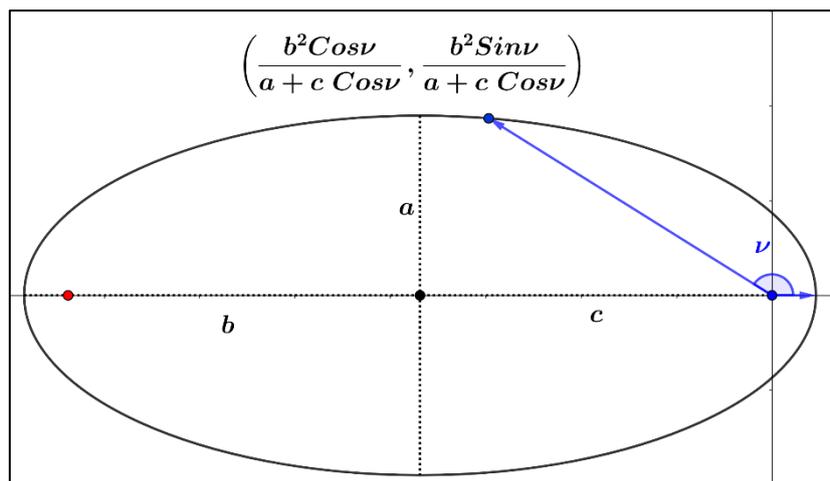
Si se considerasen estas perturbaciones entonces tendríamos valores ligeramente distintos a las que se obtendrán.

### Pasos para obtener las coordenadas del satélite

Se comienza a describir la órbita partiendo de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ . Puesto que la Tierra es un foco de la órbita (centro de coordenadas) entonces no se puede usar la parametrización habitual, sino una en la que el parámetro  $\nu \in [0, 2\pi]$  representa el ángulo medido en el foco desde el eje  $X$  y un punto de la curva.

#### Figura 24.

*Parametrización de una elipse de centro  $(-c, 0)$  y semiejes  $a, b$ .*



$$\Psi(\nu) = \left( \frac{b^2 \cos \nu}{a + c \cos \nu}, \frac{b^2 \sin \nu}{a + c \cos \nu} \right), \nu \in [0, 2\pi]$$

La razón para usar  $\nu$  como parámetro es porque esta representará la anomalía verdadera. Ahora se aplica una rotación antihoraria del perigeo  $0 \leq \omega \leq 360^\circ$ , ver el capítulo

**2.3.1.** Por tanto, se tiene que

$$\bar{\Psi}(\nu) = \left( \frac{b^2 \cos \nu}{a + c \cos \nu} \cos \omega - \frac{b^2 \sin \nu}{a + c \cos \nu} \sin \omega, \frac{b^2 \cos \nu}{a + c \cos \nu} \sin \omega + \frac{b^2 \sin \nu}{a + c \cos \nu} \cos \omega \right)$$

Luego, dado que la órbita se encuentra sobre un plano inclinado que pasa por el origen de coordenadas (se excluye el caso del que el plano sea vertical para este análisis) de la forma  $z = Ax + By$ ,  $B \neq 0$  Se usará la rotación especial  $\mu$  para ubicar adecuadamente la órbita, dado que  $A$  y  $B$  son constantes desconocidas estas se deben hallar a partir de los elementos orbitales  $i$  y  $\Omega$ , se cumple que:

$$\begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} = |\tan(i)| \\ -\frac{A}{B} = \tan \Omega \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A^2 + B^2 = \tan^2(i) \\ -A = B \tan \Omega \end{cases}$$

de donde

$$\begin{aligned} A &= \pm |\tan(i) \cos(\Omega)| \\ B &= \pm |\tan(i) \sin(\Omega)| \end{aligned}$$

Los signos de A y B deben determinarse a partir de los cuadrantes donde pertenecen

$$\text{para } 0 \leq i < 90^\circ \begin{cases} \text{Si } 0 \leq \Omega < 90^\circ \rightarrow A \leq 0, B > 0 \\ \text{Si } 90^\circ < \Omega < 180^\circ \rightarrow A < 0, B < 0 \\ \text{Si } 180^\circ \leq \Omega < 270^\circ \rightarrow A \geq 0, B < 0 \\ \text{Si } 270^\circ < \Omega \leq 360^\circ \rightarrow A \geq 0, B > 0 \end{cases}$$

$$\text{para } 90^\circ < i \leq 180^\circ \begin{cases} \text{Si } 0 \leq \Omega < 90^\circ \rightarrow A \geq 0, B < 0 \\ \text{Si } 90^\circ < \Omega < 180^\circ \rightarrow A > 0, B > 0 \\ \text{Si } 180^\circ \leq \Omega < 270^\circ \rightarrow A \leq 0, B > 0 \\ \text{Si } 270^\circ < \Omega \leq 360^\circ \rightarrow A \leq 0, B < 0 \end{cases}$$

esto servirá para implementar el un algoritmo para la determinación de A y B. Aplicando la rotación especial  $\mu$  a  $\Psi_2(v)$  se obtiene una la órbita sobre el plano inclinado o plano orbital

$$\mu(\bar{\Psi}(v)) = \left( \frac{|B|\bar{\Psi}_1(v)}{\sqrt{w}} + \frac{A\bar{\Psi}_2(v)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{-AB\bar{\Psi}_1(v)}{|B|\sqrt{w}} + \frac{B\bar{\Psi}_2(v)}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}}, \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \bar{\Psi}_2(v) \right)$$

donde  $w = A^2 + B^2$ , con este análisis de los elementos orbitales puede determinarse las coordenadas del satélite a partir de los elementos orbitales  $(a, e, \Omega, \omega, v, i)$ . En muchos casos dos de estos valores no se dan directamente, en su lugar se conocen el movimiento medio  $n$  y anomalía media  $M$ .

**Two Line Elements Set (TLE)**

Es un conjunto numérico de dos líneas que se usan para determinar la posición y velocidad de un satélite en un determinado momento. La primera lista consta de doce elementos y la segunda lista que es en la que se centrará esta sección contiene diez, aquí se puede encontrar los elementos orbitales a excepción del semieje mayor  $a$  y la anomalía verdadera  $v$ , en su lugar tendremos valores equivalentes que solo necesitará hallarse con algunos cálculos y conversiones. En las siguientes tablas se muestra el Two Line Elements Set.

**Figura 25.**

*Ejemplo de un TLE*

Card #	Satellite Number	Class	International Designator			Epoch					Mean motion derivative (rev/day /2)			Mean motion second derivative (rev/day2 /6)			Bstar (/ER)			Ep	Elem num	Chk Sum
			Year	Lch#	Piece	Yr	Day of Year (plus fraction)					S	S .		S .	S .		S	E	Ep		
1	16609	U	86	017	A	93	352	.53	502	934	.	00007889	0	000000	0	10529	-3	0			342	
			Inclination (deg)			Right Ascension of the Node (deg)			Eccentricity			Arg of Perigee (deg)			Mean Anomaly (deg)			Mean Motion (rev/day)			Epoch Rev	Chk
2	16609		51	.619	0	13	.334	0	0005770	102	.568	0	257	.595	0	15	.591	140	704	447869		

*Nota.* Formato para el conjunto de elementos de dos líneas, se puede observar en la segunda línea los seis elementos orbitales usados normalmente. Adaptado de *Transmission Format for the Two-Line Element Set.* (p. 107) por David A. Vallado, 2013, *Fundamentals of astrodynamics and applications.*

Como en el TLE se da el movimiento medio  $n$  y la anomalía media  $M$  es necesario hallar el valor de  $a$  y  $v$  a partir de estos. El movimiento medio  $n$  se define como

$$n = \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{a^3}}$$

donde  $\bar{\mu}$  es llamado parámetro gravitacional estándar. (Vallado, 2013)

El movimiento medio está expresado en revoluciones/día, para hallar el semieje mayor  $a$  a partir de  $n$  es necesario expresarlo en radianes sobre segundos.

$$\bar{n} = n \frac{2\pi}{24(60)(60)}$$

El llamado parámetro gravitacional estándar puede estar expresado en distintas unidades, además está ligado a un cuerpo, ya que es igual al producto de la masa del cuerpo con la constante de gravitación universal. Para la Tierra se tiene el siguiente valor

$$\bar{\mu} = 3.986005 \times 10^{14} \frac{m^3}{s^2} = 398600.5 \frac{km^3}{s^2}$$

entonces

$$a = \sqrt[3]{\frac{\bar{\mu}}{\bar{n}^2}} = \sqrt[3]{\frac{398600.5}{\left(\frac{2\pi n}{24(60)(60)}\right)^2}} = \sqrt[3]{\frac{(398600.5)(24^2)(60^2)(60^2)}{4\pi^2 n^2}} km$$

por otro lado, para determinar la anomalía verdadera  $\nu$  a partir de la anomalía media  $M$  se usan las siguientes relaciones.

La ecuación de Kepler relaciona la anomalía media  $M$  y la anomalía excéntrica  $E$ , hace falta un método numérico para calcularla y se obtiene de  $M = E - e \sin(E)$ . (Roddy, 2006)

De esta relación se calcula  $E$ , ambas expresadas en radianes. Además, se tiene la ecuación que relaciona la anomalía verdadera  $\nu$  con  $E$ , llamada también ecuación de Gauss

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

(Roddy, 2006)

A partir de esta ecuación podemos determinar el valor de  $\nu$  necesaria para obtener la posición y velocidad del satélite. Existen muchos repositorios donde se puede obtener el conjunto de dos líneas TLE.

### **Ejemplo 2.58.**

Hallar la posición y velocidad de un satélite con los siguientes elementos orbitales  $p = 11067.790$ ,  $e = 0.83285$ ,  $i = 87.87^\circ$ ,  $\Omega = 227.89^\circ$ ,  $\nu = 92.335^\circ$ ,  $\omega = 53.38^\circ$ .

**Solución:** Aquí  $p = \frac{b^2}{a}$  luego  $a = \frac{p}{1-e^2} = 36126.64283480516$  km haciendo uso de

nuestro algoritmo en MATLAB se obtiene los siguientes resultados:

**Tabla 1.***Resultados numéricos del algoritmo en MATLAB*

<b>Datos</b>	<b>Valores en km</b>
<b>Posición</b>	(6525.368121 , 6861.531835 , 6449.118614 )
<b>Velocidad</b>	(4.902279 , 5.533140 , -1.975710 )
<b>Rapidez</b>	7.651889
<b>Distancia del satélite hasta el centro de la tierra</b>	11456.534342
<b>Perigeo</b>	( -2281.733870 , -2792.992455 , 4843.262476 )
<b>Apogeo</b>	( 25019.897841 , 30626.001921 , -53107.829066 )
<b>Centro de órbita</b>	( 10228.215050 , 12520.008506 , -21710.652057 )
<b>Nodo ascendente</b>	( -4958.296297 , -5485.530274 , 0.000000 )
<b>Nodo descendente</b>	( 14748.734395 , 16317.021853 , -0.000000 )

En el siguiente gráfico se muestran los resultados obtenidos por Vallado (2013) para el mismo ejercicio puede observarse la precisión de los cálculos.

**Figura 26.**

*Posición y velocidad de un satélite*

$$\begin{aligned} \vec{r}_{IJK} &= \left[ \frac{IJK}{PQW} \right] \vec{r}_{PQW} = \begin{bmatrix} -0.377 & 860 & 07 & 0.554 & 641 & 79 & -0.741 & 346 & 25 \\ -0.462 & 525 & 60 & 0.580 & 556 & 38 & 0.670 & 092 & 80 \\ 0.802 & 054 & 76 & 0.596 & 092 & 93 & 0.037 & 166 & 95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -466.7639 \\ 11447.0219 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6525.344 \\ 6861.535 \\ 6449.125 \end{bmatrix} \text{ km} \\ \\ \vec{v}_{IJK} &= \left[ \frac{IJK}{PQW} \right] \vec{v}_{PQW} = \begin{bmatrix} -0.377 & 860 & 07 & 0.554 & 641 & 79 & -0.741 & 346 & 25 \\ -0.462 & 525 & 60 & 0.580 & 556 & 38 & 0.670 & 092 & 80 \\ 0.802 & 054 & 76 & 0.596 & 092 & 93 & 0.037 & 166 & 95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.996 & 222 \\ 4.753 & 601 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4.902 & 276 \\ 5.533 & 124 \\ -1.975 & 709 \end{bmatrix} \text{ km/s} \end{aligned}$$

*Nota.* Adaptado de *Fundamentals of Astrodynamics and Applications* (p. 152) por David A. Vallado, 2013.

**Ejemplo 2.59.**

El siguiente TLE son los datos de entrada para el satélite (spot-6), determinar la posición y velocidad. (Saleh y Abdulla, 2020)

**Tabla 2.**

*Conjunto de dos líneas para el spot-6*

1	38755U	12047A	14148.142953	.00000295	00000-0	73402	0	9574
2	38755	98.1987	215.8134	0001368	80.3963	279.7434	14.58528066	91251

**Tabla 3.***Comparación de mi algoritmo con los resultados de otras investigaciones*

<b>Vectores</b>	<b>Mi algoritmo</b>	<b>Cartosat-2B (TLEs)</b>	<b>Cartosat-2B (our results)</b>	<b>Spot 6 (TLEs)</b>	<b>Spot 6 (our results)</b>	<b>Gsat-14 (TLEs)</b>
X (km)	<b>-5739.308786</b>	-6231,7560	-6234,8471	<b>-5736,9414</b>	-5740,1912	36095.3223
Y (km)	<b>-4138.662435</b>	-3189,4018	-3180,6681	<b>-4136,9553</b>	-4130,5381	-21779.412
Z (km)	<b>15.187708</b>	14,8069	13,9406	<b>15,1814</b>	12,2793	3,4839025
r <sub>mag</sub> (km)	<b>7075.904378</b>	7000,5204	7000,6716	<b>7072,9857</b>	7072,9215	42157.0290
V <sub>x</sub> (km/s)	<b>-0.612286</b>	0,4537396	-0,33406481	<b>-0,6124123</b>	-0,5190191	1.58869530
V <sub>y</sub> (km/s)	<b>0.878082</b>	0,9400898	1,0001334	<b>0,8782634</b>	0,9451343	2,6330807
V <sub>z</sub> (km/s)	<b>7.428827</b>	7,4776527	7,4760139	<b>7,4303591</b>	7,4292566	-0.0676820
V <sub>mag</sub> (km/s)	<b>7.505558</b>	7,5501615	7,5501169	<b>7,5071055</b>	7,5071469	3.07523442

### **III. MÉTODO**

#### **3.1 Tipo de investigación**

Este trabajo es una investigación teórica básica de diseño documental, aborda un tema ya existente y muestra algunos resultados propios obtenidos. Es una investigación documental pues fue realizada con el uso de libros y artículos relacionados al tema analizando la teoría, proponiendo ejemplos y resultados.

#### **3.2 Ámbito temporal y espacial**

El ámbito espacial en la cual se desarrolla esta investigación es en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional Federico Villarreal. El ámbito temporal será finalizado entre los meses de enero y julio del 2024.

#### **3.3 Variables**

No se definen las variables en este trabajo de investigación matemático.

#### **3.4 Población y muestra**

Dado que la presente investigación es de diseño documental no será necesario considerar población ni muestra.

#### **3.5 Instrumentos**

Búsqueda y revisión documentaria de artículos de investigación y libros. Uso del razonamiento crítico, lógico inductivo y deductivo.

#### **3.6 Procedimientos**

El procedimiento central es la recolección y clasificación de fuentes bibliográficas y posteriormente un análisis exhaustivo de información encontrada.

#### **3.7 Análisis de datos**

Puesto que el trabajo es de investigación documentaria en esta sección se desarrollará el análisis de resultados obtenidos de la revisión bibliográfica.

### 3.8 Consideraciones éticas

Teniendo en cuenta que el trabajo es de tipo básica documental todas las fuentes utilizadas son citadas adecuadamente. El procedimiento es:

- Recopilación de fuentes bibliográficas relacionadas al tema de investigación.
- Clasificación de fuentes bibliográficas hasta determinar el artículo principal y demás libros usados en la investigación.
- Elección de las definiciones y proposiciones adecuadas para demostrar el problema principal.
- Elaboración del informe final de la investigación.

#### IV. RESULTADOS

En respuesta al objetivo general de extender la fórmula de Rodrigues para vectores  $n$ -dimensionales dada por  $\exp(\theta u \Lambda v) = I - (1 - \cos \theta) \text{proy}_{uv} + \sin \theta (u \Lambda v)$  se ve en el **Teorema 2.52** que la matriz proveniente del producto cuña  $u \Lambda v$  con  $u, v \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|u \Lambda v\| = 1$  y  $\theta \in \mathbb{R}$  es una manera satisfactoria y hermosa de condensar los resultados, puede observarse que si tomamos como caso particular  $n = 3$ , esta fórmula se transforma en

$$u \Lambda v = \begin{pmatrix} 0 & u_1 v_2 - v_1 u_2 & u_1 v_3 - v_1 u_3 \\ u_2 v_1 - v_2 u_1 & 0 & u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 & u_3 v_2 - v_3 u_2 & 0 \end{pmatrix} = -\Lambda_{u \times v} = \Lambda_{-u \times v}$$

De donde  $\| -u \Lambda v \| = \| u \| \| v \| \sin \theta = \| u \times v \| = 1$ , si se define  $n = -u \times v$  ya se tiene el eje de rotación, además del **Lema 2.51**. se sabe que  $(u \Lambda v)^2 = -\|u \Lambda v\|^2 \text{proy}_{uv}$  esto es

$$\text{proy}_{uv} = -(u \Lambda v)^2 = -\Lambda_n^2$$

por lo tanto

$$\exp(\theta u \Lambda v) = I - (1 - \cos \theta) \text{proy}_{uv} + \sin \theta (u \Lambda v)$$

$$\exp(\theta u \Lambda v) = I - (1 - \cos \theta)(-\Lambda_n^2) + \sin \theta (\Lambda_n)$$

$$\exp(\theta u \Lambda v) = I + (1 - \cos \theta) \Lambda_n^2 + \sin \theta \Lambda_n$$

Si se compara esta expresión con  $R(n, \theta) = I + (\sin \theta) \Lambda_n + (1 - \cos \theta) \Lambda_n^2$  en  $\mathbb{R}^3$  se puede notar que al demostrar la fórmula general y hacer uso del hiperplano generado por  $u$  y  $v$ , se usa de manera **indirecta** el eje de rotación  $n = -u \times v = v \times u$ , y no  $u \times v$  esto no representa al fin y al cabo ningún problema ya que como se explicó al principio, el sentido o dirección pueden ser obviados.

En relación con el objetivo específico de definir rotaciones especiales se tiene que las aplicaciones  $\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cuyas matrices están dadas por

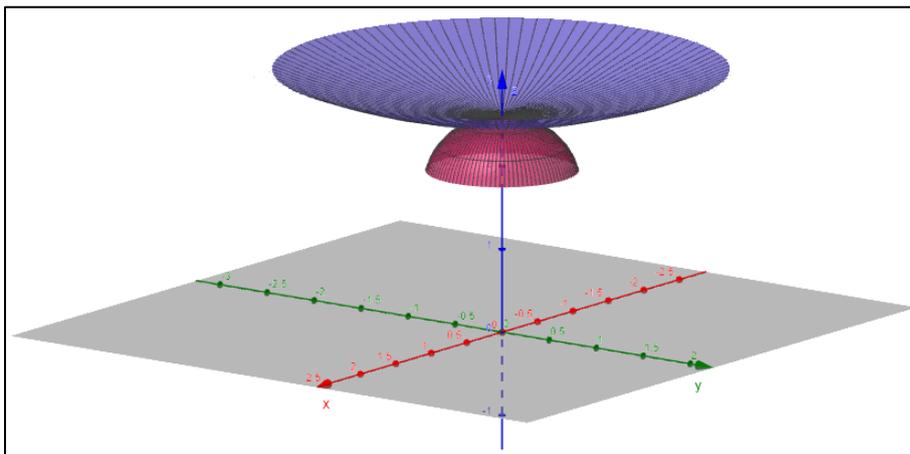
$$\mu = \begin{pmatrix} \frac{|B|}{\sqrt{w}} & \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \\ -\frac{AB}{|B|\sqrt{w}} & \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} \\ 0 & \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \frac{|B|}{\sqrt{w}} & \frac{-AB}{|B|\sqrt{w}} & 0 \\ \frac{A}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} & \frac{B}{\sqrt{w}\sqrt{1+w}} & \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{1+w}} \end{pmatrix}$$

nos permitieron demostrar, usando curvas, la fórmula de rotación de Rodrigues en  $\mathbb{R}^3$ .

Esto es, se busca la parametrización de un círculo situado en el plano  $Z = AX + BY + C$  conociendo solo el punto inicial y el centro de rotación, el método usado es geométrico y se basa en calcular el seno y coseno del ángulo de rotación en base a los coeficientes de las componentes eje de rotación. Como consecuencia de este método se pudo aplicar para conocer puntos notables de las secciones cónicas estudiando sus diversas posiciones y relacionándolas.

### Figura 27.

*Superficie generada por el foco de una elipse*



*Nota.* En el gráfico se muestran las superficies generadas por los focos de una sección cónica:

Elipse, cuyas ecuaciones paramétricas son  $F(A,B) = \pm \frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{1+w}(1-w)}(A,B,w) + \frac{C}{(1-w)}(A,B,1)$  donde

$w = A^2 + B^2 < 1$ , se puede notar que uno de los focos (signo +) se encuentra siempre debajo mientras que la otra (signo -) está arriba, esto para valores de  $C > 0$ .

Así mismo las rotaciones especiales permiten describir las órbitas de satélites.

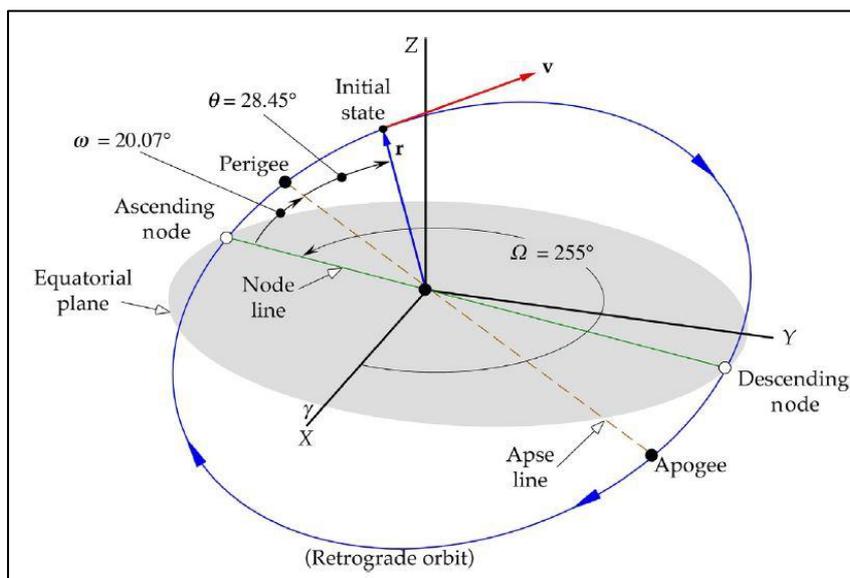
### Ejemplo 2.60.

Obtener la posición y velocidad del satélite con los siguientes elementos orbitales

$$a = 8788, e = 0.1712, i = 153.2^\circ, \Omega = 255.3^\circ, \nu = 28.45^\circ, \omega = 20.07^\circ.$$

### Figura 28.

*Elementos orbitales y posición del satélite*



*Nota.* En el gráfico se ven algunos elementos orbitales, la posición, sentido y velocidad del satélite. Aproximadamente la posición es  $r = -6042.0081\hat{i} - 3492.0747\hat{j} + 2504.5154\hat{k}$  y velocidad  $v = -3.456631\hat{i} + 6.616545\hat{j} + 2.537041\hat{k}$  en  $(km, km/s)$  respectivamente. Adaptado de *A plot of the orbit identified in Example 4.3.* (p. 195), por Howard D. Curtis, 2019, *Orbital Mechanics for Engineering Students.*

## V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A partir de los resultados obtenidos en la sección 2.3.6 se acepta la hipótesis planteada de que puede extenderse la fórmula de rotación de Rodrigues para  $\mathbb{R}^n$  dada por la definición (2.3.27). Este resultado guarda relación con lo establecido por Hanson (2011) quien proporciona la manera de reemplazar el producto vectorial de  $\mathbb{R}^3$  por nuevas operaciones entre vectores, el producto cuña de vectores es la clave principal, ya que proporciona el sustituto adecuado al producto cruz, pues al tomar la exponencial de estas matrices se obtienen las fórmulas de rotación en  $\mathbb{R}^n$ .

Por otro lado, el hecho de definir rotaciones especiales simplifica de cierta manera las operaciones para hallar, por ejemplo, las órbitas de los satélites ya que no solo se obtienen la velocidad y posición sino el perigeo, apogeo, nodo ascendente, nodo descendente, la ecuación de la línea de nodos, el centro de la órbita, etc. Estos resultados guardan relación con los ejemplos presentados por Vallado (2013), Saleh y Abdulla (2020), y Curtis (2019) quienes trabajan con algunas rotaciones elementales e incluso ecuaciones diferenciales.

## VI. CONCLUSIONES

- 6.1. En esta tesis se generalizó la fórmula de rotación de Rodrigues en  $\mathbb{R}^n$ , esto gracias a la introducción de nuevas operaciones entre vectores en  $\mathbb{R}^n$  como el producto cuña  $\Lambda: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_{n \times n}$  el cual está relacionado con el producto cruz en  $\mathbb{R}^3$  vía  $\|u \wedge v\| = \|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo formado por dichos vectores.
- 6.2. Se definieron rotaciones más sencillas entre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  denominadas rotaciones especiales, gracias a esto fue posible la demostración para las rotaciones en  $\mathbb{R}^3$  más aun no solo se puede aplicar a circunferencias sino a cualquier otra curva cónica o arbitraria. Igualmente son de utilidad para rotar curvas y describir trayectorias.
- 6.3. En esta tesis se demostró la fórmula de rotación Rodrigues de una forma distinta gracias al uso de curvas y las rotaciones especiales.

## VII. RECOMENDACIONES

Establecidas las conclusiones y resultados se recomienda que:

- 7.1. Al aplicar una rotación en espacio de dimensión mayor a tres, no se debe realizar una suposición inmediata sobre lo que se espera obtener ya que al ser un terreno que no podemos ver o imaginar de manera directa puede llegar a concluir resultados incorrectos. En ese sentido cuando se hace la rotación en  $\mathbb{R}^n$  y si  $q = R(u, v, \theta)p$  no es cierto que el ángulo formado por  $p$  y  $q$  es  $\theta$ , sino que la rotación se realizó en el hiperplano generado por  $u$  y  $v$ ; por esta razón deben verificarse dicho ángulo con los vectores  $a = \text{proy}_{uv}p$  y  $b = \text{proy}_{uv}q$  tal y como en el **Ejemplo 2.53**.
- 7.2. Las rotaciones especiales juegan un papel importante en el desarrollo de este trabajo, actúan como movimientos rígidos para las curvas, y solo se recomienda usarla para curvas contenidas en planos ya que esta fue una condición necesaria para su desarrollo. En otras palabras, si la curva no se encuentra sobre un plano de la forma  $Z = AX + BY$  entonces el resultado ya no será una curva contenida en el plano coordenado  $XY$ , sino una curva simplemente rotada.
- 7.3. En la demostración del **Teorema 2.38** no tomar cualquier vector normal al plano, sino solo uno que sea normal a la cara principal del plano  $Z = AX + BY$ , esto se debe a que debe haber concordancia con los casos establecidos en la sección **2.1.4 Orientación de un plano** lo que es imprescindible para las curvas orbitales.
- 7.4. Si bien las órbitas polares existen (cuando el plano orbital pasa por los polos o tiene ángulo de inclinación  $90^\circ$ ) no es recomendable tomar  $i = 90^\circ$  a pesar de que algunos programas pueden considerarlo como  $1.6331239 \times 10^{16}$  un valor muy grande, esto ocurre porque este caso no está dentro de los valores permitidos pues no existe  $\tan 90^\circ$ , en este caso se requiere estudiar los planos perpendiculares de manera particular.

## VIII. REFERENCIAS

- Apostol, T. (2002). *Calculus—Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades*. (2.<sup>a</sup> ed., Vol. 2). Reverté.
- Coutiño, D., y Maximenko, E. (s. f.). *Norma de Frobenius*.  
[http://esfm.egormaximenko.com/linalg/Frobenius\\_norm\\_es.pdf](http://esfm.egormaximenko.com/linalg/Frobenius_norm_es.pdf)
- Curtis, H. D. (2019). *Orbital mechanics for engineering students*. (4.<sup>a</sup> ed.). Butterworth-Heinemann.
- Dai, J. S. (2015). Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections. *Mechanism and Machine Theory*, 92, 144-152.  
<https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.03.004>
- Goldman, R. N. (1992). Cross product in four dimensions and beyond. *Graphics Gem III (IBM Version)*, 1992, 84-88. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050755-2.50028-2>
- Golub, G. H., y Van Loan, C. F. (1996). *Matrix computations*. (3.<sup>a</sup> ed.). Johns Hopkins University Press.
- Hanson, J. (2011). Rotations in three, four, and five dimensions.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1103.5263>
- Henríquez, R. A. (2016). *Estabilidad orbital de planetas circumbinarios*.
- López de la Rica, A., y de la Villa Cuenca, A. (1997). *Geometría diferencial*. Clagsa.
- Lovelock, D., y Rund, H. (1989). *Tensors, differential norms, and variational principles*. (1.<sup>a</sup> ed.). Dover Publications.
- Perdigão, M. (1995). *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial.
- Pita, C. (1995). *Cálculo vectorial*. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

- Pujol, J. (2013). The Rodrigues equations for the composition of finite rotations: A simple ab initio derivation and some consequences. *Applied Mechanics Reviews*, 65(5). <https://doi.org/10.1115/1.4025356>
- Roddy, D. (2006). *Satellite communications*. (4.<sup>a</sup> ed.). McGraw-Hill.
- Saleh, A. H., y Abdulla, F. M. (2020). Investigation of the state vectors and prediction of the orbital elements for Spot-6 satellite during 1300 periods with perturbations. *Journal of Physics: Conference Series*, 1664(1), 012010. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1664/1/012010>
- Slabaugh, G. G. (1999). Computing Euler angles from a rotation matrix. Retrieved on august, 6(2000), 39-63.
- Three-dimensional rotation matrices. (2012). <https://pdf4pro.com/view/three-dimensional-rotation-matrices-5b738b.html>
- Valdenebro, A. G. (2016). Visualizing rotations and composition of rotations with Rodrigues' vector. *European Journal of Physics*, 37(6), 065001. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/37/6/065001>
- Vallado, D. (2013). *Fundamentals of astrodynamics and applications*. (4.<sup>a</sup> ed.). Microcosm Press.