



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

**CARACTERIZACIÓN DE LAS NORMAS DIFERENCIABLES EN ESPACIOS DE
BANACH**

Línea de investigación:

Matemática pura y aplicada

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

Autor

Viera Castillo, Cristhian

Asesor

Quicaño Barrientos, Carlos Gilberto

ORCID: 0000-0003-1140-1531

Jurado

Contreras Tito, Vladimiro

Velásquez Alarcón, Jorge David

Aycho Flores, Milton Angelino

Lima - Perú

2024



"CARACTERIZACION DE LAS NORMAS DIFERENCIABLES EN ESPACIOS DE BANACH"

INFORME DE ORIGINALIDAD

16%

INDICE DE SIMILITUD

16%

FUENTES DE INTERNET

4%

PUBLICACIONES

5%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	pt.scribd.com Fuente de Internet	2%
2	bibcyt.ucla.edu.ve Fuente de Internet	1%
3	repositorio.unfv.edu.pe Fuente de Internet	1%
4	webs.um.es Fuente de Internet	1%
5	blogs.mat.ucm.es Fuente de Internet	1%
6	docs.google.com Fuente de Internet	1%
7	repositorio.ufla.br Fuente de Internet	1%
8	ri.ues.edu.sv Fuente de Internet	<1%
9	docplayer.es Fuente de Internet	



Universidad Nacional
Federico Villarreal

VRIN | VICERRECTORADO
DE INVESTIGACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

CARACTERIZACIÓN DE LAS NORMAS DIFERENCIABLES EN ESPACIOS DE BANACH

Línea de Investigación:
Matemática pura y aplicada

Tesis para optar el Título Profesional de
Licenciado en Matemática

Autor
Viera Castillo, Cristhian

Asesor
Quicaño Barrientos, Carlos Gilberto
(ORCID: 0000-0003-1140-1531)

Jurado
Contreras Tito, Vladimiro
Velásquez Alarcón, Jorge David
Aycho Flores, Milton Angelino

Lima - Perú
2024

Caracterización de las Normas Diferenciables en Espacios de Banach

por

Cristhian Viera Castillo

Tesis presentada a consideración del cuerpo de docentes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional Federico Villarreal, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática

DEDICATORIA

A mis amados padres, Victor Viera Peña y Mirtha Castillo Velasquez, y a mi querido hermano, Victor Viera Castillo.

Por su constante apoyo, ánimo inquebrantable y presencia afectuosa han sido el faro que ha iluminado mi camino académico. Este logro no solo es mío, sino también de ustedes, quienes han sido mi fuente de inspiración y guía. Con profundo cariño, dedico este trabajo a la familia que ha sido mi mayor sostén, reconociendo en cada uno de ustedes, un eslabón valioso en mi camino profesional.

AGRADECIMIENTOS

- A Dios, por proporcionarme la fuerza esencial para culminar mi carrera profesional y por compartir un poco de su infinito conocimiento durante la elaboración de esta tesis.
- A mi madre Mirtha, por su inmenso amor, confianza y valiosas lecciones que me han enseñado la importancia de la perseverancia y seguir siempre hacia adelante.
- A mi padre Victor, por su constante apoyo y sabias enseñanzas, mostrándome que cualquier problema en la vida tiene una solución.
- A mi hermano Victor, quien ha sido una fuente invaluable de consejos y un inspirador ejemplo tanto en su calidad humana como en su desempeño profesional.
- A mi asesor, Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos, por su invaluable orientación y minuciosas observaciones durante todo el proceso de creación y redacción de mi tesis.
- Al MSc. Milton Angelino Aycho Flores, por sus valiosas recomendaciones, las cuales han contribuido significativamente a la continua mejora de mi trabajo de tesis.
- A todos mis profesores de la Universidad Nacional Federico Villarreal, por su dedicación y orientación invaluable a lo largo de mi trayectoria universitaria. Su compromiso con la enseñanza ha sido esencial para mi desarrollo, y estoy profundamente agradecido por transmitir su conocimiento y pasión por las matemáticas hacia mí.
- A mis amigos de la Universidad Nacional Federico Villarreal, con quienes compartí numerosas vivencias, aprendizajes y, especialmente, momentos inolvidables que enriquecieron mi vida universitaria.

ÍNDICE

I.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	Descripción y formulación del problema	2
1.2	Antecedentes	2
1.3	Objetivos	4
1.3.1	Objetivo General.....	4
1.3.2	Objetivos Específicos	4
1.4	Justificación	5
II.	MARCO TEÓRICO.....	7
2.1	Espacios Métricos	7
2.2	Espacios Vectoriales Normados.....	8
2.3	Aplicaciones lineales y acotadas en espacios normados	15
2.4	Espacio Dual y Reflexividad.....	19
2.5	Funciones convexas en Espacios de Banach.....	28
2.6	Diferenciabilidad de la norma en espacios de Banach.....	35
III.	MÉTODO	51
3.1	Tipo de Investigación	51
3.2	Ámbito Temporal Espacial.....	51
3.3	Variables.....	51
3.4	Población y Muestra.....	51
3.5	Instrumentos.....	52

3.6	Procedimiento	52
3.7	Análisis de Datos	53
3.8	Consideraciones Éticas	53
IV.	RESULTADOS	54
4.1	Teorema de caracterización de las normas Frechét diferenciable	54
4.2	Primera consecuencia del teorema de caracterización de la norma	62
4.3	Segunda consecuencia del teorema de caracterización de la norma	63
V.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS	65
VI.	CONCLUSIONES	66
VII.	RECOMENDACIONES	67
VIII.	REFERENCIAS	68

RESUMEN

En esta investigación, se llevó a cabo un estudio exhaustivo sobre la diferenciabilidad de la norma en un espacio de Banach. El objetivo primordial consistió en presentar una perspectiva innovadora mediante la aplicación de conceptos abstractos comunes teniendo en cuenta un teorema de caracterización de norma diferenciable, avanzando así en la comprensión de la diferenciabilidad. Durante este proceso, se realizaron revisiones bibliográficas de artículos y revistas científicas relevantes para respaldar y enriquecer el análisis. Además, se llevaron a cabo ejemplos concretos como parte integral de la metodología. En el transcurso de esta investigación, se desarrolló un teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciables (teorema de Šmulian), apoyado en una sólida base de conocimientos previos tales como aplicaciones lineales acotadas en espacios normados, espacios duales, reflexividad, funciones convexas, y la diferenciabilidad de Fréchet y de Gâteaux en espacios de Banach. Este enfoque permitió una comprensión más profunda de las propiedades de diferenciabilidad en el ámbito de los espacios de Banach, consolidando así el fundamento teórico de la investigación.

Palabras clave: *espacio de Banach, diferenciabilidad de Fréchet, diferenciabilidad de Gâteaux.*

ABSTRACT

In this research, a comprehensive study of norm differentiability in a Banach space was carried out. The primary goal was to present an innovative perspective by applying common abstract concepts to a differentiable norm characterization theorem, thus advancing the understanding of differentiability. During this process, literature reviews of relevant scientific articles and journals were performed to support and enrich the analysis. In addition, concrete examples were carried out as an integral part of the methodology. In the course of this research, a characterization theorem for differentiable Fréchet norms (Šmulian's theorem) was developed, supported by a solid base of prior knowledge such as bounded linear mappings in normed spaces, dual spaces, reflexivity, convex functions, and Fréchet and Gâteaux differentiability in Banach spaces. This approach allowed a deeper understanding of differentiability properties in the field of Banach spaces, thus consolidating the theoretical foundation of the research.

Keywords: *banach space, Frechét differentiability, Gâteaux differentiability.*

I. INTRODUCCIÓN

El análisis funcional, como rama propia de las matemáticas, se adentra en la exploración detallada de espacios de funciones, desplegando un enfoque que va más allá de la mera manipulación algebraica. Su origen se encuentra intrínsecamente ligada al estudio de transformaciones fundamentales, como la transformación de Fourier, que desencadenaron el interés en comprender la estructura y propiedades de funciones en contextos más generales. Este campo se revela como una guía en el análisis de ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales, proporcionando herramientas conceptuales y metodológicas esenciales para abordar fenómenos complejos en diversas disciplinas.

El estudio de espacios normados en el análisis funcional aporta una dimensión crucial, permitiendo la definición precisa de normas que mide la magnitud de elementos en dichos espacios. Esta característica no solo confiere rigurosidad matemática, sino que también establece las bases para entender la convergencia, continuidad, comportamiento geométrico y diferenciabilidad de funciones en un contexto más general. Los espacios de Banach son un tipo especial de espacio normado que posee la propiedad adicional de la completitud, la cual garantiza que toda sucesión de Cauchy en el espacio converge a un límite dentro del espacio. Estos espacios desempeñan un papel fundamental en el análisis funcional, proporcionando un fundamento sólido para el estudio de las funciones y las ecuaciones en espacios vectoriales.

La diferenciabilidad en espacios de Banach constituye un concepto esencial en el análisis funcional, destacando por su capacidad para generalizar la noción tradicional de derivadas a contextos más amplios y abstractos. Una función $f: E \subseteq X \rightarrow Y$, donde X y Y son espacios de Banach, se considera diferenciable en un punto \bar{x} de su dominio si existe una aplicación lineal continua, denominada derivada de f en \bar{x} que aproxima adecuadamente el cambio de f en las cercanías de \bar{x} .

1.1 Descripción y formulación del problema

1.1.1 Descripción

El presente trabajo de tesis consiste en una exploración exhaustiva destinada a proporcionar una comprensión más profunda de las normas diferenciables en espacios de Banach. La elección de los espacios de Banach como objeto de estudio no solo implica una extensión natural de los espacios normados, sino que también permite abordar problemas analíticos más sofisticados al considerar la completitud normada. Además, se llevará a cabo un minucioso análisis de los aspectos de la diferenciabilidad en los sentidos de Fréchet y Gâteaux en espacios normados generales. Como parte central de la investigación, se desarrolla un teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciables en espacios de Banach con dos consecuencias de dicho teorema. En conclusión, se busca un un mejor entendimiento sobre las propiedades fundamentales de la diferenciabilidad en este contexto.

1.1.2 Formulación del Problema

¿Cuáles son las condiciones suficientes y necesarias para que una norma en un espacio de Banach sea diferenciable en el sentido de Fréchet?

1.2 Antecedentes

En el trabajo desarrollado por Reyes (2010) se especifica de manera minuciosa las definiciones fundamentales en torno a la diferenciabilidad de Fréchet y de Gâteaux. Este análisis inicial sienta las bases para explorar con mayor profundidad el Espacio de Asplund, donde se aborda una conclusión más robusta mediante el estudio de la derivada de Fréchet. Además, el autor profundiza en lo que es el principio variacional de Ekeland, desplegando conexiones

significativas con el teorema de Bishop–Phelps y recalcando una de sus principales consecuencias.

En la publicación electrónica de la Universidad de Valencia desarrollada por Garcia (2007) nos presenta las definiciones detalladas sobre la derivada de Gâteaux y Frechét, explorando su conexión en espacios de dimensión infinita. Este análisis inicial establece las bases necesarias para abordar de manera más profunda el estudio del cálculo y sus variaciones más generales, resaltando la importancia de comprender estas herramientas matemáticas en el contexto de funciones no lineales. Asimismo, el entendimiento proporcionado en estas definiciones facilita la posterior aplicación de estos conceptos en problemas más avanzados, consolidando así la comprensión general del análisis funcional no lineal.

En Cabrales y Rojas (2006) se presenta un criterio que establece la diferenciabilidad de una función $f: X \rightarrow Y$, donde X y Y son espacios de Banach. Este criterio no solo es fundamental para generalizar las reglas tradicionales del cálculo diferencial, sino que también desempeña un papel crucial en la obtención de la diferenciabilidad de algunas normas de espacios funcionales clásicos. La meticulosa explicación de este criterio proporciona una base sólida para comprender cómo la diferenciabilidad se extiende a contextos más generales, permitiendo así aplicaciones más amplias en el análisis funcional no lineal.

En el trabajo desarrollado por Chillitupa y Matencio (2013) se expone de manera exhaustiva los conceptos fundamentales del análisis funcional, abordando aspectos clave como espacios vectoriales, aplicaciones lineales y multilíneas, espacios normados, espacio de Banach y equivalencia de normas. Esta sólida base teórica sienta los cimientos necesarios para la posterior

exploración de definiciones y aplicaciones relacionadas con la diferenciabilidad en espacios de Banach. Se concluye con una exploración detallada de las derivadas de orden superior en espacios de Banach, incluyendo aspectos como la segunda derivada y derivadas sucesivas, consolidando así un enfoque completo y riguroso en el estudio de funciones en estos contextos matemáticos.

En el artículo electrónico presentado por Sarsoruo (2022) se destaca la existencia de la diferenciabilidad de una función en un punto específico conlleva a la presencia de un límite y continuidad en dicho punto. El autor aborda conceptos fundamentales como límite, continuidad, linealidad y bilinealidad, resaltando su importancia en el análisis de la teoría general de diferenciabilidad en espacios normados. El propósito principal del artículo es introducir un enfoque novedoso que emplea ideas abstractas comunes para promover una comprensión más profunda de la diferenciación. Además, se exploran resultados significativos relacionados con la diferenciabilidad y continuidad de funciones implícitas en los espacios de Banach.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Enunciar y demostrar un teorema de caracterización de normas diferenciables en un espacio de Banach.

1.3.2 Objetivos Específicos

- a) Estudiar las nociones de diferenciabilidad Frechét y Gâteaux, con especial atención a cuestiones de diferenciabilidad de la norma en espacios de Banach.
- b) Analizar la relación existente entre la diferenciabilidad en espacios normados y el teorema de caracterización de las normas Frechét diferenciables.

- c) Estudiar las consecuencias que se dan a partir del teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciables.
- d) Explorar ciertas características geométricas de las normas dentro de un espacio de Banach

1.4 Justificación

La presente investigación se embarca en la caracterización de normas diferenciables en espacios de Banach para abordar una brecha de conocimiento existente en el análisis funcional. La noción de diferenciabilidad en estos espacios desempeña un papel crucial en la comprensión de la estructura y el comportamiento de funciones y operadores. La falta de una caracterización detallada restringe la capacidad de entender completamente las propiedades específicas y las relaciones entre las funciones en estos espacios. La necesidad de una comprensión más exhaustiva se manifiesta en el deseo de superar esta limitación y proporcionar una base sólida para futuras investigaciones en este campo.

El presente estudio busca proporcionar una comprensión más profunda de las normas diferenciales, especialmente desde la perspectiva de Fréchet. Esta comprensión no sólo enriquecerá la teoría del análisis funcional, sino que también tendrá implicaciones prácticas en diversas áreas, así como la optimización no lineal, las ecuaciones diferenciales parciales, etc. La identificación de propiedades locales y globales de funciones diferenciables en espacios de Banach facilitará la aplicación efectiva de estas teorías en diversos contextos. Ante ello, la importancia de esta investigación es la de proporcionar herramientas más precisas para resolver problemas complejos que involucran funciones en espacios de Banach, lo que traerá beneficios tanto teóricos como prácticos para la comunidad académica.

La finalidad de esta investigación es contribuir al desarrollo continuo de la teoría de análisis funcional, al proporcionar herramientas más precisas y específicas para el estudio de

funciones y operadores en espacios de Banach. Al caracterizar las normas diferenciables y explorar teorema de caracterización de las normas Frechét diferenciables y sus consecuencias, se pretende avanzar en la comprensión de propiedades importantes, como la convergencia en un sentido más amplio, la rotundidad (o carácter estrictamente convexo), la uniformidad rotunda (o uniformidad convexa) y las propiedades de reflexividad en estos espacios.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Espacios Métricos

En esta sección, se presenta la idea fundamental del espacio métrico y algunos ejemplos.

Definición 2.1

Dado un conjunto no vacío X , una métrica o distancia sobre X es una aplicación $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica las siguientes condiciones:

- i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.
- ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$. (Herrero, 2010)

Definición 2.2

Un espacio métrico es un par (X, d) , donde X es un conjunto no vacío y d es una métrica en X . Si d cumple (i), (iii) y (iv), entonces diremos que la aplicación d es denominada una *pseudométrica* sobre X y (X, d) se denomina *espacio pseudométrico*. (Herrero, 2010)

Ejemplos.

- Sea $X = \mathbb{R}$ y la aplicación $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = |x - y|$, las condiciones de métrica se deducen fácilmente de las propiedades de valor absoluto. Por lo tanto, (X, d) es un espacio métrico. A esta distancia la llamaremos distancia usual de \mathbb{R} .
- El par ordenado (X, d_D) es un espacio métrico, donde d_D representa la métrica discreta, definida de la siguiente manera:

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

2.2 Espacios Vectoriales Normados

En esta sección, comenzaremos definiendo una métrica mediante una norma en un espacio vectorial, lo que nos llevará a la creación de un espacio normado. Se necesitan conceptos claves, como continuidad, convergencia y espacios de Banach.

Definición 2.3

Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Una función $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades (León, 2008):

- i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

Se denominará una norma sobre X . Al par $(X, \| \cdot \|)$ se le llamara espacio normado.

Proposición 2.4

Si $\| \cdot \|$ es una norma sobre X , entonces la aplicación

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ / d(x, y) = \|x - y\|$$

es una métrica en X que satisface las propiedades:

- 1) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ para todo $x, y, z \in X$.
- 2) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. (Guccione y Guccione, 2017)

Demostración.

Primer demostraremos que d es una métrica

$$i) d(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

$$ii) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$iii) d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

$$\Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$$

$$iv) d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$$

$$\Rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Por la Definición 2.2 se concluye que d es una métrica.

Ahora, verificando 1) y 2)

$$1) d(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

$$\Rightarrow d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

$$2) d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda|\|x - y\| = |\lambda|d(x, y)$$

$$\Rightarrow d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$$

Definición 2.5

Decimos que una distancia $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ esta asociada a una norma, si existe una norma $\|\cdot\|$ en X tal que $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$. (Guccione y Guccione, 2017)

Definición 2.6

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, un numero $r > 0$ y $x \in X$, se define:

$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$ a la bola cerrada de radio r con centro en x .

$S(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| = r\}$ la esfera de radio r con centro en x .

$N(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$ la bola abierta de radio r con centro en x . (Guzman, 2012)

Definición 2.7

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, denotaremos a la bola unitaria como

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

y a la esfera unitaria como (De Blasi, 1977)

$$S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

Definición 2.8

Sea X un espacio vectorial. Un conjunto $A \subset X$ es convexo si para cada $a, b \in X$, el segmento

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b; \lambda \in [0,1]\}$$

está contenido en A . (Kreyszig, 1991)

Ejemplos.

- En el conjunto de los números reales (\mathbb{R}), cualquier intervalo es un conjunto convexo. Además, según una convención aceptada, el conjunto vacío también se considera convexo.
- Los hiperplanos $H(p, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n / p \cdot x = \alpha \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0\}$ son conjuntos convexos
- Una bola abierta: $N(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ es un conjunto convexo

Definición 2.9

Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Diremos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $x_0 \in X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que (León, 2008)

$$\|x_n - x_0\| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N$$

en caso contrario se dice que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente (o divergente).

Nota.

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $x \in X$, diremos también que x es el límite de x_n cuando $n \rightarrow \infty$ y lo denotaremos como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ó $x_n \rightarrow x$

Teorema 2.10

Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio vectorial normado y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Si $x_n \rightarrow x$ y $x_n \rightarrow y$ entonces $x = y$. (Guzman, 2012)

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$, como $x_n \rightarrow x$ y $x_n \rightarrow y$ entonces, por la Definición 2.9, existen dos enteros N_1, N_2 tal que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n \geq N_1$$

y

$$\|x_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n \geq N_2$$

Ahora, consideremos $N' = \max(N_1, N_2)$. Para $n > N'$ se cumplen ambas desigualdades.

Luego, para $n > N'$ se tiene

$$0 \leq \|x - y\| = \|x - x_n + x_n - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \|x - y\| < \varepsilon$$

Esto implica que $\|x - y\| < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$, lo cual significa que $x = y$

■

Procederemos a establecer la noción de sucesión de Cauchy, ya que desempeñará un papel crucial en la definición del espacio de Banach.

Definición 2.11

Sean $(X, \| \cdot \|)$ un espacio vectorial normado y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Diremos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si, (León, 2008)

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0$$

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq N$ se cumple $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Proposición 2.12

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X . Entonces

- Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado.
- Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y esta sucesión contiene alguna subsucesión convergente, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también convergente (León, 2008).

Demostración.

- Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, por la Definición 2.11, tomando $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq N$ se tiene $\|x_n - x_m\| < 1$.

Luego, sabemos

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| < 1$$

De esta forma, se obtiene la desigualdad

$$-1 < |\|x_n\| - \|x_m\|| < 1 \text{ para cada } m, n \geq N$$

Ahora, tomando $m = N, n > N$ y $M = \max\{1 + \|x_N\|, \|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_m\|\}$ se concluye que

$$\|x_n\| \leq M \text{ para } n = 1, 2, 3$$

Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada

- Sea $\{x_{n_i}\}_{n_i=1}^{\infty}$ una subsucesión de la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

Como la subsucesión es convergente, entonces $\exists x \in X$ tal que $x_{n_i} \rightarrow x$ si $i \rightarrow \infty$, lo que implica

$$\text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_{n_i} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ si } n_i \geq N$$

Por otro lado como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces se tiene que

$$\text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe } N' \in \mathbb{N} \text{ tal que para cada } m, n \geq N' \text{ se tiene } \|x_m - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora, tomando $\bar{N} = \max\{N, N'\}, n > \bar{N}$ y $n_i > \bar{N}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &= \|x_n - x_{n_i} + x_{n_i} - x\| \\
&\leq \|x_n - x_{n_i}\| + \|x_{n_i} - x\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Entonces, por la Definición 2.9 se concluye que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Nota.

Un espacio vectorial normado en el que cada sucesión de Cauchy es convergente se le denominara espacio normado completo.

Definición 2.13

Un espacio de Banach es definido como un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ en el cual cada sucesión de Cauchy converge, lo que significa que el espacio $(X, \|\cdot\|)$ es completo. En otras palabras, un espacio de Banach es un espacio normado completo. (Siddiqi, 2018)

Ejemplos.

- Los espacios de funciones

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua en } [a, b]\}$$

con la norma

$$\|\cdot\|_u : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\|f\|_u = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

y

$$C^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) \text{ existe y es continua en } [a, b]\}$$

con la norma

$$\|\cdot\|^1 : C^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\|f\|^1 = \|f\|_u + \|f'\|_u$$

son espacios de Banach.

- Los espacios $l_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ y $l_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ con $p \geq 1$, considerando

$$\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

son espacios de Banach.

Definición 2.14

Un producto escalar en un espacio vectorial E es una aplicación $b: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, bilineal y simétrica, es decir, se cumplen:

- i) $b(u, u) > 0$ si $u \neq 0$ para todo $u \in E$.
- ii) $b(u, v + w) = b(u, v) + b(u, w)$ para todo $u, v, w \in E$.
- iii) $b(u, tv) = tb(u, v)$ para todo $u, v \in E$ y $t \in \mathbb{R}$.
- iv) $b(u, v) = b(v, u)$ para todo $u, v \in E$. (Simon, 2017)

Definición 2.15

Un espacio pre-Hilbert es un espacio vectorial E dotado de un producto escalar $(\cdot, \cdot)_E$ y con la norma Hilbertiana definida por

$$\|u\|_E = \sqrt{(u, u)_E}$$

diremos que $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Hilbert, si es pre-Hilbert secuencialmente completo, en otras palabras, si el espacio normado $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio de Banach. (Simon, 2017)

Teorema 2.16

Sea E un espacio pre-Hilbert, $(\cdot, \cdot)_E$ su producto escalar y $\|\cdot\|_E = \sqrt{(\cdot, \cdot)_E}$. Entonces se cumple que para cualquier $u, v \in E$.

$$a) \quad \|u + v\|_E^2 = \|u\|_E^2 + \|v\|_E^2 + 2(u, v)_E.$$

$$b) \quad \|u + v\|_E^2 + \|u - v\|_E^2 = 2(\|u\|_E^2 + \|v\|_E^2). \text{ (Simon, 2017)}$$

Demostración.

a) Usando la bilinealidad y simetría

$$\begin{aligned} \|u + v\|_E^2 &= (u + v, u + v)_E \\ &= (u, u)_E + (v, v)_E + (u, v)_E + (v, u)_E \\ &= \|u\|_E^2 + \|v\|_E^2 + 2(u, v)_E. \end{aligned}$$

b) De manera similar de $a)$ se llega a que

$$\|u - v\|_E^2 = \|u\|_E^2 + \|v\|_E^2 - 2(u, v)_E$$

Ahora, sumando $\|u + v\|_E^2$ y $\|u - v\|_E^2$ se concluye que

$$\|u + v\|_E^2 + \|u - v\|_E^2 = 2(\|u\|_E^2 + \|v\|_E^2)$$

Nota.

En relación con el Teorema 2.16, se destaca que el ítem $b)$ es comúnmente conocida con el nombre de ley del paralelogramo.

2.3 Aplicaciones lineales y acotadas en espacios normados

En esta sección, profundizaremos en las definiciones y propiedades esenciales de los operadores lineales y acotados en espacios normados, ofreciendo una comprensión más completa de estos conceptos.

Definición 2.17

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es continua en $a \in X$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\|_X < \delta \text{ implica que } \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Diremos que f es continua en X , si es continua en a para todo $a \in X$ (Bartle, 1980).

Nota.

Una definición equivalente a la de continuidad se expresa de la siguiente manera para cada $B_Y(f(a), \varepsilon)$, existe $B_X(a, \delta)$ tal que $f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon)$.

Definición 2.18

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es uniformemente continua, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, u \in X$ con $\|x - u\|_X < \delta$ implica que $\|f(x) - f(u)\|_Y < \varepsilon$ (Bartle, 1980).

Nota.

Es fácil probar que toda aplicación uniformemente continua es continua. Sin embargo, en general el recíproco no es válido.

Definición 2.19

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es una función Lipschitz en x , si existe una constante $A > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(u)\|_Y \leq A\|x - u\|_X$$

para cualesquiera $x, u \in X$ (Bartle, 1980).

Proposición 2.20

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y $f: X \rightarrow Y$ una función, si f es una función Lipschitz en x entonces f es continua en x .

Demostración.

Como f es una función Lipschitz por la Definición 2.19, existe una constante $A > 0$ tal que para cualesquiera $x, u \in X$,

$$\|f(x) - f(u)\|_Y \leq A\|x - u\|_X$$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$ con $\|x - \bar{x}\|_X < \delta$ para cualquier $\bar{x} \in X$, pero como f es Lipschitz entonces se tiene que

$$\|f(x) - f(\bar{x})\|_Y \leq A\|x - \bar{x}\|_X < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(\bar{x})\|_Y < \varepsilon$$

De la Definición 2.17 se llega a que f es continua en \bar{x} , pero como \bar{x} es un elemento arbitrario de X se concluye que f es continua en X .

Definición 2.21

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados sobre un cuerpo $\mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$. Un operador lineal $T: X \rightarrow Y$ es una aplicación que verifica las siguientes propiedades (Kreyszig, 1991)

i) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in X$

ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

Estas dos propiedades pueden expresarse en una sola, dada por

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \text{ para todo } x, y \in X \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Definición 2.22

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados. Un operador lineal $T: X \rightarrow Y$ se dirá acotado si existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$$

para todo $x \in X$ (Kreyszig, 1991).

Teorema 2.23

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) T es continuo.
- (b) T es continuo en el origen.
- (c) T es un operador acotado.
- (d) T es Lipschitz.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b)

Es evidente, por la definición de continuidad.

(b) \Rightarrow (c)

Para cualquier $x \neq 0 \in X$, consideremos $u = \delta \frac{x}{\|x\|_X}$. Tomando $\varepsilon = 1, \exists \delta > 0$ tal que, si $\|u\|_X < \delta$, entonces $\|T(u)\|_Y < 1$. Así, se obtiene

$$\|T(u)\|_Y = \left\| T\left(\delta \frac{x}{\|x\|_X}\right) \right\|_Y = \frac{\delta}{\|x\|_X} \|T(x)\|_Y < 1$$

$$\Rightarrow \|T(x)\|_Y < \frac{1}{\delta} \|x\|_X$$

Por lo tanto, tomando $M = \frac{1}{\delta}$, por la Definición 2.22 se concluye que T es un operador acotado

(c) \Rightarrow (d)

Sean $x, u \in X$, luego por la linealidad y acotación de T se obtiene que

$$\|T(x) - T(u)\|_Y = \|T(x - u)\|_Y \leq M \|x - u\|_X$$

$$\Rightarrow \|T(x) - T(u)\|_Y \leq M \|x - u\|_X$$

por lo tanto, de la Definición 2.19 se llega a que el operador T es Lipschitz

(d) \Rightarrow (a)

Se verifica de la Proposición 2.20.

2.4 Espacio Dual y Reflexividad

En la presente sección, exploraremos las nociones fundamentales de funcionales lineales, espacios duales y espacio doble dual. A través de estas herramientas, estableceremos una relación intrínseca entre la estructura geométrica de un espacio de Banach y la suavidad de su norma, la cual se manifestará en términos de diferenciabilidad.

Definición 2.24

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados. El conjunto $L(X, Y)$ está definido como

$$L(X, Y) = \{T: X \rightarrow Y / T \text{ es un operador lineal}\}$$

y $\mathcal{L}(X, Y)$ se define como

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T: X \rightarrow Y / T \text{ es un operador lineal y acotado}\}.$$

Cuando $X = Y$, entonces $\mathcal{L}(X, X)$ se denotará como $\mathcal{L}(X)$ (León, 2008).

Observación.

El espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ es claramente un espacio vectorial con las siguientes operaciones

$$(i) (T + S)(x) = T(x) + S(x)$$

$$(ii) (aT)(x) = aT(x)$$

con $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $\lambda \in \mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$.

La norma de un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ está definida de la siguiente manera

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$$

además, se verifica

$$\|T\| = \inf\{M \in \mathbb{R}^+; \|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X\} = \sup_{\|x\|_X=1} \|T(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|_Y$$

Definición 2.25

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y un cuerpo $\mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$. Un operador lineal $f: X \rightarrow Y$ es llamado una funcional lineal si $Y = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$. (Kreyszig, 1991)

Definición 2.26

Dado un espacio vectorial normado X y $\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$, denotaremos como $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{K} / f \text{ es lineal y acotado}\}$, el cual será denominado como espacio vectorial de funcionales lineales, a este espacio vectorial lo denotaremos por $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, el cual es llamado espacio dual de X .

Observaciones.

- El espacio dual de X constituye un espacio normado, con la norma definida por

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)|$$

- Se definirá el doble espacio dual de X como $\{g: X^* \rightarrow \mathbb{K} / g \text{ es lineal y acotado}\}$ y será denotado como $(X^*)^* = X^{**}$.

Definición 2.27

Sea X un espacio vectorial X . Una función

$$p: X \rightarrow [0, \infty^+ >$$

será llamada seminorma, si cumple con las siguientes propiedades

- 1) $p(\beta x) = |\beta|p(x)$, para todo $x \in X$ y $\beta \in \mathbb{K}$.
- 2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in X$.

En términos simples, una seminorma es idéntica a una norma, excepto que puede haber elementos $x \neq 0$ tal que $p(x) = 0$. (Villanueva, s.f.).

A continuación, procederemos a definir las funciones sublineales de manera clara y precisa, ya que estas serán de gran utilidad para comprender con mayor profundidad los siguientes teoremas que se desarrollarán.

Definición 2.28

Dado un espacio vectorial X sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} . Una funcional sublineal p sobre X se define como una aplicación $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ positivamente homogénea y subaditiva, en otras palabras p cumple las siguientes propiedades (Villanueva, s.f.)

- 1) $p(\alpha x) = \alpha \cdot p(x)$, para todo $x \in X$ y $\alpha \geq 0$.
- 2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in X$.

Observación.

- Si X un espacio vectorial real y $M \subset X$ un subespacio vectorial de X decimos que una aplicación lineal $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ extiende a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ cuando

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{si } x \in M \\ 0 & , \text{si } x \in X \setminus M. \end{cases}$$

Teorema 2.29 (Teorema de Hahn-Banach)

Sea X un espacio vectorial real, $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional sublineal, $M \subset X$ un subespacio vectorial de X y $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal dominada por p , es decir, para cada $x \in M$.

$$f(x) \leq p(x).$$

Entonces existe una aplicación lineal $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a f y que sigue estando dominada por p , es decir, para cada $x \in X$, (Villanueva, s.f)

$$\tilde{f}(x) \leq p(x).$$

Una aplicación destacada del teorema de Hahn-Banach se relaciona con funcionales lineales que están acotados.

Teorema 2.30

Sea X un espacio normado y Z un subespacio de X . Si f es una funcional lineal y acotada definida en Z , entonces existe una funcional lineal \tilde{f} en X la cual es una extensión de f en X y tal que (Kreyszig, 1991)

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$$

donde

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|, \quad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

Demostración.

Si $Z = \{0\}$, entonces $f = 0$ y la extensión es $\tilde{f} = 0$

Sea $Z \neq \{0\}$. Primero debemos descubrir una p adecuada. Para todo $x \in Z$ tenemos

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\| \quad (2.1)$$

Luego, definamos una aplicación

$$p: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } p(x) = \|f\|_Z \|x\|$$

Vemos que p está definido en todo X , además

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|f\|_Z \|x+y\| \leq \|f\|_Z (\|x\| + \|y\|) = \|f\|_Z \|x\| + \|f\|_Z \|y\| = p(x) + p(y) \\ &\Rightarrow p(x+y) \leq p(x) + p(y) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Además,

$$\begin{aligned} p(\alpha x) &= \|f\|_Z \|\alpha x\| = |\alpha| \|f\|_Z \|x\| = |\alpha| p(x) \\ &\Rightarrow p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Entonces de (2.2) y (2.3), por la Definición 2.28 $p(x)$ es una funcional sublineal

Por otro lado, sabemos que $\|f\|_Z \|x\| = p(x)$ entonces de (2.1) se tiene que

$$|f(x)| \leq p(x)$$

para cada $x \in Z$.

Luego, por el Teorema 2.29 existe una aplicación lineal \tilde{f} que extiende f a x tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x)$$

para cada $x \in X$.

Como $p(x) = \|f\|_Z \|x\|$ se tiene la desigualdad

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &\leq \|f\|_Z \|x\| \\ \Rightarrow \frac{\tilde{f}(x)}{\|x\|} &\leq \|f\|_Z\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}\|_X &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leq \|f\|_Z \\ \Rightarrow \|\tilde{f}\|_X &\leq \|f\|_Z\end{aligned}\tag{2.4}$$

Por otro lado como \tilde{f} extiende a f entonces

$$|\tilde{f}(x)| = |f(x)|$$

Para cada $x \in Z$. Así

$$\begin{aligned}\|f\|_Z &= \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| \leq \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)| = \|\tilde{f}\|_X \\ \Rightarrow \|f\|_Z &\leq \|\tilde{f}\|_X\end{aligned}\tag{2.5}$$

En consecuencia, de (2.4) y (2.5) concluimos que

$$\|f\|_Z = \|\tilde{f}\|_X$$

Corolario 2.31

Sean X un espacio vectorial real o complejo, p una seminorma en X y $x_0 \in X$. Entonces existe una forma lineal $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ tal que, para todo $y \in X$

$$|f(y)| \leq p(y)$$

Además,

$$f(x_0) = p(x_0).$$

En particular, si X es un espacio normado entonces dado $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existe una forma lineal y continua \tilde{f} de norma 1 tal que $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$. (Villanueva, s.f.)

Demostración.

Consideremos $N = \text{gen}\{x_0\}$ y definamos la aplicación

$$f: N \rightarrow \mathbb{K}$$

definida por

$$f(\bar{x}) = \lambda \|x_0\| \text{ si } \bar{x} = \lambda x_0$$

para cada $\lambda \in \mathbb{K}$

Por otro lado, tenemos

$$|f(\bar{x}_0)| = |\lambda \|x_0\|| = |\lambda| \|x_0\| = \|\lambda x_0\| = \|\bar{x}_0\|$$

Entonces, f es acotado. Luego

$$\|f\| = \sup_{\|\bar{x}_0\|=1} |f(\bar{x}_0)| = \sup_{\|\bar{x}_0\|=1} \|\bar{x}_0\| = 1 \quad (2.6)$$

Para la segunda parte, si X es un espacio normado, por el Teorema 2.30 existe una funcional lineal \tilde{f} que extiende a f y, además

$$\|\tilde{f}\| = \|f\|$$

Pero de (2.6) tenemos

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1$$

Por lo tanto, como \tilde{f} extiende a f y $x_0 \in N$, se concluye que

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = 1$$

Corolario 2.32

Sea X un espacio normado. Entonces para todo $x \in X$, (Villanueva, s.f)

$$\|x\| = \sup_{f \in B(X^*)} |f(x)|$$

donde

$$B(X^*) = \{f \in X^* : \|f\|_{X^*} = 1\}$$

Demostración.

Fijando $x \in X$, si $f \in B(X^*)$ tenemos $f \in X^*$ con $\|f\| \leq 1$, entonces como

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Luego se tiene

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq \|f\| \|x\| \leq \|x\|$$

$$\Rightarrow \sup_{f \in B(X^*)} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|x\| \tag{2.7}$$

Por otro lado, por el Corolario 2.31, tenemos que existe \tilde{f} lineal y continuo de norma 1 tal que,

$\tilde{f}(x) = \|x\|$, entonces se tiene

$$\|x\| = |\tilde{f}(x)| \leq \sup_{f \in B(X^*)} |f(x)|$$

$$\Rightarrow \|x\| \leq \sup_{f \in B(X^*)} |f(x)| \tag{2.8}$$

Por lo tanto, de las implicaciones (2.7) y (2.8) se concluye

$$\|x\| = \sup_{f \in B(X^*)} |f(x)|$$

Definición 2.33

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, podemos definir una aplicación canónica

$$\mathcal{J}: X \rightarrow X^{**}$$

definida por la relación

$$\mathcal{J}(x)(x^*) = x^*(x)$$

para todo $x^* \in X^*$. (Villanueva, s.f)

Definición 2.34

Diremos que un espacio vectorial normado X es reflexivo, si la aplicación \mathcal{J} , es sobreyectiva. (Martin, 2010)

Observaciones.

- A partir de la definición proporcionada, es evidente que cada espacio reflexivo se asocia con su espacio bidual, aunque tener esta condición no es suficiente para que el espacio sea considerado reflexivo. Puede ocurrir que haya una identificación de X con X^{**} distinta de \mathcal{J} y que \mathcal{J} no sea sobreyectiva.
- Dado que el bidual es siempre un espacio de Banach, se infiere en particular que todo espacio reflexivo es Banach.

Nota.

Una caracterización de la reflexividad estaría dada de la siguiente manera:

Un espacio de Banach es reflexivo si y solo si todo $x^* \in X^*$ alcanza su norma en la esfera unitaria de X , es decir, dado $x^* \in X^*$ existe $x \in X$ de norma 1 tal que $x^*(x) = \|x^*\|$. (James, 1964)

Ejemplos.

- a) Los espacios normados de dimensión finita son reflexivos debido a que

$$\dim(X) = \dim(X^*) = \dim(X^{**})$$

y un operador lineal uno a uno en espacios de dimensión finita de la misma dimensión es sobreyectiva.

- b) Los espacios ℓ_p con $1 < p < \infty$ también son reflexivos.
 c) Los espacios ℓ_1 y ℓ_∞ no son reflexivos.

Proposición 2.35

Si consideramos a X como un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y solo si X^* es reflexivo. (Martin, 2010)

2.5 Funciones convexas en Espacios de Banach

En esta sección, introducimos los conceptos de espacios estrictamente convexos y uniformemente convexos. A través de definiciones precisas, ejemplos ilustrativos y resultados clave, buscamos desarrollar una comprensión profunda de las propiedades geométricas y analíticas de estos espacios, estas propiedades geométricas resultan cruciales para establecer conexiones con la diferenciabilidad de normas.

Definición 2.36

Sean X un espacio de Banach, A un subconjunto convexo abierto no vacío de X , diremos que $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa en A si satisface

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

siempre que $x, y \in A$ y $0 \leq t \leq 1$. (Phelps, 1989)

Ejemplos.

- La norma $f(x) = \|x\|$, es claramente una función convexa. De manera general, si C es un subconjunto convexo no vacío de X , entonces la función distancia

$$d_c: X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto d_c(x) = \inf\{\|x - y\| / y \in C\}, x \in X$$

es continua y convexa en A (tener en cuenta que $d_c(x) = \|x\|$ si $C = 0$).

- El supremo de cualquier familia de funciones convexas es convexo en el conjunto donde es finito. En particular, si B es un subconjunto acotado no vacío de X , entonces la función de distancia más lejana

$$\mathcal{G}: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \mathcal{G}(x) = \sup_{y \in B} \|x - y\|$$

es continua y convexa en B .

Definición 2.37

La función norma $\|\cdot\|$ en un espacio de Banach X será denominada estrictamente convexa o rotunda si dado $x, y \in S(X)$ tal que $\|x - y\| = 2$ entonces $x = y$, diremos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach rotundo si la $\|\cdot\|$ es rotunda (Deville et al., 1993)

Observación.

Una caracterización de la Definición 2.37 es la siguiente

En un espacio de Banach X , se considera a la función norma $\|\cdot\|$ estrictamente convexa (rotunda), siempre que no haya segmento de líneas en la esfera unitaria. De manera equivalente, siempre y

cuando $\|x\| = \|y\| = 1$ y $x \neq y$ implique $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < \lambda\|x\| + (1 - \lambda)\|y\|$, para todo $x, y \in X$, $0 < \lambda < 1$ (Phelps, 1989).

Proposición 2.38

Las siguientes condiciones sobre una norma $\|\cdot\|$ de un espacio de Banach X , son equivalentes: (Deville et al., 1993)

- a) La norma $\|\cdot\|$ es rotunda (estrictamente convexa).
- b) Si $x, y \in X$ satisface $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0$, entonces $x = y$.
- c) Si $x, y \in X$ cumple que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ con $x, y \neq 0$ entonces $x = \lambda y$ para algún $\lambda > 0$.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b)

Notemos que

$$\begin{aligned} 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 &\geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

de modo que $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0$, se tiene que

$$0 \geq (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0 \Rightarrow (\|x\| - \|y\|)^2 = 0 \Rightarrow \|x\| = \|y\|$$

por lo tanto, se puede suponer que $x, y \in S(X)$, luego se obtiene de $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0$

que $\|x + y\| = 2$ y de la hipótesis se concluye que $x = y$.

(b) \Rightarrow (a)

Por hipótesis se tiene que

$$\text{Si } x, y \in X \text{ satisface } 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0 \text{ entonces } x = y$$

En particular tomando $x, y \in S(X) \subset X$, tenemos

$$\text{Sea } x, y \in S(X) \text{ satisface } 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 0 \text{ entonces } x = y$$

Ahora, como $x, y \in S(X)$ entonces $\|x\| = \|y\| = 1$, reemplazando se obtiene que

$$\text{Sea } x, y \in S(X) \text{ satisface } \|x + y\| = 2 \text{ entonces } x = y$$

Por lo tanto, de la Definición 2.37 se concluye la norma $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa.

(c) \Rightarrow (a)

Por hipótesis se tiene

$$\text{Si } x, y \in X \text{ tal que } \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \text{ con } x, y \neq 0 \text{ entonces } x = \lambda y \text{ para algún } \lambda > 0$$

tomando $x, y \in S(X) \subset X$, tenemos

$$\text{Si } x, y \in S(X) \text{ tal que } \|x + y\| = \|x\| + \|y\| \text{ entonces } x = \lambda y \text{ para algún } \lambda > 0$$

Luego, como $x, y \in S(X)$ entonces $\|x\| = \|y\| = 1$, por tanto, reemplazando se tendría

$$\text{Si } x, y \in S(X) \text{ tal que } \|x + y\| = 2 \text{ entonces } x = \lambda y \text{ para algún } \lambda > 0$$

Ahora, tomando $\|x + y\| = 2$ pero como $x = \lambda y$ para algún $\lambda > 0$ se tendría que

$$\|\lambda y + y\| = 2 \Rightarrow 2\lambda \underbrace{\|y\|}_1 = 2 \Rightarrow \lambda = 1$$

Como $\lambda = 1$ y $x = \lambda y$ llegamos a que $x = y$, entonces por la Definición 2.37 se concluye que la norma $\|\cdot\|$ es estrictamente convexa.

(a) \Rightarrow (c)

Sea $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ para algún $x, y \neq 0$.

Ahora podemos suponer sin pérdida de generalidad $0 < \|x\| \leq \|y\|$, luego se tiene

$$\begin{aligned}
2 &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\
&= \frac{1}{\|x\|} (\|x + y\|) - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) \\
&= \frac{\|x\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|} - \frac{\|y\|}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|y\|} = 2
\end{aligned}$$

Luego se concluye

$$2 \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq 2 \Rightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2$$

Ahora, como $\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \in S(X)$, por la hipótesis llegamos a que

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow x = \frac{\|x\|}{\|y\|} y$$

$$\text{si } \lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|} > 0 \Rightarrow x = \lambda y, \text{ para algun } \lambda > 0$$

Proposición 2.39

Todo espacio de Hilbert es estrictamente convexo.

Demostración.

Sea H un espacio de Hilbert y sean $\bar{x}, \bar{y} \in S(H)$ tal que $\|\bar{x} + \bar{y}\| = 2$

Luego, como H es un espacio de Hilbert esta dotado de producto interno, entonces satisface la ley del paralelogramo, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 + \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\
\Rightarrow \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|\bar{x} + \bar{y}\|^2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Ahora, de la hipótesis se sabe $\bar{x}, \bar{y} \in S(H)$ y $\|\bar{x} + \bar{y}\| = 2$, entonces reemplazando en (2.9) se tiene

$$\|\bar{x} - \bar{y}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{y}\| = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

Por lo tanto, de la Definición 2.37 se concluye que H es estrictamente convexo.

Definición 2.40

La norma $\|\cdot\|$ en un espacio de Banach X es llamada uniformemente convexa o uniformemente rotunda si $\lim\|x_n - y_n\| = 0$, si dado $(x_n), (y_n) \subseteq S(X)$, tal que $\lim\|x_n + y_n\| = 2$. Por otro lado, diremos que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach uniformemente rotundo si la $\|\cdot\|$ es uniformemente rotunda (Deville et al., 1993)

Observación.

Una caracterización de la Definición 2.40 es la siguiente

Un espacio de Banach X , será llamado uniformemente convexo sí, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que $x, y \in X$, con $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ impliquen (Beauzamy, 1982)

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Nota.

El numero $\delta(\varepsilon)$ se le conoce como el módulo de convexidad de X , el cual está definido como

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{\varepsilon > 0} \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| ; \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}$$

Ejemplo.

- El espacio de Hilbert H es uniformemente convexo. Utilizando la ley del paralelogramo se tiene para cada $\bar{x}, \bar{y} \in H$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|\bar{x} - \bar{y}\|^2$$

Ahora, supongamos $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$, entonces reemplazando se obtiene

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = 2(2) - \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

Luego

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \right)$$

Tomando a $1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \delta(\varepsilon)$, por lo tanto, tendríamos

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

En consecuencia, el espacio de Hilbert H es uniformemente convexo.

Proposición 2.41

Todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo.

Demostración.

Sean $x, y \in S(X)$, con $\|x + y\| = 2$, se tiene que demostrar que, $x = y$

Entonces supongamos que $x \neq y$, cómo se está trabajando en un espacio que es uniformemente convexo, se tiene para cada $\varepsilon > 0$, un numero $\delta(\varepsilon)$, con $\|x - y\| \geq \varepsilon$ implica $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$, operando se tendría

$$\|x + y\| \leq 2 - 2\delta(\varepsilon)$$

Pero sabemos que $\|x + y\| = 2$, entonces llegamos a que $\delta(\varepsilon) \leq 0$, lo cual es una contradicción, pues se sabe que $\delta(\varepsilon) > 0$, por lo tanto, concluimos que X es estrictamente convexo.

Definición 2.42

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, se le denomina a la función norma $\|\cdot\|$ localmente uniformemente convexa o localmente uniformemente rotunda si para cada $x \in S(X)$ y $\{x_n\} \subset S(X)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x + x_n\| = 2$ implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = 0$

Observación

Una caracterización de la Definición 2.41 es la siguiente. (Fabian et al., 2001)

Una norma en un espacio de Banach X es llamada localmente uniformemente rotunda, si para todo $x, y \in X$ satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2) = 0$ teniendo $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Ejemplos.

- Los espacios $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, considerando la norma $\|\cdot\|_2$ cómo

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

son localmente uniformemente rotundos

- Los Espacios $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, considerando la norma $\|\cdot\|_1$ como

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

no son espacios localmente uniformemente rotundos.

2.6 Diferenciabilidad de la norma en espacios de Banach.

En esta sección, tiene como objetivo presentar las definiciones de diferenciabilidad de Frechét y de Gâteaux como también la relación que existen entre ambos acompañados de ejemplos ilustrativos y teoremas importantes para el desarrollo del presente trabajo.

Definición 2.43

Sean X un espacio vectorial, V un subconjunto no vacío de X y $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si para cada elemento $\bar{x} \in V$ y $h \in X$ el límite

$$f'(\bar{x})(h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

existe, entonces $f'(\bar{x})(h)$ será llamado derivada direccional de \bar{x} en la dirección de h . (Jahn, 2020)

Ejemplo.

Sea la función $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Se observa que f no es continua en $(0,0)$, ahora tomando una dirección $h = (h_1, h_2)$, luego la derivada direccional sería

Si $h_2 \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(0,0)(h_1, h_2) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f((0,0) + \lambda(h_1, h_2)) - f(0,0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\lambda h_1, \lambda h_2)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\lambda^2 h_1^2 \lambda h_2}{\lambda^4 h_1^4 + \lambda^2 h_2^2}}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{h_1^2 h_2}{\lambda^2 h_1^4 + h_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2} \end{aligned}$$

Luego si $h_2 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} f'(0,0)(h_1, h_2) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f((0,0) + \lambda(h_1, 0)) - f(0,0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\lambda h_1, 0)}{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(0,0)(h_1, h_2) = \begin{cases} h_1^2, & h_2 \neq 0 \\ h_2, & h_2 = 0 \end{cases}$$

Lema 2.44

Sean X un espacio vectorial y $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional convexa. Entonces para $\bar{x}, h \in X$ arbitrarios la función $\varphi: \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (f(\bar{x} + \lambda h) - f(\bar{x})), \text{ para todo } \lambda > 0$$

es monótona creciente, es decir, si $0 < s \leq t$ implica $\varphi(s) \leq \varphi(t)$. (Jahn, 2020)

Demstración.

Para $\bar{x}, h \in X$ arbitrarios, consideremos la función φ ya definida. Entonces por la convexidad de f se obtiene para $0 < s \leq t$ arbitrarios

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + sh) - f(\bar{x}) &= f\left(\frac{s}{t}(\bar{x} + th) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\bar{x}\right) - f(\bar{x}) \\ &\leq \frac{s}{t}f(\bar{x} + th) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \\ &= \frac{s}{t}f(\bar{x} + th) + f(\bar{x}) - \frac{s}{t}f(\bar{x}) - f(\bar{x}) \\ &= \frac{s}{t}f(\bar{x} + th) - \frac{s}{t}f(\bar{x}) = \frac{s}{t}(f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})) \end{aligned}$$

Entonces, tendríamos

$$f(\bar{x} + sh) - f(\bar{x}) \leq \frac{s}{t}(f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})) \Rightarrow \underbrace{\frac{f(\bar{x} + sh) - f(\bar{x})}{s}}_{\varphi(s)} \leq \underbrace{\frac{f(\bar{x} + th) - f(\bar{x})}{t}}_{\varphi(t)}$$

Por lo tanto

$$\varphi(s) \leq \varphi(t)$$

Definición 2.45

Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $E \subseteq X$ un subconjunto abierto no vacío y $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es Gâteaux diferenciable en $x \in E$ si la aplicación

$$f'(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

existe para cada $h \in X$ y $f'(x)h \in E^*$, se le denominara la derivada de Gâteaux de f en x en dirección de h a $f'(x)h$ (Garcia, 2007).

Observación.

El valor de $f'(x)h$ nos indica cómo cambia la función f en el punto x cuando nos movemos en dirección de h . De esta manera, la derivada de Gâteaux que hemos mencionado puede entenderse como una ampliación de la derivada direccional desde el punto de vista del cálculo diferencial en varias variables.

Ejemplo.

Sea el espacio vectorial $M = \mathcal{C}([a, b])$ con su norma usual y consideremos el funcional $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\psi(y) = \int_a^b (\text{sen}^3(x) + y^2(x))dx, \text{ para todo } y \in M$$

Ahora, consideremos una dirección arbitraria $h \in M$, entonces tenemos

$$\psi'(y)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(y + th) - \psi(y)}{t}$$

$$\begin{aligned} \psi'(y)h &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} \left(\int_a^b (\text{sen}^3(x) + (y + th)^2(x))dx - \int_a^b (\text{sen}^3(x) + y^2(x))dx \right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} \left(\int_a^b (y^2(x) + 2ty(x)h(x) + t^2h^2(x) - y^2(x))dx \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} \left(2t \int_a^b y(x)h(x)dx + t^2 \int_a^b h^2(x)dx \right) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left[2 \int_a^b y(x)h(x)dx + t \int_a^b h^2(x)dx \right] = 2 \int_a^b y(x)h(x)dx
\end{aligned}$$

Entonces se concluye que

$$\psi'(y)h = 2 \int_a^b y(x)h(x)dx$$

Esto implica que la derivada de Gâteaux está presente en todas las direcciones, además, se trata de una aplicación lineal y continua, por lo tanto, ψ es Gâteaux diferenciable.

Definición 2.46

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $E \subseteq X$ un subconjunto abierto no vacío y $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es Frechét diferenciable en $x \in E$ si existe una aplicación $\ell: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua tal que para todo $h \in X$ se cumple: (Jahn, 2020; Garcia, 2007)

$$f(x+h) = f(x) + \ell(h) + O(h)$$

es decir

$$O(h) = f(x+h) - f(x) - \ell(h) \tag{2.10}$$

donde $O(\cdot)$ es una función de X a \mathbb{R} la cual verifica que $O(0) = 0$ y

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{O(h)}{\|h\|} = 0 \tag{2.11}$$

Observación.

De la igualdad (2.10) y (2.11) nos da como resultado

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \ell(h)}{\|h\|} = 0$$

Lo que a su vez equivale a decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \|h\| \leq \delta \implies |f(x+h) - f(x) - \ell(h)| < \varepsilon \|h\|$$

Nota.

A la aplicación lineal y continua ℓ se le denomina derivada de Frechét de f en x y será denota como $Df(x)$.

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{C}([a, b])$ con su norma usual $\|\cdot\|_u$ y sea el funcional $\mu: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\mu(x) = \int_a^b \beta(t)x(t)^2 dt$$

Afirmamos que f es Frechét diferenciable con derivada de Frechét dada por

$$Df(x) = 2 \int_a^b \beta(t)x(t)h(t)dt, \text{ para } x, h \in \mathcal{C}([a, b])$$

En primer lugar, verificamos $Df(x)$ cumple con los principios de linealidad y continuidad.

Entonces, definimos una función

$$\ell: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$$

con

$$\ell(h) = \int_a^b \beta(t)x(t)h(t)dt$$

➤ **Linealidad**

Sean $h, k \in \mathcal{C}([a, b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

- **Aditividad**

$$\begin{aligned}
\ell(h+k) &= 2 \int_a^b \beta(t)x(t)(h+k)(t)dt \\
&= 2 \int_a^b \beta(t)x(t)(h(t)+k(t))dt \\
&= 2 \int_a^b (\beta(t)x(t)h(t) + \beta(t)x(t)k(t))dt \\
&= 2 \left(\int_a^b \beta(t)x(t)h(t)dt + \int_a^b \beta(t)x(t)k(t)dt \right) \\
&= 2 \int_a^b \beta(t)x(t)h(t)dt + 2 \int_a^b \beta(t)x(t)k(t)dt \\
&= \ell(h) + \ell(k)
\end{aligned}$$

- Homogeneidad

$$\begin{aligned}
\ell(\lambda h) &= 2 \int_a^b \beta(t)x(t)\lambda h(t)dt \\
&= 2\lambda \int_a^b \beta(t)x(t)h(t)dt = \lambda \ell(h)
\end{aligned}$$

- Continuidad

como $\|h\|_u = \sup_{t \in [a,b]} |h(t)|$ para $h \in \mathcal{C}([a,b])$, entonces

$$\begin{aligned}
|\ell(h)| &= 2 \left| \int_a^b \beta(t)x(t)h(t)dt \right| \leq 2 \int_a^b |\beta(t)x(t)h(t)|dt = \\
&= 2 \int_a^b |\beta(t)x(t)h(t)|dt \leq 2 \int_a^b |\beta(t)| \cdot |x(t)| \cdot |h(t)|dt \leq \\
&\leq 2 \left| \int_a^b |\beta(t)| \cdot |x(t)| \|h\|_u dt \right| = 2 \|h\|_u \left| \int_a^b |\beta(t)| \cdot |x(t)| dt \right| \\
&= \underbrace{2 \|\beta\|_u \left| \int_a^b |x(t)| dt \right|}_M \|h\|_u = M \|h\|_u
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\ell(h)| \leq M \|h\|_u$$

Entonces se concluye que $Df(x)$ es continua

Ahora, verificaremos que f sea Frechét diferenciable con $Df(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(x+h) - \mu(x) - \ell(h)}{\|h\|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b \beta(t)(x+h)^2(t)dt - \int_a^b \beta(t)x^2(t)dt - 2 \int_a^b \beta(t)xh(t)dt}{\|h\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b (\beta(t)x^2(t) + 2\beta(t)x(t)h(t) + \beta(t)h^2(t) - \beta(t)x^2(t) - 2\beta(t)x(t)h(t))dt}{\|h\|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b \beta(t)h^2(t)dt}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| \int_a^b \beta(t)h^2(t)dt \right|}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b |\beta(t)||h^2(t)|dt}{\|h\|} \leq \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b |\beta(t)||h|^2 dt}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \|h\| \int_a^b |\beta(t)|dt = 0 \end{aligned}$$

Entonces se concluye que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(x+h) - \mu(x) - \ell(h)}{\|h\|} = 0$, por lo tanto f es Frechét diferenciable con la derivada de Frechét dada por

$$Df(x) = 2 \int_a^b \beta(t)x(t)h(t)dt, \text{ para } x, h \in \mathcal{C}([a, b])$$

Proposición 2.47

Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $S \subset X$ un subconjunto abierto no vacío y $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es Frechét diferenciable en $x \in S$, la derivada de Frechét es única. (Garcia, 2007)

Demostración.

Supongamos que ℓ_1 y ℓ_2 son dos aplicaciones lineales y continuas derivadas Frechét Diferenciable en $x \in S$, sea $h \in S(X)$. Luego se tendrá para ℓ_1 , para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que sí, $t \in \mathbb{R}$ y $|t| < \delta$, entonces $x+th \in S$ y

$$|f(x + th) - f(x) - \ell_1(th)| < \varepsilon \|th\| = \varepsilon |t| \dots (1)$$

De manera similar se tendrá para ℓ_2 , para todo $\varepsilon > 0$ existe $\hat{\delta} > 0$ tal que sí, $|t| < \hat{\delta}$, entonces $x+th \in S$ y

$$|f(x + th) - f(x) - \ell_2(th)| < \varepsilon \|th\| = \varepsilon |t| \dots (2)$$

luego, tomando $\delta' = \min\{\delta, \hat{\delta}\}$, para $|t| < \delta'$, de (1) y (2) se obtiene

$$\begin{aligned} |\ell_1(th) - \ell_2(th)| &= |\ell_1(th) - (f(x + th) + f(x)) + (f(x + th) - f(x)) - \ell_2(th)| \\ &\leq |\ell_1(th) - f(x + th) + f(x)| + |f(x + th) - f(x) - \ell_2(th)| \\ &= |f(x + th) - f(x) - \ell_1(th)| + |f(x + th) - f(x) - \ell_2(th)| < 2\varepsilon |t| \end{aligned}$$

Entonces se tendría

$$|\ell_1(th) - \ell_2(th)| < 2\varepsilon |t|$$

Consecuentemente

$$|\ell_1(th) - \ell_2(th)| < 2\varepsilon, \text{ para todo } h \in X$$

De lo anterior se obtiene para todo $\varepsilon > 0$, haciendo a ε tender a 0 se concluye que

$$|\ell_1(th) - \ell_2(th)| = 0 \Rightarrow |t| |\ell_1(h) - \ell_2(h)| = 0$$

$$\Rightarrow \ell_1(h) = \ell_2(h) \text{ para todo } h \in X$$

por lo tanto $\ell_1 = \ell_2$ en X entonces la derivada de Frechét es única.

Teorema 2.48

Sean $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado, $S \subset X$ un subconjunto abierto no vacío. Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es Frechét diferenciable en $x \in S$, entonces f es continua en x . (Garcia, 2007)

Demostración.

Dado que f es Frechét diferenciable en $x \in S$. De la definición 2.44 existe una aplicación lineal y continua $Df(x)$ tal que para todo $h \in X$ se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)}{\|h\|} = 0$$

Luego, como S es un subconjunto abierto de X , existirá $\delta \geq 0$ tal que si $\|h\| < \delta$, entonces $x+h \in S$. Así,

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\|h\|f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)}{\|h\|} + Df(x)h \quad (2.12)$$

Como $Df(x)h$ es una aplicación lineal y continua, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} Df(x)(h) = Df(x)0 = 0$$

Por lo tanto, haciendo que $h \rightarrow 0$ en (2.12) se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) - f(x) = 0$$

Evidenciando la continuidad de f en x .

■

La siguiente proposición mostrará que la diferenciabilidad de Frechét conlleva a la diferenciabilidad de Gâteaux.

Proposición 2.49

Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $S \subset X$ un subconjunto abierto no vacío. Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es Frechét diferenciable en $x \in S$, entonces f es Gâteaux diferenciable en x , además las derivadas de Frechét y Gâteaux coinciden (Jahn, 2020; Garcia, 2007).

Demostración.

Sea f Frechét diferenciable en $x \in S$, por la Definición 2.46 sabemos que existe una aplicación lineal y continua $Df(x)$ con lo cual fijado $h \in X \setminus \{0\}$. Se tendrá que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x) - Df(x)(th)}{\|th\|} = 0 \text{ para todo } h \in X \setminus \{0\}$$

Esto conlleva a que,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x) - Df(x)(th)}{|t||h|} &= 0 \text{ para todo } h \in X \setminus \{0\} \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x) - Df(x)(th)}{t} &= 0 \text{ para todo } h \in X \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Como $Df(x)$ es una aplicación lineal se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} - \frac{tDf(x)(h)}{t} &= 0 \text{ para todo } h \in X \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} - Df(x)(h) &= 0 \text{ para todo } h \in X \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} &= Df(x)(h) \text{ para todo } h \in X \end{aligned}$$

Entonces, de la Definición 2.43 se concluye que f es Gâteaux diferenciable en x y $f'(x)h = Df(x)(h)$.

■

A continuación, presentaremos una definición y una observación que nos permitirán profundizar en el concepto de diferenciabilidad de la norma en espacios de Banach. Esta noción, de gran relevancia para nuestro estudio, será fundamental para desarrollar los resultados centrales de esta investigación.

Definición 2.50

Sea f una función de valor real en un subconjunto abierto U de un espacio de Banach X . Sea $x \in U$. Decimos que f es Gâteaux diferenciable en x si existe $F \in X^*$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = F(x, h),$$

existe para todo $h \in X$. (Fabian, et al., 2011)

Diremos que f es Frechét diferenciable en x si el limite anterior es uniforme para cada $h \in S(X)$, llamaremos a F la derivada (o diferencial) de Gâteaux o Frechét en x y lo denotaremos por $F = f'(x)$

Observación

- Si f es una función convexa en un subconjunto abierto convexo U de un espacio de Banach X . Se deduce que para todo $x \in U$ y $h \in S(X)$, los limite unilaterales

$$F^+(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \quad (2.13)$$

$$\text{y } F^-(h) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \quad (2.14)$$

existen finitamente y también se tiene que

$$F^-(h) = -F^+(-h) \text{ y } F^-(h) \leq F^+(h) \quad (2.15)$$

- La función norma $\| \cdot \|$ es Gâteaux diferenciable si y solo si $F^+(h) = F^-(h)$ para todo $h \in X$
- La función norma $\| \cdot \|$ es Frechét diferenciable en x si esta es Gâteaux diferenciable en x y el límite en $F(h)$ existe uniformemente para $\|h\| \leq 1$ mientras $t \rightarrow 0^+$.

El siguiente teorema es fundamental para el desarrollo del teorema de caracterización de las normas Frechét diferenciables.

Teorema 2.51

La función norma $\| \cdot \|$ es Frechét diferenciable en $x \neq 0 \in X$ si y solo si (Assadi, 2009)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = 0$$

uniformemente para cada $h \in S(X)$.

Demostración.

(\Rightarrow)

Como la norma es Frechét diferenciable en x , entonces existe $F \in X^*$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} = F(h)$$

uniformemente para cada $h \in S(X)$.

Entonces se tiene que $F^+(h) = F^-(h)$

Como;

$$\frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} + \frac{\|x - th\| - \|x\|}{t} = \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} \quad (2.16)$$

Luego, tomando limite cuando $t \rightarrow 0^+$ en (2.16) se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x - th\| - \|x\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}$$

De la ecuación (2.13) se sabe $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x+th\|-\|x\|}{t} = F^+(h)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = F^+(h) - \left(- \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + t(-h)\| - \|x\|}{t} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = F^+(h) - (-F^+(-h))$$

De la ecuación (2.15) se tiene $-F^+(-h) = F^-(h)$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = F^+(h) - F^-(h)$$

Pero como $F^+(h) = F^-(h)$ entonces se concluye

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = 0 \quad (2.17)$$

Por otro lado, tomando limite cuando $t \rightarrow 0^-$ en (2.16) se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x - th\| - \|x\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}$$

De la ecuación (2.14) se sabe $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x+th\|-\|x\|}{t} = F^-(h)$, entonces

$$F^-(h) + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x - (-t)h\| - \|x\|}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}$$

$$F^-(h) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}$$

De la ecuación (2.13) se sabe $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x+th\|-\|x\|}{t} = F^+(h)$, entonces

$$F^-(h) - F^+(h) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}$$

Pero como $F^+(h) = F^-(h)$ entonces se concluye

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} \quad (2.18)$$

Entonces de las igualdades (2.17) y (2.18) se concluye

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = 0$$

uniforme para cada $h \in S(X)$.

(\Leftarrow)

Primero probaremos que la norma sea Gâteaux diferenciable

Entonces, como la función norma es una función convexa podemos utilizar las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15)

Si f es una función convexa en un subconjunto convexo U de un espacio de Banach X , entonces para cada $x \in U$ y $h \in S(X)$ los límites unilaterales

$$F^+(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t}$$

$$\text{y } F^-(h) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t},$$

existen finitamente

Por otra parte, de la hipótesis sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t} = 0 \quad (2.19)$$

uniformemente para cada $h \in S(X)$

Ahora sabemos

$$\frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} + \frac{\|x - th\| - \|x\|}{t} = \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}$$

Tomando límite cuando $t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x - th\| - \|x\|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| + \|x - th\| - 2\|x\|}{t}$$

Luego, por (2.19) se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x - th\| - \|x\|}{t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + th\| - \|x\|}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x + t(-h)\| - \|x\|}{t} \quad (2.20)$$

Por las ecuaciones (2.13) y (2.15) tenemos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|x+th\|-\|x\|}{t} = F^+(h)$ y $F^-(h) = -F^+(-h)$, entonces de (2.20) se obtiene

$$F^+(h) = -F^+(-h)$$

$$F^+(h) = F^-(h)$$

Como $F^+(h) = F^-(h)$, entonces la norma es Gâteaux diferenciable y como el límite existe uniformemente para cada $h \in S(X)$ se concluye que la norma es Fréchet diferenciable.

III. METODO

3.1 Tipo de Investigación

El presente trabajo de investigación, de acuerdo con su objetivo, se clasifica como una investigación básica. Se caracteriza por ser de naturaleza no experimental y es de tipo documental. Se destaca por su enfoque centrado en la recopilación y análisis de información existente, sin la implementación de experimentación directa.

3.2 Ámbito Temporal Espacial

El presente trabajo de investigación se caracteriza por la ausencia de un ámbito temporal espacial específico. Dada su naturaleza teórica, no se han establecido límites temporales ni espaciales, ya que la recopilación y análisis de datos se llevaron a cabo de manera independiente de tales dimensiones.

3.3 Variables

Es importante señalar que en este trabajo de investigación no se han considerado variables específicas. El enfoque de la investigación, no requirió la inclusión de variables particulares, ya que el análisis y la discusión se llevaron a cabo sin la necesidad de incorporar factores variables en el desarrollo del estudio.

3.4 Población y Muestra

Dada a la naturaleza de la investigación es principalmente teórica y carece de componentes experimentales, no resulta necesario establecer una población específica ni seleccionar una muestra.

3.5 Instrumentos

En la presente investigación, se hará uso de diversas herramientas metodológicas para asegurar la solidez y rigurosidad de la investigación. Por lo que se llevará a cabo una exhaustiva revisión bibliográfica de artículos y revistas científicas referentes al tema, estudiar nos permitirá realizar una exploración fundamentada y examinar los avances teóricos y metodológicos. Además, se realizará un meticuloso análisis de la información recolectada a partir de las fuentes bibliográficas seleccionadas, lo cual será primordial para identificar modelos y enfoques significativos relacionados con el tema de investigación. Para garantizar la validez de los resultados obtenidos, se aplicará un enfoque lógico matemático-riguroso a la argumentación teórica y al desarrollo de las demostraciones.

Estos instrumentos trabajarán de manera conjunta para asegurar la calidad y originalidad del presente trabajo de investigación, así como para contribuir al avance del conocimiento en el tema.

3.6 Procedimiento

- Recolección de la información

Se recopiló una cantidad considerable de información (artículos, libros, etc.) respecto al tema a desarrollar.

- Análisis de información y literatura absoluta

Se llevo a cabo la revisión y análisis de toda la información recogida y seleccionada con respecto al tema a desarrollar (artículos, libros, etc.)

- Desarrollo de los temas

Se continua a desarrollar el tema, primero se mencionaron algunos conceptos fundamentales previos, para luego seguir con el avance del proyecto.

- Exposición de ejemplos y análisis del teorema principal, objeto de la investigación.

3.7 Análisis de Datos

Es importante señalar que esta investigación no incluye un análisis de datos en el sentido convencional, ya que la naturaleza de la investigación es no experimental, donde el enfoque principal es el desarrollo y la demostración de un teorema fundamental.

3.8 Consideraciones Éticas

En el desarrollo del presente trabajo, se aborda de manera ética, observando con respeto la autoría de la información y citando las referencias según las pautas establecidas en el formato APA de la séptima edición.

IV. RESULTADOS

En este capítulo, aplicaremos los conocimientos adquiridos hasta ahora, enfocándonos principalmente en las nociones de diferenciabilidad. El objetivo es desarrollar un teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciables en espacios de Banach, complementado con la presentación de dos consecuencias derivadas de dicho teorema. Este enfoque nos brindará una comprensión más profunda de las condiciones específicas que una norma debe satisfacer para que la función norma $\| \cdot \|$, definida en un espacio de Banach, sea considerada Fréchet diferenciable.

4.1 Teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciable

Sean $(X, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach y $x \in S(X)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) La función norma $\| \cdot \|$ es Fréchet Diferenciable en x .
- b) Para todo $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S(X^*)$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\| = 0 \text{ en } X^*.$$
- c) Cada $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S(X^*)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ converge en $S(X^*)$.

Demostración.

(a) \Rightarrow (b)

Supongamos que la función norma $(\| \cdot \|)$ es Fréchet Diferenciable en $x \in S(X)$. Por el Teorema 2.51 se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| + \|x - ty\| - 2\|x\|}{t} = 0$$

uniformemente para cada $y \in S(X)$. Esto significa que si

$$O(h) = \|x + ty\| + \|x - ty\| - 2\|x\|$$

entonces

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{O(h)}{\|h\|} = 0$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x + y\| + \|x - y\| \leq 2 + \varepsilon\|y\|$$

Para cada $y \in S(X)$ con $\|y\| < \delta$.

Ahora supongamos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S(X^*)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - 1| < \varepsilon\delta, \text{ para todo } n \geq N_1$$

Análogamente, para $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g_n(x) - 1| < \varepsilon\delta, \text{ para todo } n \geq N_2$$

Luego, si $M = \max\{N_1, N_2\}$ entonces para cada $n > M$

$$|f_n(x) - 1| < \varepsilon\delta \quad \text{y} \quad |g_n(x) - 1| < \varepsilon\delta$$

Así,

$$\begin{aligned} (f_n - g_n)(y) &= f_n(y) - g_n(y) \\ &= f_n(y) + f_n(x) - f_n(x) + g_n(x) - g_n(x) - g_n(y) \\ &= f_n(x + y) + g_n(x - y) - f_n(x) - g_n(x) \\ &\leq |f_n(x + y)| + |g_n(x - y)| - f_n(x) - g_n(x) \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{f \in S(X^*)} |f_n(x+y)| + \sup_{g \in S(X^*)} |g_n(x-y)| - f_n(x) - g_n(x)$$

Ahora, por el Corolario 2.32 tendríamos

$$\begin{aligned} (f_n - g_n)(y) &\leq \sup_{f \in S(X^*)} |f_n(x+y)| + \sup_{g \in S(X^*)} |g_n(x-y)| - f_n(x) - g_n(x) \\ &= \|x+y\| + \|x-y\| - f_n(x) - g_n(x) \\ &\leq 2 + \varepsilon\|y\| - f_n(x) - g_n(x) \\ &= \varepsilon\|y\| + (1 - f_n(x)) + (1 - g_n(x)) \\ &\leq \varepsilon\|y\| + |f_n(x) - 1| + |g_n(x) - 1| \\ &\leq \varepsilon\delta + \varepsilon\delta + \varepsilon\delta \\ &= 3\varepsilon\delta \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $n > M$ se obtiene

$$(f_n - g_n)(y) \leq 3\varepsilon\delta$$

Para todo y con $\|y\| \leq \delta$. Luego, como

$$\|f_n - g_n\| = \sup_{h \in S(X)} |(f_n - g_n)(h)| = \sup_{h \in S(X)} \frac{|(f_n - g_n)(\delta h)|}{\delta}$$

Pero de δh se obtiene que $\|\delta h\| = \delta$. Entonces

$$\begin{aligned} \sup_{h \in S(X)} |(f_n - g_n)(\delta h)| &\leq 3\varepsilon\delta \\ \Rightarrow \sup_{h \in S(X)} \frac{|(f_n - g_n)(\delta h)|}{\delta} &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

En consecuencia, se obtiene la desigualdad

$$\|f_n - g_n\| \leq 3\varepsilon \text{ para todo } n > M$$

Por lo tanto, se concluye que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\| = 0$ en X^*

(b) \Rightarrow (a)

Vamos a suponer que la función norma $\| \cdot \|$ no sea Frechét diferenciable en x .

Entonces, por el Teorema 2.51 se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| + \|x - ty\| - 2\|x\|}{t} \neq 0$$

uniformemente para algún $y \in S(X)$. Esto significa que si

$$O(h) = f\|x + ty\| + \|x - ty\| - 2\|x\|$$

entonces

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{O(h)}{\|h\|} \neq 0$$

Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ se tiene que

$$\|x + y\| + \|x - y\| > 2 + \varepsilon\|y\| \tag{4.1}$$

Para algún $y \in S(X)$ con $\|y\| \leq \delta$.

Luego, tomando $\delta = \frac{1}{n} > 0$, tenemos

$$\|x + y\| + \|x - y\| > 2 + \varepsilon\|y\|$$

Para algún y_n con $\|y_n\| \leq \frac{1}{n}$

Ahora, como $x + y_n, x - y_n \in X$ son diferentes de cero, haciendo uso del Corolario 2.31, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subset S(X^*)$ que satisfacen

$$\|f_n\| = 1 \text{ con } f_n(x + y_n) = \|x + y_n\|$$

$$\text{y } \|g_n\| = 1 \text{ con } g_n(x - y_n) = \|x - y_n\|$$

Por otro lado, sabemos

$$|\|x + y_n\| - \|x\|| \leq |\|x\| + \|y_n\| - \|x\|| = \|y_n\| \leq \frac{1}{n}$$

Entonces como $f_n(x + y_n) = \|x + y_n\|$ y $\|x\| \in S(X)$, se tiene

$$|f_n(x + y_n) - 1| \leq \frac{1}{n}$$

Luego, aplicando limite tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + y_n) = 1$$

Además, sabemos

$$\frac{|f_n(y_n)|}{\|y_n\|} \leq \sup_{x \in X} \frac{|f_n(x)|}{\|x\|} = \|f_n\| = 1$$

En consecuencia, como $\|y_n\| \leq \frac{1}{n}$ se tendrá

$$|f_n(y_n)| \leq \|y_n\| \leq \frac{1}{n}$$

Lo cual implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n) = 0$

Luego, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x + y_n) - f_n(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) + f_n(y_n) - f_n(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$$

Por otra parte

$$|\|x - y_n\| - \|x\|| \leq \|x - y_n - x\| = \|-y_n\| = \|y_n\| \leq \frac{1}{n}$$

Entonces como $g_n(x - y_n) = \|x - y_n\|$, se tiene

$$|g_n(x - y_n) - 1| \leq \frac{1}{n}$$

Luego aplicando limite, se tendría

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x - y_n) = 1$$

Además, sabemos

$$\frac{|g_n(y_n)|}{\|y_n\|} \leq \sup_{x \in X} \frac{|g_n(x)|}{\|x\|} = \|g_n\| = 1$$

En consecuencia, se tendrá que

$$|g_n(y_n)| \leq \|y_n\| \leq \frac{1}{n}$$

Lo cual implica $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y_n) = 0$

Luego, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x + y_n) - g_n(y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) + g_n(y_n) - g_n(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1 \end{aligned}$$

Ahora, sabemos

$$f_n(x) \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\| = 1 \quad y \quad g_n(x) \leq |g_n(x)| \leq \|g_n\| = 1$$

De donde se obtiene

$$f_n(x) + g_n(x) \leq 2 \tag{4.2}$$

Ahora, de la desigualdad (4.1)

$$\|x + y_n\| + \|x - y_n\| > 2 + \varepsilon \|y_n\|$$

$$f_n(x + y_n) + g_n(x - y_n) > 2 + \varepsilon \|y_n\|$$

$$f_n(x) + f_n(y_n) + g_n(x) - g_n(y_n) > 2 + \varepsilon \|y_n\|$$

$$(f_n - g_n)(y_n) + (f_n + g_n)(x) > 2 + \varepsilon \|y_n\|$$

De la desigualdad (4.2) se llega a que $(f_n - g_n)(y_n) \geq \varepsilon \|y_n\|$

En consecuencia

$$\varepsilon \|y_n\| < (f_n - g_n)(y_n) \Rightarrow \varepsilon < \|f_n - g_n\|$$

Lo cual es una contradicción a la hipótesis que nos dice $\|f_n - g_n\| \leq \varepsilon$, Por lo tanto, se concluye que la norma es Frechét diferenciable

(b) \Rightarrow (c)

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S(X^*)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ con $x \in S(X)$

Por el Corolario 2.31 existe algún $f \in S(X^*)$ tal que $f(x) = \|x\| = 1$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea $g_n = f$, tendríamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x) = 1$, pero de la hipótesis se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \text{ en } X^*$$

Por lo tanto, se concluye que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $f \in S(X^*)$

(c) \Rightarrow (b)

Consideremos $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S(X^*)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1$

Luego, para cada $y \in X$, definamos las siguientes funciones

$$\begin{cases} h_n(y) = f_{\frac{n+1}{2}}(y) \text{ para valores impares de } n \\ h_n(y) = g_{\frac{n}{2}}(y) \text{ para valores pares de } n \end{cases}$$

En consecuencia, tenemos

$$h_{2n} = g_n \in S(X^*)$$

$$\text{y } h_{2n-1} = f_n \in S(X^*)$$

Luego como $h_{2n}, h_{2n-1} \in S(X^*)$, entonces $(h_n)_{n=1}^{\infty} \subset S(X^*)$, además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_{2n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = 1 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} h_{2n-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 \text{ y}$$

Entonces, se obtiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 1$

Ahora, de la hipótesis se tiene que existe un $h \in S(X^*)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n - h = 0$ en X^* .

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|f_n - g_n\| &= \|h_{2n-1} - h_{2n}\| \\ &= \|h_{2n-1} - h + h - h_{2n}\| \\ &\leq \underbrace{\|h_{2n-1} - h\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|h_{2n} - h\|}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\| = 0$

■

A partir de la aplicación del teorema de caracterización de las normas Frechét diferenciables, procederemos a validar la segunda consecuencia de dicho teorema, considerando el concepto de espacio localmente uniformemente convexa, según la Definición 2.42.

4.2 Primera consecuencia del teorema de caracterización de la norma

Si X^* es localmente uniformemente convexo, entonces la función norma $\| \cdot \|$ es Frechét diferenciable en X .

Demostración.

Supongamos que $x \in S(X)$ y consideremos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S(X^*)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$.

Entonces existe algún funcional $f \in S(X^*)$ tal que $f(x) = 1$, ahora sabemos por el corolario 2.31

$$(f_n + f)(x) \leq \|f_n + f\| \leq 2 \quad (4.3)$$

Pero como $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ y $f(x) = 1$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + f)(x) = 2 \quad (4.4)$$

Luego, tomando limite cuando $n \rightarrow \infty$ en (4.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n + f)(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n + f\| \leq 2 \quad (4.5)$$

Remplazando (4.4) en (4.5) se tiene

$$2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n + f\| \leq 2$$

Con lo cual se llega a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n + f\| = 2$

Pero sabemos de la hipótesis que X^* es localmente uniformemente convexo lo cual implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n + f\| = 0$$

Entonces $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $S(X^*)$.

Luego, por el Teorema se concluye que la función norma $\| \cdot \|$ es Frechét diferenciable.

■

La primera consecuencia del teorema de caracterización de la norma nos muestra que la convexidad local uniforme del dual de un espacio de Banach es una condición suficiente para garantizar la diferenciabilidad de Fréchet de la norma en dicho espacio. Este resultado establece una conexión profunda entre la geometría del espacio dual y la regularidad de la norma, proporcionando así una caracterización precisa de la diferenciabilidad de la norma en términos de propiedades geométricas del espacio dual. La técnica empleada se basa en la representación de funcionales lineales y en argumentos de convexidad, y permite obtener una descripción detallada del comportamiento local de la norma en puntos donde la derivada de Fréchet existe.

Luego, a partir de la aplicación del teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciable, procederemos a validar la segunda consecuencia derivada de ella, considerando el concepto de reflexividad.

4.3 Segunda consecuencia del teorema de caracterización de la norma

Si la función norma $\| \cdot \|$ de X^* es Fréchet diferenciable, entonces X es un espacio reflexivo.

Demostración.

Sabemos por la caracterización de espacios reflexivos. Un espacio de Banach es reflexivo si y solo si todo $x^* \in X^*$ alcanza su norma en la esfera unitaria de X , es decir, dado $x^* \in X^*$ existe $x \in S(X)$ tal que $x^*(x) = \|x^*\|$.

Ahora, si $f \in S(X^*)$ y eligiendo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in S(X)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$.

Luego, por el teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciable $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en $S(X)$, esto es, existe $x \in S(X)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

Por otro lado, sabemos que $f \in X^*$ por lo tanto es un operador lineal y acotado, entonces

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 = \|f\|$$

Si ahora $f \in X^*$ con $f \neq 0$, entonces $\frac{f}{\|f\|} \in S(X^*)$, en consecuencia,

$$\exists x \in S(X) \text{ tal que } \frac{f}{\|f\|}(x) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \|f\|$$

Por lo tanto, se concluye que X es un espacio reflexivo.

■

La segunda consecuencia del teorema de caracterización de la norma, hemos establecido una nueva caracterización de la reflexividad de los espacios de Banach en términos de la diferenciabilidad de la norma dual. Este resultado, obtenido mediante técnicas de análisis funcional no lineal, profundiza nuestra comprensión de la relación entre la geometría suave de un espacio de Banach y su estructura algebraica. Además, permite explorar nuevas vías de investigación en el estudio de la geometría de los espacios de Banach no reflexivos y en la búsqueda de caracterizaciones similares para otras clases de espacios.

V. DISCUSION DE RESULTADOS

En relación con el objetivo central establecido en este estudio, que es enunciar y demostrar un teorema que caracteriza la diferenciabilidad de la norma en un espacio de Banach, los resultados revelan que dicho teorema se presenta como una herramienta de gran utilidad en para entender mejor la diferenciabilidad, pues el teorema brinda una garantía acerca de las condiciones bajo las cuales se puede afirmar la diferenciabilidad Fréchet de una norma, considerando conjuntos de sucesiones lineales acotadas. Es importante destacar que también existen otras formas de determinar cuándo una norma es Fréchet diferenciable y cuándo no; por ejemplo, en Muñoz (2022), se exploran algunas particularidades de los conjuntos de diferenciabilidad generados a partir de las normas en los espacios de Banach. Además, en este contexto, demostró que la medida gaussiana del conjunto de diferenciabilidad Fréchet de la norma en el espacio $\ell^\infty(\mathbb{R})$ de secuencias acotadas de números reales es nula. Asimismo, evidencio que, en el caso del espacio $BV[a, b]$ de funciones de variación acotada, su norma no es Fréchet derivable en ningún elemento de este espacio.

VI. CONCLUSIONES

- Se llegó a demostrar un teorema de caracterización de norma diferenciable en un espacio de Banach con éxito a lo largo de esta investigación. La formulación y la demostración del Teorema de Šmulian, que caracteriza las normas Fréchet diferenciables, no solo cumple con la meta propuesta, sino que también proporciona una contribución sustancial al entendimiento de la diferenciabilidad en estos espacios normados.
- Se analizaron las condiciones necesarias para que una función sea Fréchet diferenciable y Gâteaux diferenciable en un punto x , y en qué condiciones una diferenciabilidad implica la otra. Estos resultados proporcionan una comprensión más profunda de las propiedades de diferenciabilidad de las funciones en espacios de Banach.
- Se investigó diversas propiedades geométricas, particularmente aquellas relacionadas con la rotundidad en un espacio de Banach. Este análisis resultó crucial para ampliar la comprensión de la diferenciabilidad de Fréchet en tales espacios.
- La investigación ha demostrado que la diferenciabilidad de la norma en espacios de Banach no solo está relacionada con la continuidad diferenciable, sino que también influye la estructura general de estos espacios. La identificación de esta relación ha proporcionado una visión más clara de cómo las propiedades de las normas impactan en la diferenciabilidad, contribuyendo significativamente a enunciar y demostrar un teorema de caracterización de norma diferenciable.
- Se logró una comprensión e interpretación más profunda acerca de las condiciones bajo las cuales una norma es Fréchet diferenciable, mediante el análisis de las consecuencias del teorema de caracterización de las normas Fréchet diferenciables.

VII. RECOMENDACIONES

Se recomienda considerar la exploración de la diferenciabilidad de la norma en espacios de Banach que posean propiedades adicionales, como los espacios de Fréchet o los espacios de Hilbert, y estructuras complementarias como los espacios de Banach con producto interno o estructura métrica. Estas áreas de interés no solo profundizarían en la comprensión de la diferenciabilidad, sino que también podrían proporcionar una base sólida para investigaciones futuras. Se sugiere también examinar la inclusión de ejemplos prácticos, ya que esto no solo facilitaría la visualización de los resultados, sino que también enriquecería su aplicabilidad y relevancia en contextos más generales de espacios normados. Estas recomendaciones no solo ofrecen oportunidades para ampliar el alcance de la investigación actual, sino que también establecen un camino sugerente para investigaciones futuras en el apasionante campo de la diferenciabilidad en espacios de Banach y especialmente en el análisis funcional no lineal.

VIII. REFERENCIAS

- Assadi, A., Haghshenas, H., & Guive, H. H. (2009). *A Review on Some Geometric Results of the Smulian's Theorem on Frechet Differentiability of Norms* (arXiv:0810.0773). arXiv.
<http://arxiv.org/abs/0810.0773>
- Bartle, R. G. (1980). *Introducción al análisis matemático*. Limusa.
- Beauzamy, B. (1982). *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry*. North-Holland.
- Cabrales, R. C., & Rojas-Medar, M. A. (2006). Sobre la diferenciabilidad de funciones en espacios de Banach. *Revista Integración*, 24(2), 87-100.
- De Blasi, F. S. (1977). On a Property of the Unit Sphere in a Banach Space. *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie*, 21 (69)(3/4), 259-262.
- Deville, R., Godefroy, G., & Zizler, V. (1993). *Smoothness and renormings in Banach spaces* (Vol. 64). Longman Scientific Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley Sons.
- Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V., & Zizler, V. (2011). *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7>
- Fabian, M. J. (2001). *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*. Springer Science & Business Media.
- García, J. (2007). *Análisis Funcional No Lineal*. Universidad de Valencia.
- Guccine, J. A., & Guccine, J. A. (2017). *Espacios Métricos*. Universidad de Buenos Aires
- Guzman, A. (2012). *Continuous Functions of Vector Variables*. Springer Science & Business Media.
- Herrero, P. (2010). *Topología de Espacios Métricos*. Universidad de Murcia.
- Jahn, J. (2020). *Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization*. Springer Nature.

- James, R. C. (1964). Characterizations of reflexivity. *Studia Mathematica*, 23, 205–216.
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons.
- León, L. (2008). *Análisis funcional I*. Universidad de Los Andes Consejo de Publicaciones Mérida - Venezuela.
- Martin, J. (2010). *Análisis Funcional y Optimizacion*.
<https://departamento.us.es/edan/php/asig/LICMAT/LMAFO/ApuntesAFO1011.pdf>
- Muñoz, A. F. (2022). On the differentiability of norms in Banach spaces. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(2), 2015-2023.
<https://doi.org/10.22075/ijnaa.2020.22114.2329>
- Phelps, R. R. (1989). *Convex functions, monotone operators, and differentiability* (1st ed. 1989.). Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-21569-2>
- Reyes, A. (2010). *Sobre Diferenciabilidad y Teorema de Optimizacion en Espacios de Banach*. [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. Repositorio UNAM.
<https://repositorio.unam.mx/contenidos/3437656>
- Sarsoruo, R. G. (2020). Differentiability in normed spaces: A new approach, *Electronic Journal of informatics*. 3, 51-71.
- Siddiqi, A. H. (2018). *Functional Analysis and Applications*. Springer.
- Simon, J. (2017). *Banach, Fréchet, Hilbert and Neumann Spaces*. John Wiley & Sons.
- Villanueva, I. (s. f.). *Análisis Funcional*. <https://blogs.mat.ucm.es/ignaciov/wp-content/uploads/sites/37/2022/02/AnalisisFuncional.pdf>