Universidad Nacional Federico Villarreal

VRIN | VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

ESCUELA UNIVERSITARIA DE POSGRADO

COORDINACIÓN DE PRINCIPIOS DE LAS TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA EL LOGRO DE LAS DIMENSIONES DEL RAZONAMIENTO CUANTITATIVO SOBRE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS EN EL NIVEL ESCOLAR

Línea de investigación:

Educación para la sociedad del conocimiento

Tesis para optar el Grado Académico de Doctor en Educación

Autor:

Morales Martínez, Zenón Eulogio

Asesora:

Guillén Aparicio, Patricia Edith

(ORCID: 0000-0002-8143-3646)

Jurado:

Maldonado Calderón, Julia Soledad

Cumpa Farfán, Luis Alberto

Garvich Ormeño, Angie Marlene

Lima - Perú

2023

Reporte de Análisis de Similitud

Archivo:	1A_MORALES_MARTÍNEZ_ZENÓN_EULOGIO_DOCTORADO_2022.docx
Fecha del Análisis:	18/05/2022
Analizado por:	Astete Llerena, Johnny Tomas
Correo del analista:	jastete@unfv.edu.pe
Porcentaje:	3 %
Título:	"COORDINACIÓN DE PRINCIPIOS DE LAS TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA EL LOGRO DE LAS DIMENSIONES DEL RAZONAMIENTO CUANTITATIVO SOBRE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS EN EL NIVEL ESCOLAR"
Enlace:	https://secure.urkund.com/old/view/130907007-309671-750565#BcE7CoAwEAXAu2z9kH3Z/K8iKSSopDBNSvHuzrzyLKm7gqCBHgxghINHREJukDXuOa7Rj9lPqbqps2BUlpCsZKbvBw==

UNIVERSIDAD NACIONAL FEDERICO VILLARREAL
OFICINA DE GRADOS Y GESTIÓN DEL EGRESADO

DRA. MIRIAM LILIANA FLORES CORONADO
JEFA DE GRADOS Y GESTIÓN DEL EGRESADO

Universidad Nacional Federico Villarreal

VRIN | VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN

ESCUELA UNIVERSITARIA DE POSGRADO

COORDINACIÓN DE PRINCIPIOS DE LAS TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA EL LOGRO DE LAS DIMENSIONES DEL RAZONAMIENTO CUANTITATIVO SOBRE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS EN EL NIVEL ESCOLAR

Línea de Investigación:
Educación para la Sociedad del Conocimiento

Tesis para optar el Grado Académico de Doctor en Educación

Autor
Morales Martínez, Zenón Eulogio

Asesora
Guillén Aparicio, Patricia Edith
ORCID: 0000 – 0002 – 8143 – 3646

Jurado
Maldonado Calderón, Julia Soledad
Cumpa Farfán, Luis Alberto
Garvich Ormeño, Angie Marlene

Lima – Perú
2023

Dedicatoria

Gracias a Dios por todas las bendiciones.

A mi mamá Hilda, papá Zenón y hermanos, por todo su cariño

A Caty, Renato y Rodrigo, mis inspiraciones.

A mis alumnos, de muchas generaciones.

A los maestros del Perú y del Mundo, transformadores de vidas

Agradecimientos

A mis docentes del Doctorado de Educación por tanta sabiduría

A mis compañeros del Doctorado por sus cariños sinceros

A la Dra. Patricia Guillén, por su sabia asesoría

Índice

Índice de Tablas

Índice de Figuras

Resumen

La investigación tiene como objetivo determinar si existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) y las transformaciones semióticas de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS), para favorecer los aprendizajes de las funciones cuadráticas medidas a través de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicadas al nivel escolar. Investigaremos cómo la realidad académica lograda a través de los aprendizajes previos y la realidad del mundo real, cuando se integran, coordinan o encuentran similitudes con los tratamientos y conversiones de la TRRS, permiten que los procesos de matematización logren los aprendizajes de las funciones cuadráticas. La investigación tiene un enfoque cuantitativo y participaron 95 docentes de una maestría de una universidad estatal. A ellos se les aplicó un cuestionario construido con el uso de la escala de Likert, a partir del análisis de las variables de estudio. Este instrumento permite comprobar las hipótesis de la investigación. Los resultados demuestran que existe una relación significativa entre la coordinación del principio de realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS para favorecer el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo, así mismo se obtuvo que un 93,7 % de los docentes evaluados se encuentra en un nivel destacado, lo que evidencia que la mayoría de los docentes evaluados consideran que las coordinaciones, similitudes, semejanzas o integración de los principios de estas teorías favorecen el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo.

Palabras claves: Coordinación de teorías, Educación Matemática Realista, Teoría de Registros de Representación Semiótica, Razonamiento Cuantitativo.

Abstract

The objective of the research is to determine if there is a significant relationship between the coordination of the Reality Principle of the Theory of Realistic Mathematics Education (EMR) and the semiotic transformations of the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS), to favor the learning of the quadratic functions measured through the dimensions of Quantitative Reasoning applied at the school level. We will investigate how the academic reality achieved through prior learning and the reality of the real world, when integrated, coordinated, or find similarities with the TRRS treatments and conversions, allow the mathematization processes to achieve the learning of quadratic functions. The research has a quantitative approach and 95 professors of a master's degree from a state university participated. A questionnaire built with the use of the Likert scale was applied to them, based on the analysis of the study variables. This instrument allows testing the research hypotheses. The results show that there is a significant relationship between the coordination of the reality principle of the EMR and the semiotic transformations of the TRRS to favor the achievement of the dimensions of quantitative reasoning, likewise it was obtained that 93.7% of the teachers evaluated is at an outstanding level, which shows that most of the teachers evaluated consider that the coordination, similarities, similarities or integration of the principles of these theories favor the achievement of the dimensions of quantitative reasoning.

Keywords: Coordination of theories, Realistic Mathematics Education, Register Theory of Semiotic Representation, Quantitative Reasoning.

Resumo

O objetivo da pesquisa é determinar se existe uma relação significativa entre a coordenação do Princípio de Realidade da Teoria da Educação Matemática Realística (EMR) e as transformações semióticas da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), para favorecer a aprendizagem das funções quadráticas medidas através das dimensões do Raciocínio Quantitativo aplicado ao nível escolar. Investigaremos como a realidade acadêmica alcançada através do aprendizado prévio e a realidade do mundo real, quando integradas, coordenadas ou encontradas semelhanças com os tratamentos e conversões TRRS, permitem que os processos de matematização alcancem o aprendizado de funções quadráticas. A pesquisa tem abordagem quantitativa e contou com a participação de 95 professores de mestrado de uma universidade estadual. A eles foi aplicado um questionário construído com o uso da escala Likert, com base na análise das variáveis do estudo. Este instrumento permite testar as hipóteses de investigação. Os resultados mostram que existe uma relação significativa entre a coordenação do princípio de realidade do EMR e as transformações semióticas do TRRS para favorecer o alcance das dimensões do raciocínio quantitativo, da mesma forma foi obtido que 93,7% dos professores avaliados está em um nível excepcional, o que mostra que a maioria dos professores avaliados considera que a coordenação, semelhanças, semelhanças ou integração dos princípios dessas teorias favorecem o alcance das dimensões do raciocínio quantitativo.

Palavras-chave: Coordenação de teorias, Educação Matemática Realista, Teoria dos Registos da Representação Semiótica, Raciocínio quantitativo.

I. INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha permitido que distintos investigadores hagan sendas miradas reflexivas sobre esta complejidad, creando diversas teorías locales sobre "el contenido matemático, el aprendizaje de los alumnos, el entorno social, la organización de la clase, el uso de determinados recursos materiales" (Font, 2013, p. 1).

En esta investigación abordaremos un análisis de los problemas del aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque cognitivo de la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) propuesta por el Freudenthal (1973) "que ha sido desarrollada en un número de teorías de instrucción local para diferentes temas matemáticos, edades de los estudiantes y niveles de rendimiento" (Drijvers, 2020b, p. 3) y que nos permitirá que los alumnos a través de la "fenomenología didáctica" de esta teoría logren transformar "objetos no realistas" en "objetos realistas" que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas. Este "marco realista", se coordinará con el "marco semiótico" de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval (2011), que propone que "lo que importa no es la representación, sino su transformación. A diferencia de las otras áreas de conocimiento científico, los signos y la transformación de la representación semiótica se encuentran en el corazón de la actividad matemática" (p. 3), aquí una primera coincidencia entre ambos: la actividad matemática que realiza el alumno construyendo objetos "realistas" apoyándose en la representación de registros semióticos.

Esta investigación se inspira en los aportes de Raymond Duval presentados en la Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) que permite la representación numérica, simbólica, tabular o figural de objetos matemáticos para favorecer los procesos educativos que permitan el aprendizaje de las matemáticas; así como los aportes de Hans

Freudenthal que llegan a Perú a través de Drijvers (2020a) cuando en febrero de 2020 presenta su conferencia titulada “Una visión realista de la Educación Matemática Realista (EMR)” (p. 1), en esta se exponen los principios de la EMR, así como hace una introducción sobre conceptos como reinvención guiada, fenomenología didáctica que tienen un gran rol pedagógico en los procesos de la educación matemática. Esta investigación también se justifica en la experiencia en la enseñanza por parte del autor y su participación en diversos congresos internacionales de educación matemática entre ellos en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), en el Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM), en el *International Congress on Mathematical Education* (ICME), en las Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), entre otros.

Así mismo, en estudios realizados ante la complejidad de los procesos en el aprendizaje de las matemáticas encontramos que este problema se hace evidente en las aulas de clase, ante esto Morales-Martínez (2013), nos plantea que:

> en la enseñanza de las matemáticas, encontramos que las dificultades sobre la comprensión de las nociones matemáticas se presentan en el alumno y en muchos casos el profesor no puede explicar la causa de estas dificultades y nosotros los profesores le hacemos muchas preguntas al alumno, como: ¿Por qué no estudias? ¿Qué es lo que no entiendes? ¿Por qué no te concentras? Y muchas interrogantes nos hacemos los profesores cuando nuestros alumnos no tienen éxito en el aprendizaje del objeto matemático enseñado. (p. 4)

Es así como encontramos que los alumnos presentan un deficiente desarrollo de las tareas de matemáticas y escaza participación en la clase de matemáticas, esto se hace evidente cuando el docente está realizando una clase virtual, de 40 alumnos conectados a la sesión, apenas unos 10 alumnos participan en forma activa. Y cuando se les evalúa en forma sumativa y las notas son relativamente bajas, opinan que no entienden las matemáticas. Con este enfoque cognitivo que nos permiten estas dos teorías EMR y TRRS, encontraremos que hay objetos matemáticos que no pueden ser manipulados en las actividades que permiten la resolución de problemas porque aún no son realistas para el alumno o no logran hacer uso de los registros semióticos para lograr la realidad de estos objetos que les permitan el éxito en el aprendizaje de las matemáticas.

1.2 Descripción del problema

Según el Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, IREM-PUCP, (2021) que presenta tres Líneas de Investigación, nuestra investigación corresponde a la Línea 3 que trata sobre el "Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática", porque estamos interesados en:

> desarrollar investigaciones centradas en: a) cuáles deberían ser los conocimientos didáctico-matemáticos de un profesor para el desarrollo de un tópico específico; b) cuáles deberían ser los conocimientos didáctico matemático de un profesor para el desarrollo de un tipo de pensamiento matemático específico. c) el diseño y análisis de organizaciones didácticas para la enseñanza de un determinado tópico. (IREM-PUCP, 2021, sección de Líneas de Investigación, párr.3)

Así mismo en consulta al documento que presenta las Líneas de Investigación de la Universidad Nacional Federico Villarreal, UNFV, (2021), se propone que "las líneas son multidisciplinarias, transversales y están orientadas a solucionar los principales problemas sociales, científicos y tecnológicos de nuestra sociedad" (p. 3). Nuestra investigación corresponde al Área de Investigación: Humanidades y Ciencias Sociales, la Línea 19, "Educación para la sociedad del conocimiento" sostiene que:

> Esta línea de investigación privilegia la investigación interdisciplinaria de los procesos educativos, los cambios culturales, científicos y tecnológicos, las políticas educativas, sociología e historia de la educación, la influencia de las TIC en la organización del sistema educativo, las sociedades de las redes, el futuro de la educación superior. (UNFV, 2021, p.11)

En esta investigación mostraremos que los maestros disponen de esos conocimientos didáctico matemáticos (IREM-PUCP, 2021) a través de estas teorías EMR y TRRS para enfrentar la complejidad de aprender matemática, donde estas teorías que emergen de la investigación interdisciplinaria de los procesos educativos (UNFV, 2021, p.11), se reúnen en esta investigación para una actuación sinérgica que llamamos "coordinación de teorías o el problema de comparación y articulación de teorías" (Font, 2013, p.5), para formar alumnos realistas-semióticos que aprendan matemáticas.

Uno de los desafíos científicos relacionado a nuestra investigación es la siguiente:

> La mejora de las aulas de matemáticas depende en parte de la posibilidad de los avances en la investigación en educación matemática, en la que estudios y concepciones se puedan construir sucesivamente sobre la investigación empírica. Pero ¿cómo hacerlo cuando marcos teóricos diferentes no se pueden vincular a otros? Para esto este camino las teorías se tienen que entender entre ellas, se tienen que comparar, coordinar, integrar parcialmente, etc. (Prediger et al. 2008)

De esta manera, nuestro trabajo permitirá localizar, explicar y dar la naturaleza de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y la influencia de la coordinación de las Teorías EMR y TRRS en el éxito del aprendizaje esperado. Entendido que el problema ya está descrito, ahora hacemos una mirada epistemológica del arte, que nos permite encuadrar nuestro problema de investigación en la Educación Matemática. En un trabajo propuesto por Font (2013) en el CIBEM realizado en Montevideo, Uruguay menciona que:

> Conviene distinguir las dos esferas a las que se refiere el nombre "Educación Matemática". Por un lado, Educación Matemática es el conjunto de prácticas llevadas a cabo en distintos escenarios –instituciones formales de educación, instancias informales de aprendizaje, espacios de planificación curricular, etc. – que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y, por el otro lado, Educación Matemática hace mención del estudio científico de los fenómenos de la práctica de la educación matemática. La identificación de estas dos componentes de la educación matemática explica que en muchos casos se utilicen las expresiones "Didáctica de las Matemáticas" (DM) y "Educación Matemática" (EM) como sinónimas, mientras que en otros casos se considere que la DM sería la disciplina interesada principalmente por el campo de la investigación, mientras que la EM también incluiría el primer componente, esto es, abarcaría la teoría, el desarrollo y la práctica. (p. 2)

Es importante señalar estas definiciones de Educación Matemática, porque ambos marcos que aplicaremos (el "realista" y el "semiótico") pertenecen a la DM y nos permiten analizar el conjunto de prácticas llevadas en el escenario escolar con respecto a los procesos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.3 Formulación del Problema

1.3.1 Problema General

De acuerdo con el planteamiento del problema, la pregunta de investigación en el presente trabajo es:

PG: ¿Existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar?

1.3.2 Problemas Específicos

De acuerdo con el planteamiento del problema general, los problemas específicos son:

PE 1: ¿Existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar?

PE 2: ¿Existe relación significativa entre la coordinación entre el Principio de Realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la Teoría TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar?

1.4 Antecedentes de la Investigación

Ante la complejidad de los procesos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la diversidad de teorías sobre didáctica de las matemáticas, en el mundo existen una gran cantidad de investigadores que a través de diversas publicaciones evidencian sus hallazgos sobre esta problemática, estos hallazgos se han realizado sobre el uso de las teorías de la EMR y de la TRRS, nuestra investigación toma como antecedentes los aportes que se hacen sobre el aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, mostramos investigaciones anteriores sobre la EMR en distintas partes del mundo:

1.4.1 Algunas Investigaciones Anteriores sobre la EMR

Gallart (2016) analiza la competencia matemática como la capacidad de los alumnos de matematizar problemas de la vida real, investigando si el trabajo basado en las tareas de modelización repercute positivamente en el desarrollo de competencias necesarias para resolver problemas reales y concluyendo que en el proceso de matematización, los alumnos hacen uso de distintos tipos de representaciones que permiten la codificación en el mundo de las matemáticas de los elementos seleccionados en la realidad, siendo esta codificación fundamental para resolver con éxito el problema matemático (pp. 5, 121). Esta investigación aplica el enfoque realista dado que utiliza modelos de la realidad y el enfoque semiótico porque utiliza distintas representaciones, ambos enfoques para el éxito en el aprendizaje de las matemáticas.

Salgado (2015), investiga qué matemáticas se enseñan (los contenidos) y que se está haciendo "matemáticamente" (los procesos) en las aulas de Educación Inicial, destacando la necesidad de contextos "reales" que permitan una construcción significativa del conocimiento matemático en los niños 4 a 6 años. A través de los resultados de un estudio cuasi-experimental con el uso de modelos como uno en particular denominado "saborea las mates… con una tableta de chocolate" concluyen que los resultados alcanzados son bajos por el nivel de maduración mental de los niños, porque sus objetos realistas en el campo matemático son limitados, dejando una interrogante para investigaciones futuras: ¿qué contextos específicos de otras áreas pueden ser idóneos para el proceso de matematización en la Educación Inicial?.

Nuestra investigación a través del principio de realidad de la EMR puede determinar contextos reales propicios para esta edad infantil y los registros figurales de la TRRS apoyar en el logro de “nuevas realidades” para el infante.

Servín (2017) investiga “poder identificar, en la práctica docente cotidiana algunas de las dificultades que acarrea el aprendizaje de las matemáticas, particularmente el concepto de función, y ofrecer un modelo pertinente al respecto” (p. 19). Tiene como uno de sus objetivos específicos “aplicar las secuencias didácticas de acuerdo con la Educación Matemática Realista” (p. 20), concluyendo que “elaborar secuencias didácticas entre alumnos y profesor, en el marco de la EMR ofrece un ambiente de confianza, favoreciendo la posibilidad de una mejor comprensión del concepto de función” (p. 184). Esta investigación nos justifica uno de nuestros objetivos propuestos que están basados dos principios de la EMR: en el principio de actividad (la matematización) y en el principio de niveles para la elaboración de secuencias didácticas que permitieron la mejor comprensión del concepto de función.

Muñoz y Santos (2020) observan que cuando un docente desarrolla su clase de matemáticas, esta resulta ser “ajena a su realidad y entorno […] que en su mayoría no permite generar una reflexión sobre las acciones o condiciones de vida de los estudiantes y de sus familias” (p. 13). Ante esta problemática se proponen “caracterizar los niveles de matematización […] al abordar situaciones que requiera establecer relaciones entre magnitudes involucrando algunos conceptos básicos de educación financiera” (p. 19). Logrando concluir lo importante que es “enseñar a partir de la realidad y la experiencia del estudiante para lograr en ellos avances en sus niveles de comprensión tanto cognitivos como lingüísticos y de esta manera fomentar una reinvención de las matemáticas formales” (p. 101). Aquí tomamos que las experiencias educativas del estudiante le permiten la creación de nuevos contextos reales que son posibles a la coordinación de los marcos realista y semiótico que emplearemos.

Sanem (2019) hace una investigación sobre 33 tesis de posgrado y 5 artículos de investigación en Turquía, se plantea que "la integración del conocimiento y las habilidades matemáticas con la vida real permitirá a las personas desarrollar sus habilidades de indagación, investigación y discusión" (p. 2). Sobre las investigaciones analizadas, se hace una distribución de estudios por años, por áreas temáticas, por finalidad, por métodos de investigación y por grupos de muestras. La mayoría de las investigaciones concluyen el EMR aumenta el éxito académico de los estudiantes. También se observa que "el curso impartido con la EMR incide positivamente en las actitudes de los estudiantes hacia el curso de matemáticas" (p. 14). La mayoría de las investigaciones en este estudio, concluyen en aspectos positivos sobre la incorporación de la EMR, los estudiantes según el principio de la actividad y realidad de esta teoría se concluye, que los estudiantes "entendían mejor la lección con la EMR […] podían conectar las matemáticas con la vida diaria" y sobre el principio de interactividad de la EMR, cuando realizan trabajos grupales "aumentó la discusión en clase" (p. 15).

Papadakis et al. (2016) proponen "sentar las bases cognitivas en la capacidad de los niños para dominar la enseñanza sistemática de conceptos matemáticos "reales" en etapas educativas posteriores" (p. 1). Por esto esta investigación tuvo como objetivo "comparar la influencia que se ejerce en el desarrollo de la capacidad matemática de los niños del jardín de la infancia, mediante el uso de un método didáctico basado en la EMR" (p. 2) y tiene como discusión final que el "enfoque didáctico que se basa en los principios de la EMR, se basa en la idea que los propios niños construyan conocimientos, un número cada vez mayor de investigadores lo considera muy fructífero para la enseñanza de las matemáticas" (p. 9). Esta investigación nos permite afirmar que los aportes de la EMR aplican a todos los niveles de la educación matemática, desde los niños del jardín de la infancia hasta los estudiantes del nivel superior, porque la "EMR: es una "vieja" teoría desarrollada en el Freudenthal Institute (FI), pero aún vigente y respetada…que ha sido desarrollada en un número de teorías de instrucción local para diferentes temas matemáticos, edades de los estudiantes y niveles de rendimiento" (Drijvers, 2020a, p.4).

1.4.2 Algunas Investigaciones Anteriores sobre la TRRS

Nuestra investigación empleará la contribución de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, cuyas iniciales son TRRS quien nos propone las "ideas claves para el análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas" (Duval, 2005, p. 44), siendo este un enfoque cognitivo, al igual que la EMR, nos propone que para "aliviar" las dificultades de este proceso complejo como es el aprendizaje de las matemáticas, se debe recurrir primero a la representación de los objetos matemáticos para luego realizar la transformaciones necesarias que permitan lograr la resolución de los problemas matemáticos. Raymond Duval nos visitó en Lima como expositor en el VI Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en febrero 2012, donde expuso su conferencia titulada: Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica, donde propone que el acceso a los objetos matemáticos es exclusivamente semiótico, y que toda actividad matemática se logra a través de las transformaciones de representaciones semióticas (PUCP, 2012).

Una gran cantidad de investigadores en el mundo hacen uso de esta teoría para el estudio de las dificultades en los aprendizajes de las matemáticas, en los distintos niveles educativos y en las distintas localidades del mundo matemático. Presentamos algunas investigaciones realizadas con esta teoría, sus objetivos y a qué hallazgos llegaron, que serán tomados en cuenta en nuestra investigación.

Macías (2016) investiga los problemas que tienen los alumnos, partiendo de esta interrogante, ¿qué hay detrás de los errores y dificultades que tienen los alumnos cuando estudian Matemáticas?, señalando algo muy importante que respalda nuestra investigación: existen "trabajos e investigaciones en didáctica que han evidenciado la importancia que tienen las representaciones y los cambios de un registro de representación semiótico a otro, en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas" (p. 8), las principales conclusiones de esta investigación señalan que "toda actividad y proceso matemático lleva consigo la necesidad de cambiar de registro semiótico, motivo por el cual aparecen algunas representaciones implícitas en los contenidos" (p. 1032).

Panizza (2018), se propone dar respuesta a esta interrogante ¿qué significa realizar un estudio didáctico de la definición matemática?, teniendo en cuenta que la respuesta no está en el campo matemático sino en el campo didáctico, y siendo necesario "la posibilidad de formulación en lenguaje natural o la necesidad de recurrir al lenguaje mixto -natural o simbólico-" (p. 7), llega a la conclusión que la parte experimental de esta investigación "motivaron la necesidad de profundizar el conocimiento de las características de los distintos registros utilizados en matemática, a fin de comprender mejor las producciones de los alumnos" (p. 229).

Claros (2010) en su investigación respecto a los docentes de educación secundario se preguntan "¿a qué se deben las dificultades que sufrimos para enseñar correctamente el concepto de límite de una sucesión y para conseguir que se aprenda adecuadamente" (p. 145), para esto se proponen obtener información sobre el enfoque didáctico que permite obtener la noción de límite y "observar se los sistemas de representación usados en los enunciados de las preguntas (verbal, gráfico y tabular) tienen alguna influencia en las respuestas de los alumnos" (p. 427); se concluye que los sistemas de representación más usados son el registro verbal, gráfico y tabular, que el menos usado es el registro simbólico, “debido al carácter intuitivo con el que se presenta la definición de límite” (p. 428).

Rodríguez (2020) en su investigación al observar “las dificultades que evocan los estudiantes al construir y movilizar el objeto matemático función cuadrática” se proponen “diseñar secuencias didácticas en donde los estudiantes puedan coordinar diferentes tipos de representación de la noción matemática función cuadrática” (p. 15), llegando a concluir que los participantes en esta investigación lograron el aprendizaje de la noción de Función Cuadrática empleando “la coordinación de registros de representación lengua natural, algebraico y gráfico” (p. 85) logrando movilizar esto objeto matemático realizando las transformaciones semióticas necesarias.

1.4.3 Antecedentes sobre la Coordinación de Teorías de la Educación Matemática

Font (2013), nos plantea que, debido a la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, esto nos conlleva a “la diversidad de problemas a los que se enfrenta en la actualidad la enseñanza de las matemáticas y los métodos a seguir para su estudio sistemático” (p. 2), ante esto han surgido diversos marcos teóricos, con distintos enfoques, constructivistas o socioculturales o enfoque mixtos. Hacemos mención de las principales Teorías de Educación Matemática (TEM) empleadas en investigaciones como: la Teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema, APOE, (Dubinsky y McDonald, 2001); la Teoría de las Situaciones Didácticas, TSD, (Brousseau, 1997); la Teoría Antropológica de la Didáctica, TAD, (Chevallard, 1991); la Teoría de la Génesis Instrumental, TGI, (Rabardel, 1995); el Enfoque Onto-Semiótico, EOS, (Godino et al., 2006); la Teoría de la Educación Matemática Realista, EMR, (Freudenthal, 1968, 1973); la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, TRRS, (Duval, 1995, 2005, 2011); entre otras teorías. Ante esta problemática, por la diversidad de las Teorías de la Educación Matemática “parece necesario abordar el problema de comparar, coordinar e integrar dichas teorías en un marco que incluya las herramientas necesarias y suficientes para hacer el trabajo requerido” (Font, 2013, p. 7). Delimitamos nuestra investigación a dos teorías ($T_1 = EMR$; $T_2 = TRRS$) de esta larga lista ya existente, una elección no aleatoria de estas dos teorías, esperamos que otros investigadores participen en lo que llamaremos “Investigaciones sobre la Coordinación de Teorías de la Educación Matemática”, CoorTEM, que puede desarrollarse en la Línea de Investigación en Didáctica de las Matemáticas ya existente.

Prediger et al. (2008), nos presentan algunas “estrategias para conectar teorías” (p. 4), que nos proponen ignorar algunas teorías para elegir otras, para lograr “grados de integración de las teorías mutuas” (p. 4). Al comparar teorías, estas muestran sus similitudes y diferencias fuertes, “las similitudes son puntos para vincular y las diferencias fuertes pueden hacer que se hagan visibles las fortalezas individuales” (p. 4) de cada teoría. Es posible que todas las teorías pueden ser comparadas o contrastadas, “aunque es posible que esta coordinación de dos diferentes teorías pueda resultar difícil cuando estas no son compatibles” (p. 6).

1.5 Justificación de la Investigación

El presente trabajo se realiza en el marco del Doctorado de Educación, es una investigación cuantitativa, realizada en el contexto de la Educación Básica. La intención de esta es analizar la existencia de una relación significativa entre la coordinación de las principales teorías de la educación matemática y el logro del razonamiento cuantitativo sobre el aprendizaje de funciones cuadráticas. El éxito en el aprendizaje se verá reflejado cuando los alumnos logren el aprendizaje que se verá reflejado en la adquisición de las principales capacidades matemáticas del nivel escolar. Esta investigación propone una reforma curricular que centre la enseñanza en una mirada a las principales teorías de la educación matemática desarrolladas en el marco de la didáctica de las matemáticas, ciencia que crece para establecer un equilibrio en el encuentro de dos mundos: la vieja cultura de nosotros los maestros con la nueva cultura de los jóvenes alumnos, una cultura digital que viene con toda la influencia de las redes sociales virtuales, y que de alguna manera nos invita a replantear nuestra forma tradicional de enseñar matemática (D´Ambrosio, 2012).

1.5.1 Justificación en el Ámbito Nacional

Para una justificación en el ámbito nacional, tomamos en cuenta las competencias que rigen la educación escolar en nuestro país. El Currículo Nacional de Educación Básica del Minedu (2016), promueve que los aprendizajes de los estudiantes se "deben garantizar como Estado y Sociedad" (p. 7), propone en una de las "competencias, capacidades y estándares de aprendizaje nacionales de la Educación Básica" (p. 8) a la Competencia 20, que permitirá lograr que los estudiantes de nuestro país, "indaguen mediante métodos científicos para construir sus conocimientos" (p. 9). Esperamos con nuestra investigación mostrar que el aporte de las TEM, de manera específica la EMR y la TRRS, permitan al estudiante la construcción de conocimientos matemáticos con una mirada hacia la actividad matemática basada en los objetos realistas logrados con el apoyo de los registros que surgen de las representaciones semióticas de Duval (1995).

1.5.2 Justificación en el Ámbito Internacional

Para una justificación en el ámbito internacional, tomamos en cuenta los 7 estándares que propone *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM sobre la educación escolar en los Estados Unidos. La NCTM (2020) en su estándar 4 propone los profesores deben promover la enseñanza de matemáticas significativas a partir de determinados principios fundamentales, como establecer rigurosas metas de aprendizaje de matemáticas, que para lograrlo se deben involucrar a los estudiantes en un aprendizaje de alta demanda cognitiva, usar herramientas y representaciones específicas de matemáticas. Desde que iniciamos esta investigación planteamos la propuesta que coincide con la NCTM (2020) que la enseñanza de las matemáticas es compleja, por esto es necesario "la incorporación de prácticas de enseñanza eficaces" (p. 23) que esperamos lograr con los principios de la EMR (Freudenthal, 1973). En este estándar se menciona que las representaciones matemáticas permiten incorporar construcciones y acciones matemáticas, que Duval (1995) le llama transformaciones entre las representaciones semióticas. Así mismo, según NCTM (2020) la clasificación general de las representaciones matemáticas incluye a las "representaciones contextuales, visuales, verbales, físicas y simbólicas" (p. 31). Esta clasificación de las representaciones matemáticas es muy parecida a las representaciones semióticas de Duval (2005), como veremos más adelante.

1.6 Limitaciones de la Investigación

Nuestro trabajo tiene algunas limitaciones que citamos a continuación:

- La complejidad de las teorías de la educación matemática y su aplicabilidad a una sesión de clase. Se requiere un alto nivel de compresión de las teorías y su conexión con el quehacer docente, como la fenomenología didáctica de la EMR, la paradoja de la representatividad de la TRRS, entre otros.
- La aplicación de estas teorías en la formación de los profesores y en la elaboración de los textos escolares empleados por profesores y alumnos, en el sistema educativo nacional.

1.6.1 Delimitaciones de la Investigación

Nuestra investigación se delimita a algunos aspectos mencionados a continuación:

- La investigación se centra en la Educación Matemática aplicada al nivel secundario de la Educación Básica Regular (EBR) de nuestro país. Del Plan

Curricular de la EBR, nuestra investigación se delimita a la aplicación sobre las funciones cuadráticas, dejando a otros investigadores realizar la aplicación de la coordinación de los principios de las teorías de la Educación Matemática a otros contenidos matemáticos y a otros niveles de nuestro sistema educativo.

- La investigación empleará sólo dos teorías de la Educación Matemática, teniendo en cuenta que en la actualidad se cuentan con unas diez teorías. Según la revisión de investigaciones anteriores, afirmamos que la TRRS (Duval, 1995) ya cuenta con un gran número de investigaciones en educación matemática en el ámbito nacional e internacional (Álvarez, 2021; Panizza, 2018; Iparraguirre, 2021; Proleón, 2018; Rojas, 2019); en cambio la EMR (Freudenthal, 1973) tiene muy pocas investigaciones en el ámbito nacional, pero sí una gran cantidad de investigaciones en otros países de Europa, Asia y los EE. UU. (Fessakis et al., 2018; Alsina, 2019; Fredriksen, 2020; Sepriyanti y Putri, 2018; Salgado, 2015; Sanem, 2019; Servín, 2017).
- De los seis principios de la EMR analizaremos solamente el principio de actividad y el principio de realidad, porque la actividad matemática es fundamental y se logra a través de la fenomenología didáctica dando el sentido realista a los aprendizajes de las matemáticas. (Drijvers, 2020b). De los principios de la TRRS analizaremos el uso de los registros semióticos en la actividad matemática a través del principio de tratamiento (T1) y el principio de conversión (T2), porque la mayor dificultad que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas se presenta cuando ocurre el cambio de registros semióticos (Duval, 2011).

1.7 Objetivos de la Investigación

1.7.1 Objetivo General

OG: Determinar si existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

1.7.2 Objetivos Específicos

Para alcanzar nuestro objetivo general, nos proponemos los siguientes objetivos específicos:

OE 1: Determinar si existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

OE 2: Determinar si existe relación significativa entre la coordinación entre el Principio de Realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la Teoría TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

1.8 Hipótesis

1.8.1 Supuestos en la Investigación

En nuestra investigación partimos de los siguientes supuestos:

- Los alumnos presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.
- Las teorías de la educación matemática permiten explicar las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

1.8.2 Hipótesis General

Para lograr responder al problema general, nos planteamos las siguientes hipótesis generales:

HG: Existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

1.8.3 Hipótesis Específicas

De acuerdo con las preguntas específicas, proponemos las siguientes hipótesis específicas:

HE 1: Existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

HE 2: Existe relación significativa entre la coordinación entre el Principio de Realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la Teoría TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Didáctica de las Matemáticas

Para enseñar matemáticas no es suficiente con dominar el contenido científico creado por matemáticos notables como Newton, Leibniz, Cantor u otros. No es suficiente querer enseñar bien o tener una buena intuición para seleccionar contenidos, organizar programas y evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Se requiere de profesores que sientan la necesidad de evaluar los efectos de nuevas propuestas o que planteen hipótesis de aprendizaje, de determinar errores, dificultades y obstáculos, y así de esta manera aprovecharlos para su propio logro de aprendizaje.

Ante la necesidad de enfrentar la complejidad de los procesos involucrados en el aprendizaje de las matemáticas, recurrimos a las Teorías de la Educación Matemática, TEM, donde concepto de Teoría, Bigalke (1984) lo presenta como sigue:

> Una teoría en la educación matemática es una entidad estructurada formada por proposiciones, valores y normas sobre el aprendizaje de las matemáticas. Consiste en un kernel, que abarca los fundamentos y normas impecables de la teoría, y un componente empírico que contiene todas las posibles expansiones del kernel y todas las aplicaciones previstas que surgen del kernel y sus expansiones. Esta comprensión de la teoría fomenta el conocimiento y la práctica científica en el área de la educación matemática. (p. 152)

Steiner (1986) cuando se propuso con un grupo de investigadores, la tarea de desarrollar aún más la educación matemática como disciplina científica, realizan un ciclo de conferencias sobre el tema “Teorías de la Educación Matemática” donde proponen un programa de desarrollo de componentes parcialmente relacionados:

- Desarrollo del rol dinámico de la educación matemática como disciplina con respecto a la interacción teoría-práctica y la cooperación interdisciplinar.
- Desarrollo de una visión integral de la educación matemática que comprenda la investigación, el desarrollo y la práctica mediante un enfoque de sistemas.
- Meta-investigación y desarrollo de metaconocimiento con respecto a la educación matemática como disciplina.

Con esta propuesta, consideramos que Steiner (1986) caracterizó a la Educación Matemática como un sistema de referencia complejo teniendo como propósito implementar y optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos sociales.

Desde la década de los años 80 se ha intentado concebir la Didáctica de la Matemática como una ciencia encargada de los procesos involucrados en la enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos. Por esto su campo de estudio corresponde a los fenómenos que ocurren en la enseñanza de la matemática, relacionados con los alumnos, los contenidos matemáticos y los agentes educativos. Pero la Didáctica de la Matemática es una ciencia experimental que se desarrolla relacionándose con otras áreas del conocimiento como la epistemología, la sociología y la psicología. De manera especial, esta última, proporcionó los principales marcos teóricos en las escuelas europeas o escuelas americanas, principalmente, para la producción de la diversidad de teorías de la educación matemáticas, existentes en la actualidad.

La Didáctica de la Matemática, puede verse hoy como una disciplina emergente, con características propias y multidisciplinar, con un campo teórico – práctico específico que no se traduce en la ingenua suma de las áreas del conocimiento con que se relaciona, siendo cada vez una mejor aproximación para describir y explicar los fenómenos del aula.

Nuestra investigación tiene como objetos de investigación a las Teorías de la Educación Matemáticas, en particular, trataremos de la aplicación de los principios de la EMR (Freudenthal, 1973) y de TRRS (Duval, 1995), pero, antes analizamos la definición de teoría propuesta por Niss (2007), la teoría científica es "una red organizada de conceptos (que incluye ideas, nociones, distinciones, términos, etc.) y afirmaciones sobre algunos dominios, o una clase de dominios, que consta de objetos, procesos, situaciones y fenómenos" (p. 1308).

2.2 Teoría de la Educación Matemática Realista, EMR

El matemático y educador alemán Hans Freudenthal (1905 - 1990) nos propone que "la matemática comienza y permanece con la realidad", es considerado como el fundador de la Teoría de la Educación Matemática Realista, EMR. Este notable investigador realizó sus aportes a la didáctica de las matemáticas en los Países Bajos (Holanda) y destacan sus tres principales obras: "*Mathematics as an Education Task*" (Freudenthal, 1973); "*Didactical phenomenology of Mathematical structures*" (Freudenthal, 1983) y "*Revisiting mathematics education*" (Freudenthal, 2005). Como un homenaje a su obra de alcance mundial, se crea el Freudenthal Institute (FI) en la Universidad de Utrech, Holanda, como un centro de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas aplicadas a la educación escolar, que cuenta en la actualidad con investigadores de la EMR como: Drijvers (2020a, 2020b), Treffers (1987), Heuvel-Panhuizen (2002, 2014, 2019), entre otros.

El punto de partida para entender la EMR en palabras de Hans Freudenthal (1905-1990) el eje central de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se centra en las matemáticas como una actividad humana: "lo que los humanos tienen que aprender no son las matemáticas como un sistema cerrado, sino más bien como una actividad, el proceso de matematización de la realidad y si es posible incluso la matematización de las matemáticas" (Freudenthal, 1968, p.7). Esto significa que los objetos matemáticos no se quedan en su mundo matemático, sino que participan en otras áreas del conocimiento, como las ciencias naturales o las ciencias sociales, que más adelante se le llamará matematización horizontal (Treffers, 1987) o lo que se puede entender como la matematización de la vida cotidiana y también los objetos matemáticos participan en el aprendizaje de otros objetos matemáticos lo que más adelante se le llamará matematización vertical (Treffers, 1987) o lo que se puede entender como la matematización de las matemáticas, todo se fundamenta en lo que se hace realista en la mente de los alumnos. Entonces, buscaremos qué procesos permiten que los objetos matemáticos se hacen realistas en la mente de los alumnos.

Dentro de sus principales aportes que Freudenthal (1973) hace a la didáctica de las matemáticas, es la visión dinámica que hace sobre la actividad matemática que realiza el alumno cuando se apropia de un objeto matemático y lo aplica a la resolución de problemas. Nos describe una actividad matemática como:

> Una actividad de resolución de problemas, de ver los problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina. Esto puede ser un tema de la realidad que tiene que ser organizado de acuerdo con los patrones matemáticos si se tiene que resolver problemas de la realidad. (p. 41)

Drijvers (2020b), nos resume a la educación matemática realista, EMR, como una teoría de instrucción de dominio específico para las matemáticas, que se ha desarrollado en los Países Bajos. La EMR resalta que las situaciones "realistas" tienen una posición destacada en el proceso de aprendizaje. Estas situaciones "sirven como una fuente para iniciar el desarrollo de conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos […] en el que los estudiantes pueden aplicar sus conocimientos matemáticos, que luego gradualmente se vuelven más formales y menos específicos del contexto” (p. 4).

2.2.1 Implementación de la EMR en el Mundo

Heuvel-Panhuizen (2019) en su obra nos describe sobre los alcances de la EMR en distintos países del mundo:

En Inglaterra, durante los últimos diez años se han realizado una serie de proyectos en el aula basados en la EMR en más de 40 escuelas, con 80 profesores y 2000 alumnos.

En Indonesia, se establecieron proyectos para una adaptación indonesia del enfoque EMR para la enseñanza de las matemáticas.

En Argentina, la implementación de la EMR tiene un alto grado de implementación docente, agrupados en el Grupo Patagónico de Didáctica de las Matemáticas (GPDM). Se dedicaron a los procesos de diseño, ensayos, reflexión, logrando la reinvención de la EMR.

En Puerto Rico, a través del uso de situaciones paradigmáticas, para encontrar formas de integrar los nuevos materiales en el currículo general y en la cultura puertorriqueña.

En los Estados Unidos, la puesta en práctica de la EMR considera crucial la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y el diseño de materiales didácticos, se centra la atención en reconsiderar cómo los estudiantes aprenden matemáticas.

En Sudáfrica, los docentes son los actores principales para el desarrollo de teorías educativas locales, alineando el currículo operativo de matemática en la escuela.

En China, primero hubo mucho intercambio entre representantes de la EMR y profesores de matemáticas chinos a través de conferencias. Al inicio no se encuentra entre la conexión entre el nivel teórico y lo que ocurría en la práctica en el aula. Luego se enfatiza en la importancia de la orientación del maestro durante el proceso de matematización, esta idea fue rápidamente aceptada y apoyada por los chinos.

En Corea, se sugiere a los profesores de matemáticas se centren más en el pensamiento matemático que en el contenido matemático en sí mismo y tomando como guía la fenomenología didáctica de Freudenthal.

2.2.2 Los Principios Fundamentales de la EMR

Según Heuvel-Panhuizen (2014) la EMR se fundamenta en seis principios:

P1: El Principio de Actividad: propone la matemática como una actividad humana. Freudenthal (1968) señala que lo que los humanos tienen que aprender son las matemáticas como una actividad, “el proceso de matematización de la realidad y si es posible incluso la matematización de las matemáticas” (p. 7).

P2: El Principio de Realidad: empleo de la fenomenología didáctica para el logro de objetos realistas para el logro de los aprendizajes de las matemáticas. Estos objetos realistas provienen de dos fuentes: realidad cotidiana, que parte de situaciones del mundo real; y realidad mental, que parte de situaciones cognitivas que se hacen reales como producto del aprendizaje. Por ejemplo, debido al aprendizaje logrado del Teorema de Pitágoras, este teorema es un objeto real de tipo mental para el alumno y le permite aplicarlo como un objeto real en la construcción de otros aprendizajes. Este principio es clave para la EMR, porque no se trata de lo que las personas entienden como realista. Podemos señalar hasta cuatro conceptos de realidad:

R1) Realista lo que está en la mente de los alumnos y es logrado por los aprendizajes; puede entenderse como una realidad académica;

R2) Realista lo que está en el mundo real, como una realidad del mundo físico;

R3) Realista lo que tiene sentido para los alumnos, como una realidad del entorno del alumno;

R4) Realista de lo que el alumno puede darse cuenta o lo que puede ser consciente o puede imaginarse, como una realidad subjetiva del alumno (Drijvers, 2020b).

Cabe mencionar que cuando el profesor aplica fenomenología didáctica en sus sesiones de aprendizaje, éste “relaciona los objetos de pensamiento matemático con los fenómenos del mundo físico, social, mental, … para informarnos cómo estos objetos de pensamiento matemático pueden ayudar a organizar y estructurar los fenómenos en la realidad” (Drijvers, 2020b, p. 9). En resumen, el profesor hace comparaciones del mundo real con el mundo mental con una finalidad didáctica, es decir para lograr la realidad de un concepto abstracto. Por ejemplo: en lugar de expresar: $x + y = 20$ (concepto abstracto), aplicando una fenología didáctica puede expresar lo siguiente: en total en el aula hay 20 alumnos entre hombres y mujeres (realidad). Esta fenomenología en la mirada de Duval equivale a una conversión semiótica entre el registro simbólico y el registro literal.

P3: El Principio de Niveles: en matematización horizontal y matematización vertical, así como los cuatro niveles: nivel situacional, nivel referencial, nivel general y nivel formal.

- Nivel situacional: este nivel se encuentra en la matematización horizontal, que parte de la realidad con conocimientos aún no formalizados basados en el sentido común y la experiencia.
- Nivel referencial: este nivel es el punto de inicio de la matematización vertical, donde se hacen uso de modelos gráficos, materiales didácticos, materiales abstractos como descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, en una situación particular.

- Nivel general: se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo obtenido en el nivel referencial, pero logrando una generalización matemática.
- Nivel formal: en este nivel se hace uso de la generalización matemática obtenida y se someten a resignificaciones que permiten resolver situaciones en otros contextos; consolidando nuevos procesos, conceptos e ideas matemáticas.

P4: El Principio de Entrelazamiento: las matemáticas no son un sistema cerrado, se contextualizan a través de la vida cotidiana u otras disciplinas científicas.

P5: El Principio de Interactividad: el aspecto social de la actividad matemática permite la interacción entre profesor-alumno (interacción vertical) y la interacción entre alumno-alumno (interacción horizontal).

P6: El Principio de Orientación: el docente orienta al alumno en la "reinvención guiada", el docente no debe mostrar los objetos matemáticos como un objeto terminado, sino debe encontrar situaciones didácticas que permitan mostrar al alumno cómo se construyó dicho objeto ya terminado. Sobre la "reinvención guiada" indicamos que el término "reinvención" se debe entender como la reconstrucción y desarrollo de un concepto matemático para aplicarlo en una situación realista determinada, así mismo el término "guiada" se debe entender como orientación que los alumnos reciben de los profesores, de los textos y aún de mismos compañeros cuando realizan un trabajo colaborativo.

2.2.3 La Fenomenología Didáctica de Freudenthal

De estos 6 principios, nuestra investigación se centrará en el principio de realidad, porque:

> la visión realista […] toma la realidad como punto de partida, es decir el mundo del niño, lo que implica que trata de identificar las apariciones de los fenómenos matemáticos que se ajustan al mundo del niño, de modo que el niño pueda atribuirle un significado. (Treffers, 1987, pp. 12-13)

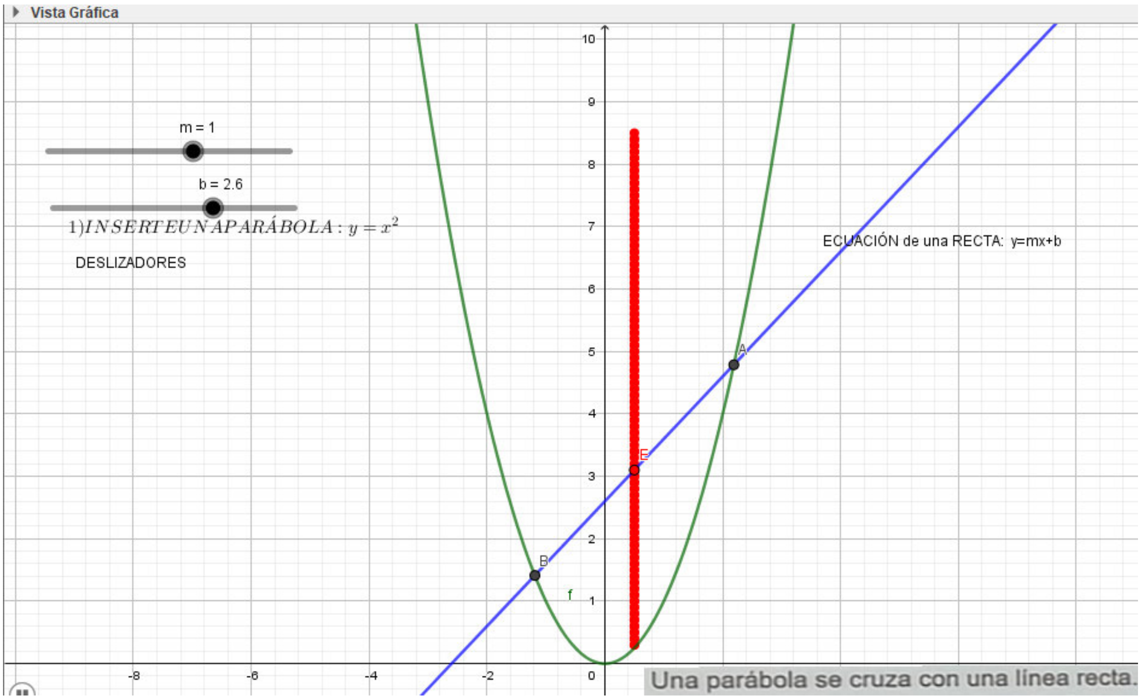
Según Drijvers (2020b), nos propone la interrogante: ¿qué queremos decir con "Realista"? y nos responde que este término "Realista" en los contextos de la educación matemática puede tener diferentes significados, siendo los dos primeros los que serán analizados en nuestra investigación:

R1. Realidad académica, se refiere a lo que logra ser realista debido a la actividad educativa. Lo que se hace real como resultado de los aprendizajes adquiridos. En la EMR esto se logra principalmente con el uso de modelos y el empleo de la fenomenología didáctica, que se muestra más adelante en el esquema de la Metáfora del iceberg. Esta realidad sigue la secuencia del principio de niveles, que se logra a través de una matematización vertical.

Drijvers (2020a) en su conferencia titulada: Una visión realista de la educación matemática realista, propone una actividad que corresponde a esta realidad académica R1, la cual denomina: interceptando una parábola, y tiene el siguiente texto: Una parábola se cruza con una línea recta. La línea se mueve hacia arriba. El punto medio de los puntos de intersección parece moverse sobre una línea vertical. Se hace la pregunta: ¿esto ocurre realmente así? Para su demostración se usa el software GeoGebra y se comprueba con el uso de un deslizador que realmente la interrogante es cierta. Los aspectos realistas de esta experiencia son de tipo académico, y son a) Realista en el uso de la tecnología, uso realista del software por un dominio que ya dispone el estudiante, b) Realista en el conocimiento de las propiedades de la función lineal y de la función cuadrática, esta realidad obedece a los conocimientos adquiridos por el estudiante, y c) Realista en la visión dinámica que provee el software, lo que permite al estudiante la comprobación de la interrogante.

Figura 01

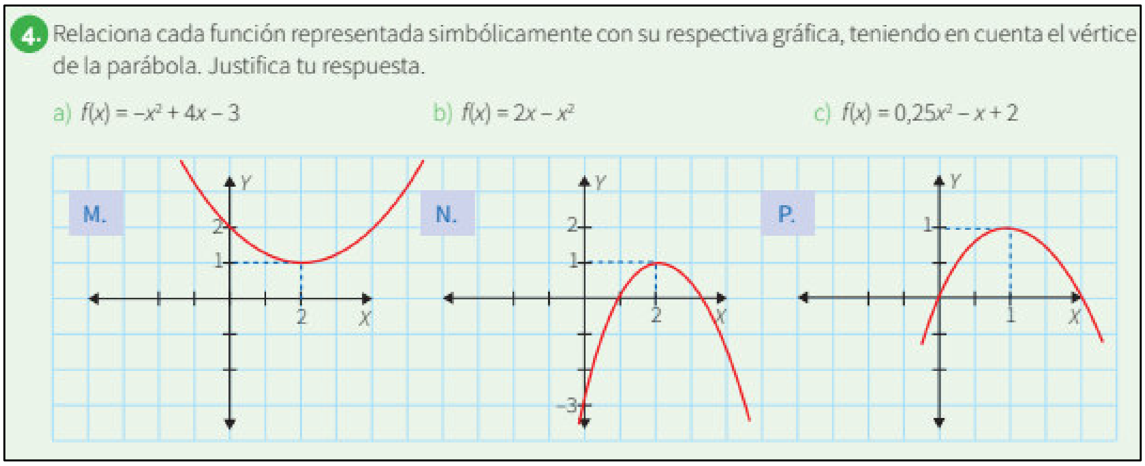
Realidad académica 1: Interceptando una parábola



Nota: Adaptado de Drijvers (2020a).

Figura 02

Realidad académica 1: Actividad de un texto escolar del Minedu


4. Relaciona cada función representada simbólicamente con su respectiva gráfica, teniendo en cuenta el vértice de la parábola. Justifica tu respuesta.

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ b) $f(x) = 2x - x^2$ c) $f(x) = 0,25x^2 - x + 2$

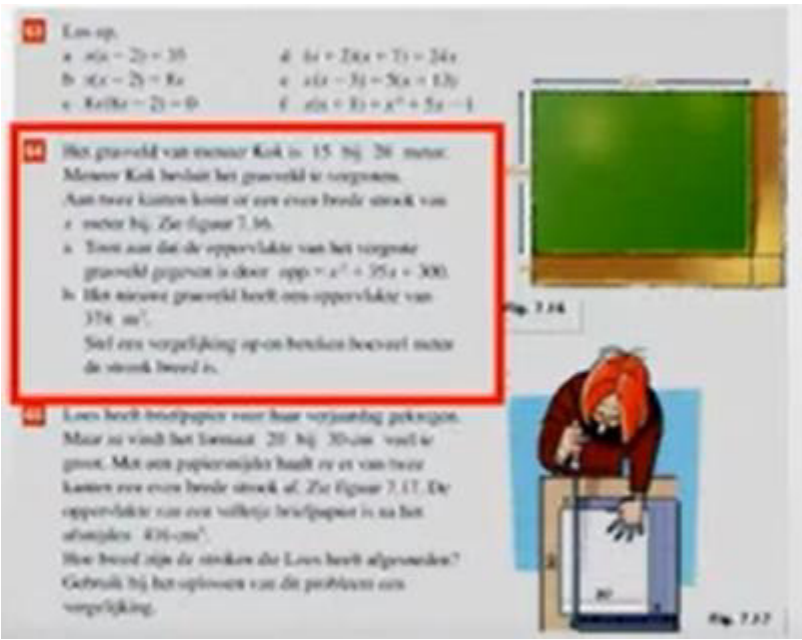
Nota: Tomado del texto escolar: Resolvamos problemas 5 (p. 88), Minedu (2019).

R2. Realidad del mundo real, se refiere a lo que logra ser realista en el sentido de relacionado con el mundo físico, de la vida cotidiana, a través de la matematización horizontal, es decir realizando la matematización del mundo real. Esta es la “realidad” más conocida y aplicada por los docentes de educación matemática que aún no incorporan la EMR en su actividad educativa. Es la más difundida en los textos escolares con el término de matemática realista o de contextos.

Drijvers (2020a) en su conferencia titulada: Una visión realista de la educación matemática realista, propone una actividad que corresponde a esta realidad del mundo físico R2, la cual denomina: La tarea de extender el césped, y tiene el siguiente texto: El césped del jardín del Sr. Jones mide 15 por 20 metros. El Sr. Jones decide extender el césped, a dos lados añade una franja de igual anchura de x metros. Se pide: a. Muestra que el área del césped ampliado está representada por: Área = $x^2 + 35x + 300$: b) El nuevo césped tiene un área de 374 m2. Establece una ecuación y calcula el ancho de la franja.

Figura 03

Realidad académica 2: La tarea de extender el césped



Nota: Adaptado de Drijvers (2020a).

Figura 04

Realidad académica 2: Actividad de un texto escolar del Minedu

10. Un granjero tiene listones de madera para 80 metros de cerco, con los que desea construir un establo rectangular para sus vacas frente a su granero. El granjero intentará que el terreno cercado tenga el área máxima. ¿Cuál es el modelo matemático para esta situación y cuáles son las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima?

Nota: Tomado del texto escolar: Resolvamos problemas 5 (p. 92), Minedu (2019).

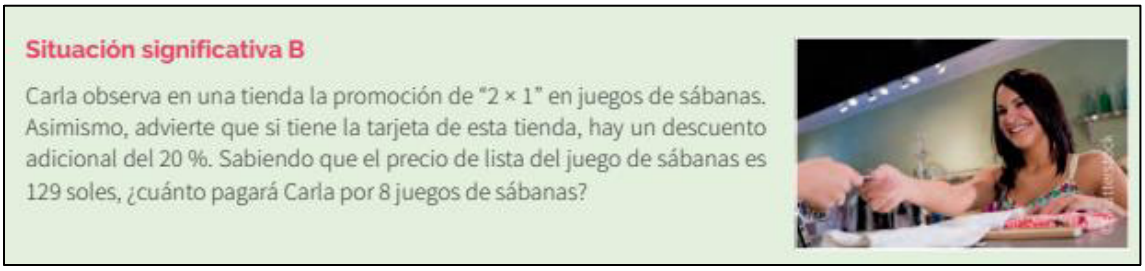
En nuestra investigación tomaremos las realidades R1 y R2, que tienen más significado en el proceso educativo de la EBR de nuestro país.

La fenomenología didáctica hace que la actividad docente se haga “realista” y relaciona los objetos del pensamiento matemático (el contenido matemático) con los fenómenos del mundo cotidiano (mundo físico, mundo social) con una intención de lograr aprendizajes, es decir para informarnos cómo estos objetos del pensamiento matemático pueden ayudar a organizar y estructurar los fenómenos de la realidad (Drijvers, 2020a). Estos fenómenos pueden originarse de la vida real o pueden ser “experimentalmente reales” o “realmente artificiales” (logran ser reales por el aprendizaje logrado).

Hemos encontrado en el Cuaderno de Matemáticas de Educación Secundaria: “Resolvamos problemas 5” propuesto por el Ministerio de Educación, Minedu (2019) que en, lo que en la EMR la denominamos Realidad del Mundo físico, recibe el nombre de Situación significativa, en alusión que el contexto crea una significancia a la situación problemática planteada, como se muestra en la figura:

Figura 05

Situación significativa: Actividad de un texto escolar del Minedu


Situación significativa B

Carla observa en una tienda la promoción de "2 × 1" en juegos de sábanas. Asimismo, advierte que si tiene la tarjeta de esta tienda, hay un descuento adicional del 20 %. Sabiendo que el precio de lista del juego de sábanas es 129 soles, ¿cuánto pagará Carla por 8 juegos de sábanas?

Nota: Tomado del texto escolar: Resolvamos problemas 5 (p. 97), Minedu (2019).

Los fenómenos del mundo cotidiano llegan en forma de modelos. Para la EMR, estos modelos no son los modelos matemáticos creados en el proceso de modelación matemática. Aquí algunos modelos de la EMR, según Drijvers (2020a):

A) Una recta numérica (empleada para hacer realista a las operaciones aritméticas).

B) Una barra de chocolates (para hacer realista la enseñanza de proporciones).

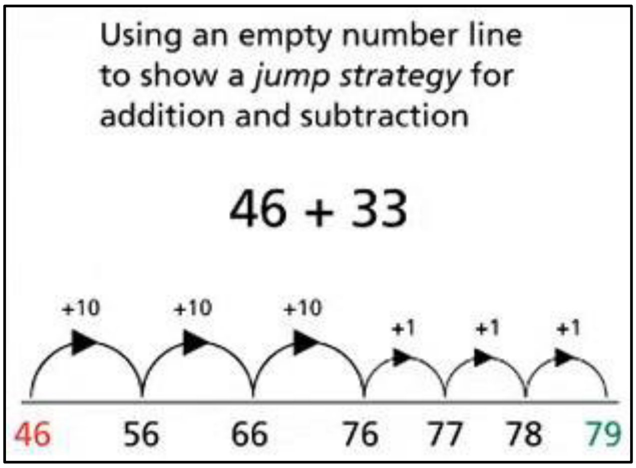
C) Cuadro de proporciones (para hacer realista las operaciones de proporciones).

D) Modelos de pizza (para hacer realista la enseñanza de fracciones).

E) Generador de funciones (para hacer realista la enseñanza de funciones)

Figura 06

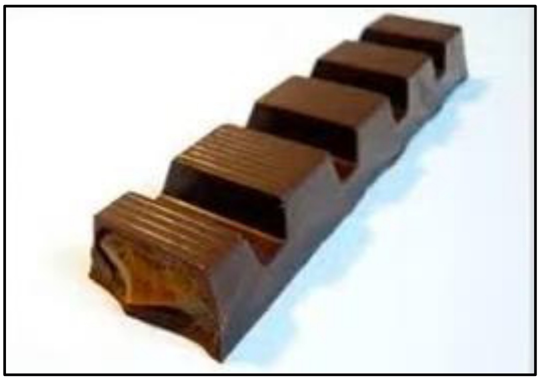
Modelo de una recta numérica, para la enseñanza de adiciones



Nota. Tomado de Drijvers (2020a).

Figura 07

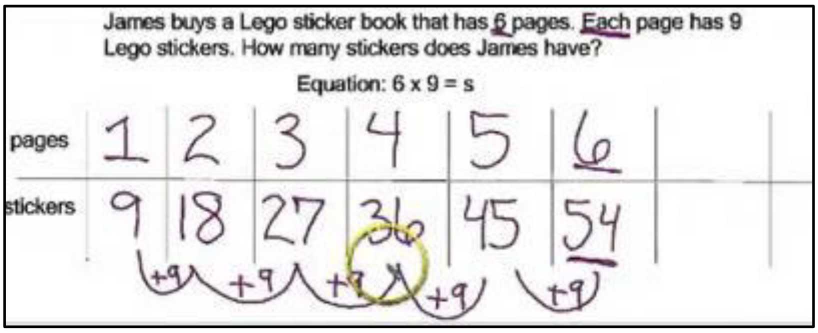
Modelo de una barra de chocolate, para la enseñanza de proporciones



Nota. Tomado de Drijvers (2020a).

Figura 08

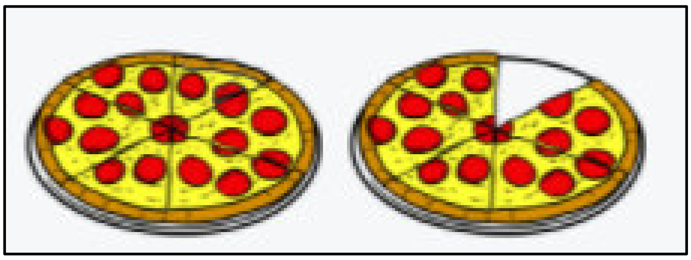
Modelo de cuadro de proporciones, para la enseñanza de operaciones



Nota. Tomado de Drijvers (2020a).

Figura 09

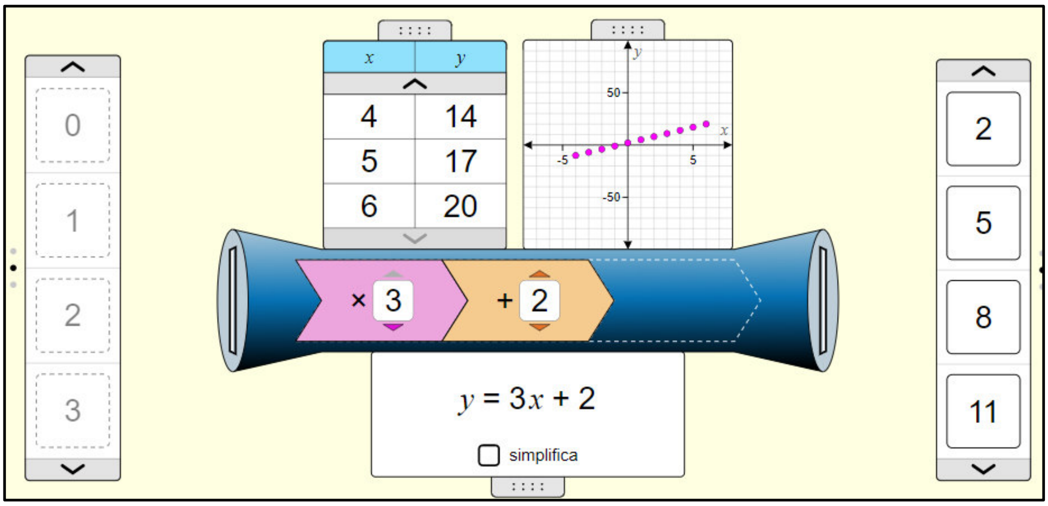
Modelo de pizza, para la enseñanza de fracciones



Nota. Tomado de www.bartolomecossio.com/MATEMATICAS/nmeros_mixtos.html.

Figura 10

Modelo de generador de funciones, para la enseñanza de funciones



Nota. Tomado de phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_es.html.

2.2.4 Tipos de Modelos de la EMR

En la EMR, los modelos actúan como mediadores entre lo concreto y lo abstracto, que permite formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002). Los modelos que permiten el logro de la fenomenología didáctica y así fundamentar el principio realista de la EMR, son de tres tipos:

M1: Las situaciones paradigmáticas: son casos de la vida cotidiana que permiten hacer realista los aprendizajes, como el surtidor de gasolina para mostrar el pensamiento matemático involucrado en una sumatoria.

M2: Los materiales físicos: son materiales manipulables creados con fines de aprendizaje, como los bloques lógicos (*Logiblocks*) para crear el pensamiento matemático de las figuras.

M3: Los esquemas notacionales: son arreglos en tablas u otros ordenamientos que permiten mostrar de forma sistemática una relación entre unidades numéricas para crear el aprendizaje de las propiedades aritméticas u otros. Por ejemplo, un diagrama de Lewis Carroll para ordenar la información de diversas variables.

Figura 11

Un set de Logiblocks, 1968

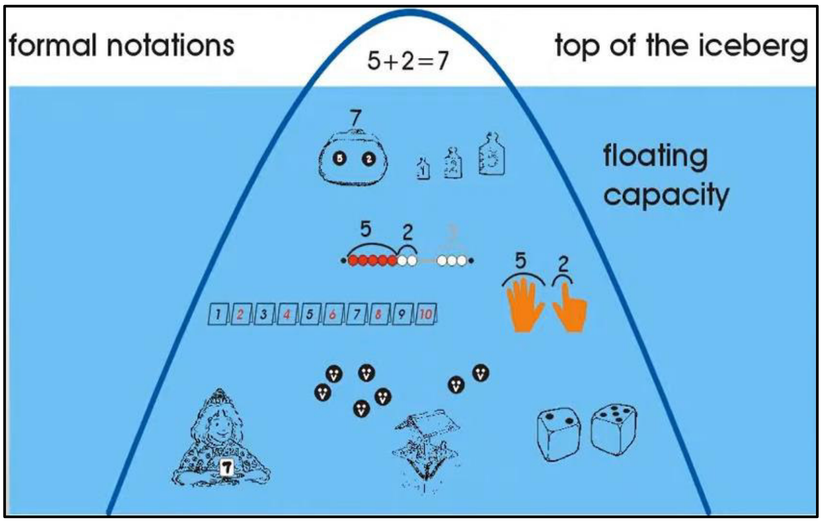
Nota. Tomado de Van den Heuvel-Panhuizen (2019).
(© Les archives de la Fondation Vaudoise du Patrimoine Scolaire—CH 1400 Yverdon-les-Ba)

2.2.5 Metáfora del iceberg

Una metáfora es un tipo de analogía o comparación entre unidades que comparten alguna similitud de significado para sustituir a uno por el otro en una misma estructura. Drijvers (2020a) a través de la Metáfora del iceberg, muestra que el logro de los aprendizajes en matemáticas (Top del iceberg) es producido por diversas actividades realistas, basadas en la fenomenología didáctica (Parte inferior del iceberg). Según se muestra en la figura, si lo queremos que el alumno aprenda que: 5 + 2 = 7, esto es lo que se puede observar como un aprendizaje logrado, esto puede evaluarse, pero sólo es la parte superior del iceberg. ¿Cómo el alumno ha logrado este aprendizaje?, según el principio realista de la EMR, sabemos que la habilidad para realizar esta suma depende de los procesos previos y de los conocimientos previos de los alumnos, como a) tirar a los dados y sumar sus caras superiores, b) contar con los dedos para realizar sumas, c) usar ábacos para practicar sumas, d) usar las rectas numéricas para sumar números enteros; y todas estas experiencias son como los cimientos de la habilidad observable. Haciendo la comparación con el iceberg, sólo ves la parte superior del iceberg sobre el nivel del agua (el top del iceberg), pero si quiero eliminar lo que hay debajo del nivel del mar, estaríamos eliminando las experiencias que son los cimientos de los procesos que sostienen el aprendizaje logrado, es decir si cortas la parte inferior del iceberg, se hundirá un poco, perdiéndose la habilidad del proceso. Los docentes de matemáticas, debemos tener en cuenta que el logro de los aprendizajes es posible, cuando diseñamos nuestra sesión de aprendizajes un conjunto de actividades realistas basado en el uso de los modelos propuestos en la Educación Matemática Realista.

Figura 12

Metáfora del iceberg

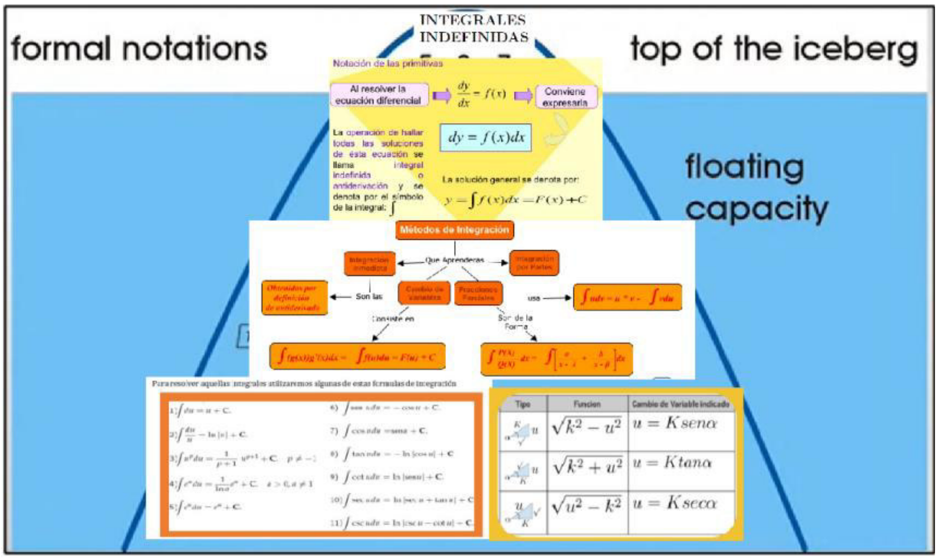


Nota. Tomado de Drijvers (2020a).

La Metáfora del iceberg, representa en forma esquemática las acciones educativas que deben realizar los docentes empleando la fenomenología didáctica a través de diversos modelos o actividades que permitan lograr la realidad académica 1 a partir de realidades del mundo físico R2. Esta metáfora puede aplicarse a los diversos contenidos matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, estadística, cálculo diferencial, cálculo integral u otros, así como a otras asignaturas del currículo educativo: física, química, biología, tecnología, capacitaciones u otros. Cuando se aplica al cálculo integral, en la parte inferior del iceberg se presentan los modelos o actividades referidas a este tema, como un mapa mental de los términos del tema, así como las principales relaciones matemáticas que permitan la resolución de problemas de integrales aplicadas a las distintas funciones algebraicas o de otro tipo. El conocimiento de funciones es una realidad 1, el uso de las fórmulas también conforma la realidad 1, por ser académica.

Figura 13

Metáfora del iceberg aplicado al cálculo integral

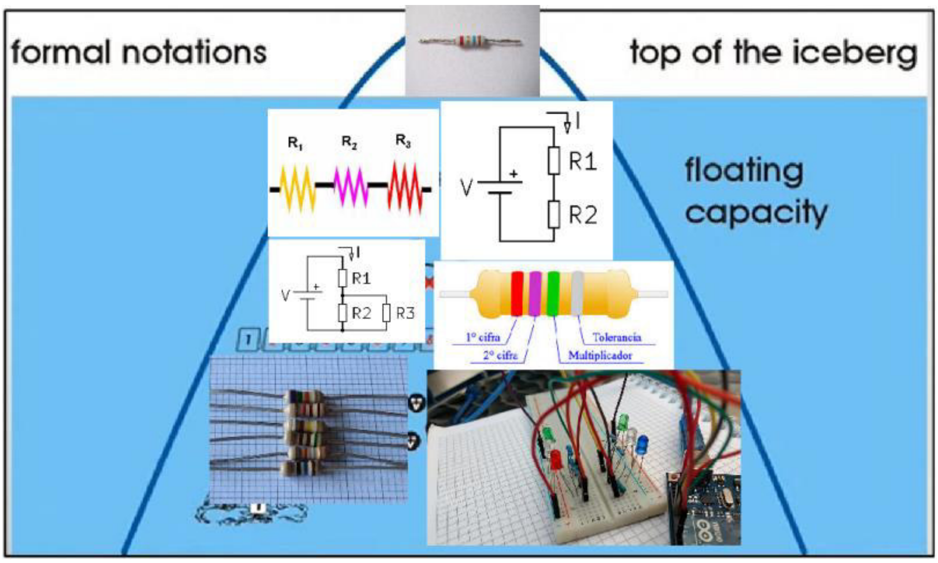


Nota. Adaptado de Drijvers (2020a).

La Metáfora del iceberg también se aplica a los contenidos de otras disciplinas como la física, por ejemplo, a los circuitos eléctricos de corriente continua, lo cual muestra que para el logro de los aprendizajes en este tema (el top del iceberg), también se deben realizar actividades educativas como el uso de materiales concretos, que son parte de la realidad del mundo físico, son manipulables lo cual incrementa la noción de realidad. La EMR tiene muchas similitudes con las actividades educativas aplicadas a la física educativa.

Figura 14

Metáfora del iceberg aplicado a los circuitos eléctricos

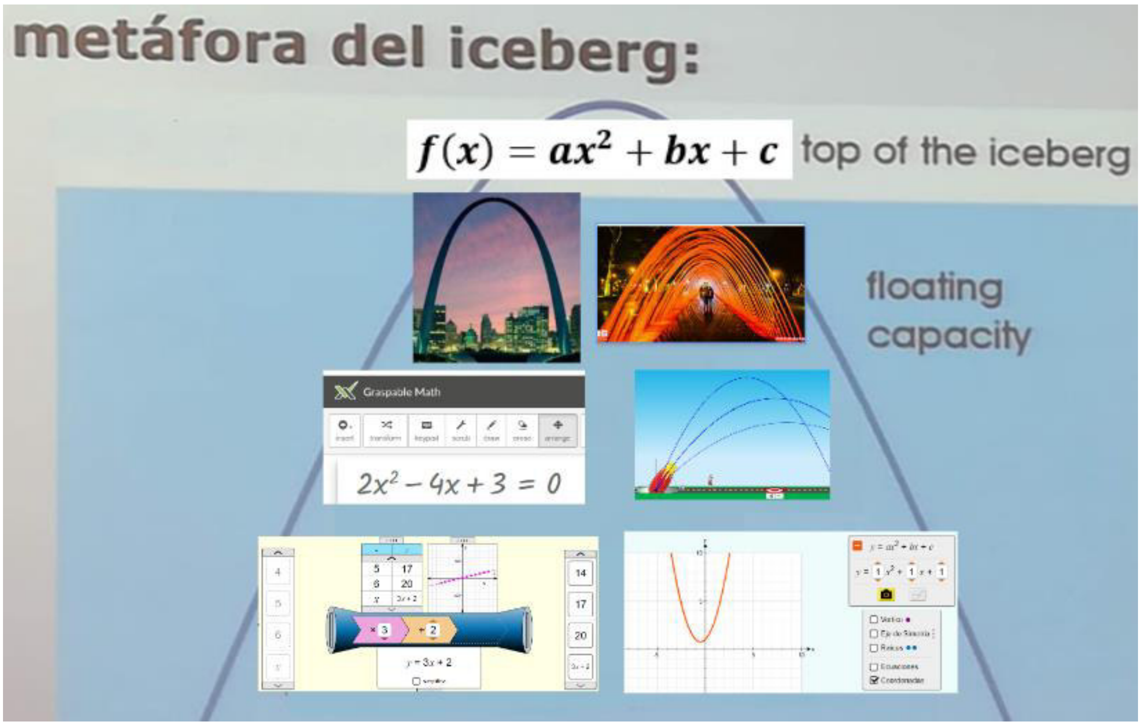


Nota. Adaptado de Drijvers (2020a).

La Metáfora del iceberg aplicada a la enseñanza y aprendizaje de las funciones cuadráticas muestra en la parte inferior del iceberg se muestra cómo se introduce a la noción de una función lineal a partir de la aplicación del simulador PhET generando funciones(phet.colorado.edu/sims/html/function-builder/latest/function-builder_es.html) donde este simulador transforma un valor del dominio hacia un valor del rango. Le sigue la aplicación de PhET graficando funciones cuadráticas a partir de este simulador creado por la Universidad de Colorado (https://phet.colorado.edu/sims/html/graphing-quadratics/latest/graphing-quadratics_es.html), esta aplicación permite la visualización de la gráfica de una función cuadrática cambiando los valores de los coeficientes de regla de correspondencia, así mismo la aplicación de Graspable Math permite un paso a paso de la resolución de una ecuación cuadrática (https://graspablemath.com/canvas) y otras aplicaciones de la función cuadrática como el movimiento parabólico representado con la simulación de PhET (https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_es.html), así como monumentos con forma parabólica y la trayectoria parabólica que describe el agua en el Circuito mágico del agua de Lima. El logro de los aprendizajes se representa en el top del iceberg, como se muestra en la figura:

Figura 15

Metáfora del iceberg aplicado a la función cuadrática



Nota. Adaptado de Drijvers (2020a).

2.2.6 Resumen de las Principales Ideas de la EMR

Resumiendo, los principios de la EMR, Drijvers (2020b) nos propone que:

Resumen 1: La EMR es una teoría con principios propios aplicada a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Uno de sus principales principios, es el de realidad, se refiere a lo que conocemos como real, en el sentido significativo, esto proviene del mundo real y del mundo cognitivo de los alumnos, principalmente. Y sobre el principio de actividad, nos reitera que el aprendizaje de las matemáticas es una actividad humana.

Resumen 2: Los estudiantes logran el aprendizaje de las matemáticas a través de cuatro conceptos claves de la EMR: a) Matematización; b) Fenomenología didáctica; c) Uso de modelos y d) Reinvención guiada (Drijvers, 2000b).

Resumen 3: Es importante tener en cuenta esta advertencia: sobre el uso de modelos o problemas modelos Drijvers (2000b) nos indica que "por favor no usen problemas artificiales que puedan desconcertar a los estudiantes y no inviten al aprendizaje de las matemáticas en juego", y sobre el uso correcto del principio de realidad envía este mensaje: "la vida real no es el criterio principal, ¡las oportunidades de crear sentido es el desafío!" (p. 14).

2.3 Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas, TRRS

La Teoría de Registros de Representación Semiótica ha sido desarrollada por Raymond Duval, filósofo y psicólogo de formación. Trabajó en el Instituto de Investigación en Educación Matemática (IREM) de Estrasburgo, en Francia, de 1970 a 1995, donde desarrolló estudios fundamentales relativos a Psicología Cognitiva, que lo lleva a producir, dentro de otras publicaciones, en su obra *Sémiosis et pensé humaine*. Esta obra ha permitido de marco teórico en numerosas investigaciones en educación matemática en diversos países de nuestro continente y de Europa (Álvarez, 2021; Panizza, 2018; Iparraguirre, 2021; Proleón, 2018; Rojas, 2019).

Según la TRRS, el éxito en el aprendizaje se verá reflejado cuando los alumnos logren las transformaciones adecuadas sobre el objeto matemático, según Duval (2005) "la manera matemática de razonar y visualizar está intrínsecamente ligada a la utilización de las representaciones semióticas, y toda comunicación en matemática se establece a través de esas representaciones" (p. 8). Este enfoque cognitivo de la actividad matemática permitirá al profesor entender, localizar y conocer la naturaleza de las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas.

2.3.1 Los Tipos de Registros de Representación Semiótica

Los cuatro registros semióticos de la TRRS son:

RS1: Registro literal o de lengua natural: este registro expresa en forma verbal, con palabras, el objeto matemático es presentado en forma de textual.

Duval (2006) nos plantea que el uso del lenguaje natural no se puede evitar y sabemos que está presente en todas las áreas del conocimiento.

RS2: Registro simbólico: este registro emplea números y símbolos matemáticos, expresa las propiedades matemáticas, las ecuaciones matemáticas.

Por este registro, podemos presentar la definición de función cuadrática, con la regla de correspondencia: $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo: $a \neq 0$.

RS3: Registro figural: este registro expresa en forma gráfica a los objetos matemáticos, como figuras geométricas.

RS4: Registro cartesiano: este registro expresa en un plano cartesiano a los objetos matemáticos, como gráficos de funciones.

En la siguiente tabla se presentan los cuatro tipos de registros de representación semiótica según Duval (1995):

Tabla 01

Registros de Representación Semiótica de la TRRS

	REPRESENTACIÓN DISCURSIVA	**REPRESENTACIÓN NO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONALES: Los tratamientos no son algoritmizables.	**Lengua natural** Asociaciones verbales (conceptuales) Forma de razonar: • Argumentación a partir de observaciones, de creencias ... ; • Deducción válida a partir de definiciones o de teoremas.	**Figuras geométricas** planas o en perspectivas (configuraciones en dimensión 0, 1, 2 o 3). • Comprensión operatoria y no solamente perceptiva. • Construcción con instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONALES: Los tratamientos son principalmente algoritmos	**Sistemas de escrituras:** • Numéricas (binaria decimal, fraccionaria...); • Algebraicas • Simbólicas (lenguas formales). Cálculo	**Gráficos cartesianos.** • Variaciones de sistema de coordenadas. • Interpolación, extrapolación.

Nota. Adaptado de Duval (1995).

2.3.2 La Actividad Matemática según la TRRS

Así mismo, según Duval (1995), la actividad matemática se realiza cuando se producen alguna de las dos transformaciones:

T1: Los tratamientos: ocurren cuando la actividad matemática se produce sin cambiar de registro semiótico. Es una transformación monoregistro. Por ejemplo, cuando se hace una actividad algebraica y se realiza totalmente en el registro simbólico. Para comprender la complejidad cognitiva de los tratamientos, debemos analizar por separado en que registros se llevan a cabo los tratamientos, en el registro discursivo o el registro gráfico.

T2: Las conversiones: ocurren cuando la actividad matemática se produce con un cambio de registro semiótico. Se pueden realizar conversiones del registro literal al registro simbólico o en el sentido contrario; también se podría realizar una conversión del registro simbólico al registro figural o en el sentido contrario (T3). Las dificultades producidas por la conversión en una actividad matemática son observadas de acuerdo con los pares de registros que son intercambiados en esta transformación; tenemos el caso más conocido cuando ocurre una simple “traducción” de términos de un problema literal es convertido en una expresión algebraica, este es un caso que muchos estudiantes no logran realizar con éxito. Duval (2005) concluye que la conversión posee dos características: la primera señala que la conversión puede ser o no congruente, y la segunda hace referencia a que la conversión tiene una orientación o sentido, lo cual permite señalar al registro de partida como al registro de llegada.

Los profesores cuando enseñamos matemáticas sabemos que, a diferencia de otras disciplinas científicas, esta ciencia no dispone de objetos físicos manipulables, por esto tenemos acceso a los objetos matemáticos solamente por medio de su representación. Por ejemplo, un veterinario, tiene la posibilidad de visualización de sus animales, de sus enfermedades, de su pelaje y otros, sin la necesidad de recurrir a una representación semiótica. No ocurre lo mismo en matemática, según Grande (2006):

> En el caso de los objetos matemáticos, surge la necesidad de utilizar un sistema de registros, símbolos y signos para su representación. Estos registros no son simplemente códigos, pues poseen una función de comunicación y caracterización del objeto representado. La importancia de la utilización de los registros de representación se refiere a una posible manera de facilitar un proceso de aprendizaje, además de ser un medio para que un profesor tome más accesible la comprensión de la matemática. La noción de registro de representación se refiere al dominio de signos que sirven para designar cualquier objeto. (p. 62)

Así mismo hemos encontrado que investigaciones anteriores, han analizado las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas empleando el enfoque cognitivo propuesto en la teoría de Raymond Duval. Analizando estas dificultades, Guzmán (1998) logra:

> Poner en evidencia el rol que juegan los registros de representación en las respuestas de los estudiantes, dado que distinguir y coordinar distintos registros, es una actividad necesaria y natural en matemáticas. Estas actividades deberían construir objetos pedagógicos en la enseñanza de la matemática. Por otra parte, la distinción y coordinación de registros son fundamentales para el desarrollo del pensamiento, idea central en el enfoque mencionado, ha sido la perspectiva de análisis para numerosas investigaciones en didáctica de la matemática. (p. 6)

La investigación, en un análisis de las respuestas de los alumnos, revela que los alumnos son, en general, monorregistros, sin coordinar explícitamente dos o más (registros). Las respuestas se quedan en el registro en el cual está planteada la pregunta, o recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases (Guzmán, 1998).

Según Duval (1995) este "estudio propone que las representaciones semióticas, incluidas cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir nuevos conocimientos y no sólo para la comunicación de cualquier representación mental en particular" (p. 24). El papel desempeñado por los signos, o más exactamente por los sistemas semióticos de representación, no es sólo para designar objetos matemáticos, sino también para trabajar con ellos. Lo importante no es la representación de un objeto matemático sino las transformaciones que se pueden realizar sobre ellos.

2.3.3 Los Tres Principios Fundamentales de la TRRS

La TRRS propuesta por Duval (1995) presenta tres principios que permiten analizar la actividad matemática desde el punto de vista cognitivo:

PC1. La importancia primordial de las representaciones semióticas

Los registros semióticos no sólo permiten designar los objetos matemáticos, también permiten realizar transformaciones entre ellos. Toda transformación o actividad matemática requiere utilizar un sistema semiótico de representación; según Duval (2006), "lo que importa no es la representación, sino su transformación. A diferencia de las otras áreas de conocimiento científico, los signos y la transformación de la representación semiótica se encuentran en el corazón de la actividad matemática" (p. 3).

PC2. La paradoja cognitiva del acceso a los objetos de conocimiento

La única manera de acceder a los objetos matemáticos es con el uso de signos y representaciones semióticas. Pero, ocurre que, a menudo estas representaciones semióticas son confundidas con el objeto matemático que representan. Según Duval (2006), el problema de la comprensión en matemática surge del siguiente conflicto cognitivo: ¿cómo se pueden distinguir los objetos representados de la representación semiótica utilizada si no se puede tener acceso al objeto matemático, sin recurrir a las representaciones semióticas? Lo que quiere decirnos es que no debemos confundir el objeto matemático con su representación. Los registros semióticos nos presentan la representación del objeto; pero no es el objeto matemático. Por ejemplo, cuando queremos representar una función cuadrática, la representamos por: $f(x) = ax^2 + bx + c$; pero esta representación no es la función cuadrática, es su representación. La función cuadrática es el conocimiento instituido, en un momento dado (Douady, 1993).

PC3. La gran variedad de representaciones semióticas utilizadas en las matemáticas

La actividad matemática debe disponer de diferentes sistemas de representación semióticas para realizar todas las acciones o procesos que involucra esta actividad. Algunos procesos son más fáciles en un sistema semiótico que en otro, esto implica que el estudiante debe “migrar” a otro sistema en búsqueda de una solución más sencilla, o incluso puede realizar la actividad en un solo sistema. Al respecto, Duval (2005) nos propone que las matemáticas son el campo en el que nos encontramos con la más amplia gama de sistemas semióticos de representación, tanto aquellos comunes a cualquier área del conocimiento como el lenguaje natural aquellos sistemas específicos a las matemáticas como notaciones algebraicas y formales.

2.4 Coordinación entre Principios de la EMR y de la TRRS

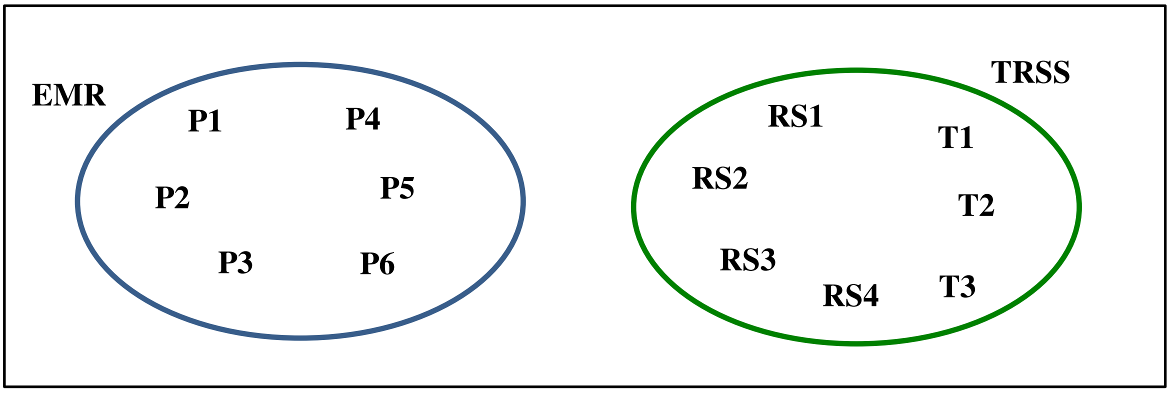
Hemos visto que cada Teoría de la Educación Matemática, sea la EMR, la TRRS u otras, tienen sus principios que sustentan cada teoría. Ahora intentamos encontrar la coordinación, comparación, articulación o semejanza entre dichos principios y su posible “sinergia educativa” en bien del logro de los aprendizajes de las Matemáticas.

Según Prediger et al. (2008), nos propone que, al comparar teorías, entre ellas se encuentran similitudes y diferencias fuertes, “las similitudes son puntos para vincular y las diferencias fuertes pueden hacer que se hagan visibles las fortalezas individuales de cada teoría” (p. 4).

En la figura 15, la EMR presenta sus seis principios fundamentales y la TRRS presenta cuatro registros de representación semiótica y sus dos transformaciones semióticas. Por criterio de delimitación de la investigación, en la figura 16, la EMR presenta sus cuatro principios realistas y la TRRS presenta sus dos transformaciones semióticas. En la figura 17, se presentan las posibles coordinaciones entre los principios delimitados de la EMR y los principios delimitados de la TRRS.

Figura 16

Principios de la Teoría EMR y de la TRRS



Nota. Elaboración propia.

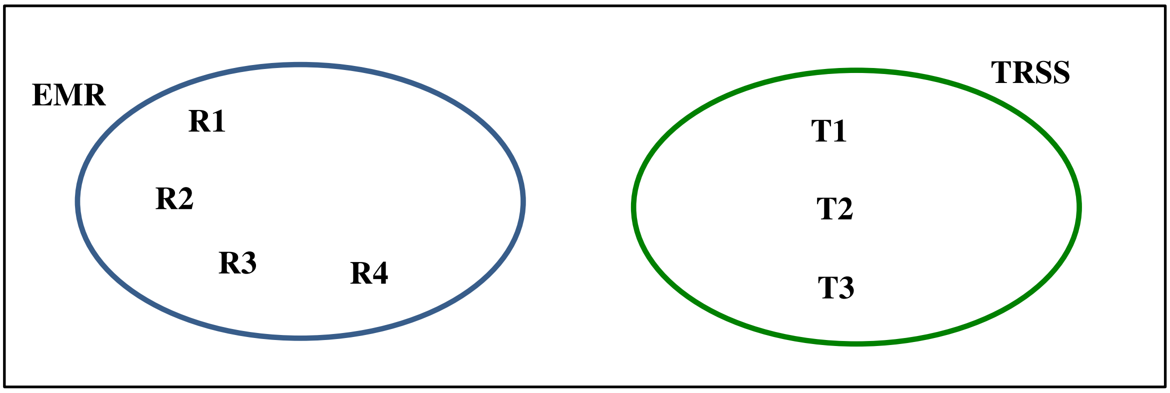
Siendo:

P1: Principio de Actividad
P2: Principio de Realidad
P3: Principio de Niveles
P4: Principio de Entrelazamiento
P5: Principio de Interactividad
P6: Principio de Orientación

RS1: Registro Literal
RS2: Registro Simbólico
RS3: Registro Figural
RS4: Registro Cartesiano
T1: Transformación de Tratamiento
T2: Transformación de Conversión directa
T3: Transformación de Conversión inversa

Figura 17

Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS



Nota. Elaboración propia.

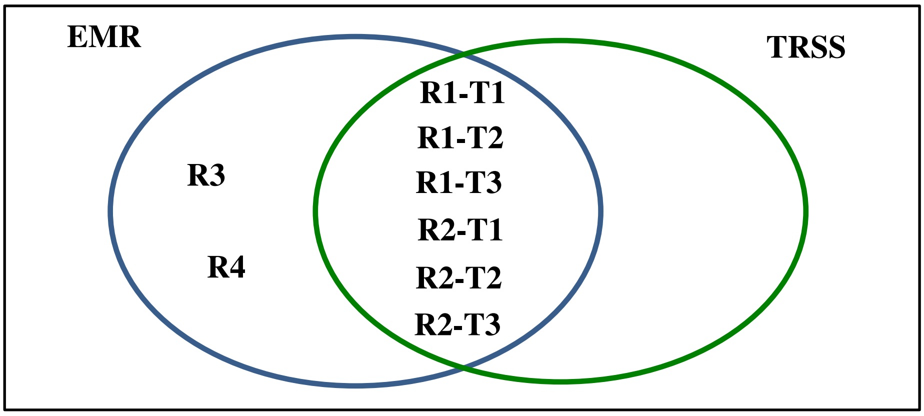
Siendo:

R1: Realidad académica
R2: Realidad del mundo real
R3: Realidad del entorno del alumno
R4: Realidad subjetiva del alumno

T1: Transformación de Tratamiento
T2: Transformación de Conversión directa
T3: Transformación de Conversión inversa

Figura 18

Coordinación entre las Realidades de la Teoría EMR y las Transformaciones semióticas de la TRRS



Nota. Elaboración propia.

Siendo:

R1: Realidad académica	T1: Transformación de Tratamiento
R2: Realidad del mundo real	T2: Transformación de Conversión directa
R3: Realidad del entorno del alumno	T3: Transformación de Conversión inversa
R4: Realidad subjetiva del alumno	

De la figura 18 se observan seis tipos de coordinaciones (CO) posibles:

CO1 = R1-T1: entre Realidad académica (EMR) y los Tratamientos (TRRS)

CO2 = R1-T2: entre Realidad académica (EMR) y la Conversión directa (TRRS)

CO3 = R1-T3: entre Realidad académica (EMR) y la Conversión inversa (TRRS)

CO4 = R2-T1: entre Realidad del mundo real (EMR) y los Tratamientos (TRRS)

CO5 = R2-T2: entre Realidad del mundo real (EMR) y la Conversión directa (TRRS)

CO6 = R2-T3: entre Realidad del mundo real (EMR) y la Conversión inversa (TRRS)

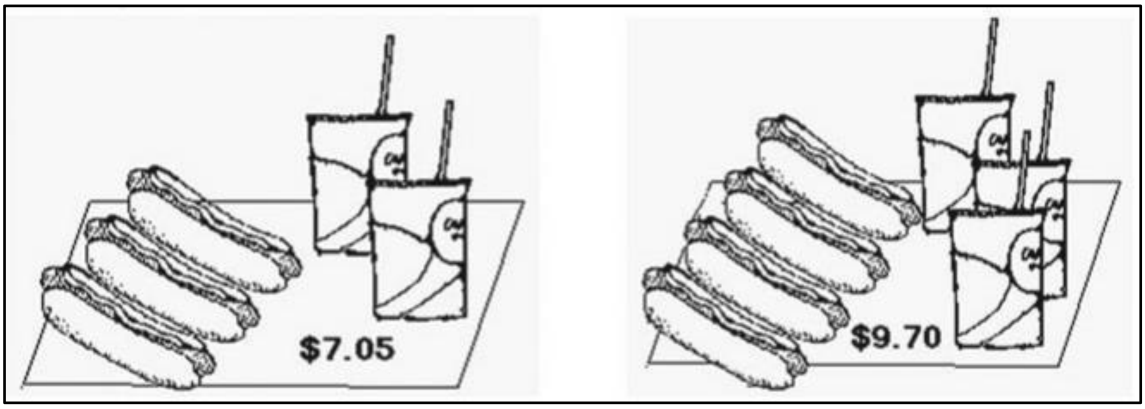
2.4.1 Resolución de problemas con el enfoque Realista-Semiótico

A continuación, mostraremos cómo la coordinación entre los principios de la EMR y de la TRRS puede permitir el logro de la resolución de problema planteado.

Texto del problema: Renato asiste a un centro de Fast Food McDonald, y le informan que si compra 3 hot dogs y 2 gaseosas su precio es de $ 7,05; en cambio sí comprase 4 hot dogs y 3 gaseosas su precio es de $ 9,70. Si los precios unitarios de productos del mismo tipo son iguales en ambos combos. Determine el precio unitario de cada producto.

Figura 19

Actividad para la Coordinación entre principios de la EMR y de la TRRS



Nota. Tomado de Heuvel-Panhuizen (2019).

Esta actividad será explicada aplicando la coordinación entre principios de la EMR y la TRRS:

Según la EMR, esta Actividad se clasifica como:

Modelo tipo-1: Situación paradigmática

Aplica: Principio de Actividad y Principio de Realidad del mundo real (R2)

Según la TRRS, esta Actividad requiere el uso de:

Tipo de Registro: Registro simbólico (Algebraico)

Tipo de Transformación semiótica: el Tratamiento

x: *precio unitario de un hot dog*

y: *precio unitario de una gaseosa*

Uso del Registro algebraico para representar un sistema de ecuaciones lineales para lograr la matematización tipo horizontal (nivel situacional):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7{,}05 \\ 4x + 3y = 9{,}70 \end{cases} \rightarrow \text{Tratamiento} \rightarrow \begin{cases} 9x + 6y = 21{,}15 \\ 8x + 6y = 19{,}40 \end{cases}$$

Restando las ecuaciones: (Principio de realidad académica R1 coordina con el Principio de Tratamiento, CO1 = R1-T1)

$9x - 8x = 21{,}15 - 19{,}40 \quad \rightarrow$ Tratamiento $\rightarrow \quad x = 1{,}75\ dólares$

Reemplazando en la primera ecuación: (CO1 = R1-T1)

$3(1{,}75) + 2y = 7{,}05 \quad \rightarrow \quad 2y = 1{,}80 \quad \rightarrow \quad y = 0{,}90\ dólares$

Respuesta: El precio de un hot dog es \$1,75 y el precio de una gaseosa es \$0,90.

2.5 Razonamiento Cuantitativo

Crowther (1959) es reconocido como el primer investigador en utilizar el concepto "alfabetización numérica" que es equivalente al concepto de "razonamiento cuantitativo", propuso la necesidad que la población estudiantil desarrollara un conjunto de habilidades y comunicación, incorporando la actividad matemática en diversas disciplinas del conocimiento humano. Para Crowther, la alfabetización numérica, resulta indispensable para que todo estudiante pueda desarrollar dos componentes fundamentales en su actividad de construir conocimientos: la comprensión del método científico y la capacidad de pensar cuantitativamente (Crowther, 1959).

En el razonamiento cuantitativo, propuesto por Sons (1996) se proponen 4 dimensiones:

D1: Interpretación, de la información relevante para iniciar la resolución de problemas.

D2: Representación, de la información en forma literal, simbólica o figural.

D3: Cálculo, es el centro de la actividad matemática, se producen las transformaciones de la información para obtener soluciones sobre cuestiones propuestas.

D4: Análisis y Comunicación, de los resultados obtenidos en la actividad de cálculo, se puede producir una toma de decisiones, comparaciones, uso de relaciones de orden y otros para llegar a una conclusión.

En nuestra investigación, esperamos que a través de la coordinación de los principios de la EMR y la TRRS, se favorezca el logro de las dimensiones de este razonamiento cuantitativo, como la interpretación de los parámetros de la regla de correspondencia de la función cuadrática; la representación de la función cuadrática en los distintos registros semióticos, principalmente en el registro simbólico y el registro figural; que el alumno logre realizar los cálculos para la determinación del vértice de la parábola, así como las intersecciones con los ejes coordenados; y le permite en una situación contextualizada hacer un análisis para una toma de decisiones, que le permita comunicar de forma argumentada en los resultados del cálculo, la respuesta que muestre el logro del razonamiento cuantitativo en el aprendiz.

2.6 Función Cuadrática

El objeto matemático estudiado en nuestra investigación es la función cuadrática, según Carrillo (2013), esta función presenta diversas dificultades para los alumnos, como la identificación de su vértice, su relación con su regla de correspondencia en sus tres formas, la identificación de su concavidad, la determinación de su máximo o mínimo, y otros problemas abordados en diversas investigaciones.

Una función f es cuadrática, si: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde: a, b, c son números reales, con $a \neq 0$. Esta forma es conocida como la forma general.

También puede expresarse en la forma canónica: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, con $a \neq 0$.

También puede expresarse en la forma factorizada: $f(x) = a(x-b)(x-c)$, con $a \neq 0$.

Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{R}$

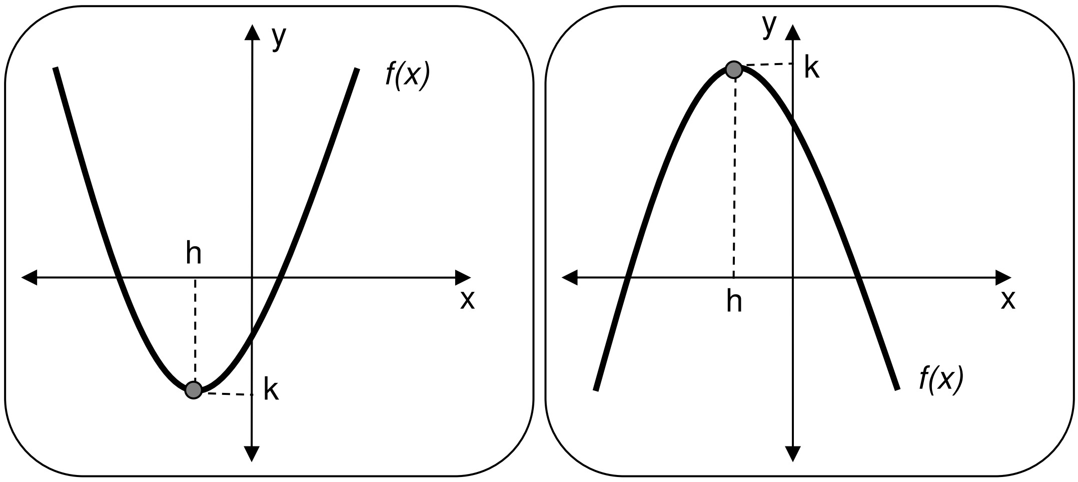
Rango: $\mathrm{Ran}(f) = [k, +\infty\rangle$ cuando $a > 0$; $\mathrm{Ran}(f) = \langle -\infty, k]$ cuando $a < 0$

Donde el vértice de la parábola es: V(h , k); se cumple que: $h = \frac{-b}{2a}$; $k = f(h)$

Figura 20

Representación gráfica de la Función Cuadrática

Caso I: Cuando $a > 0$ Caso II: Cuando $a < 0$

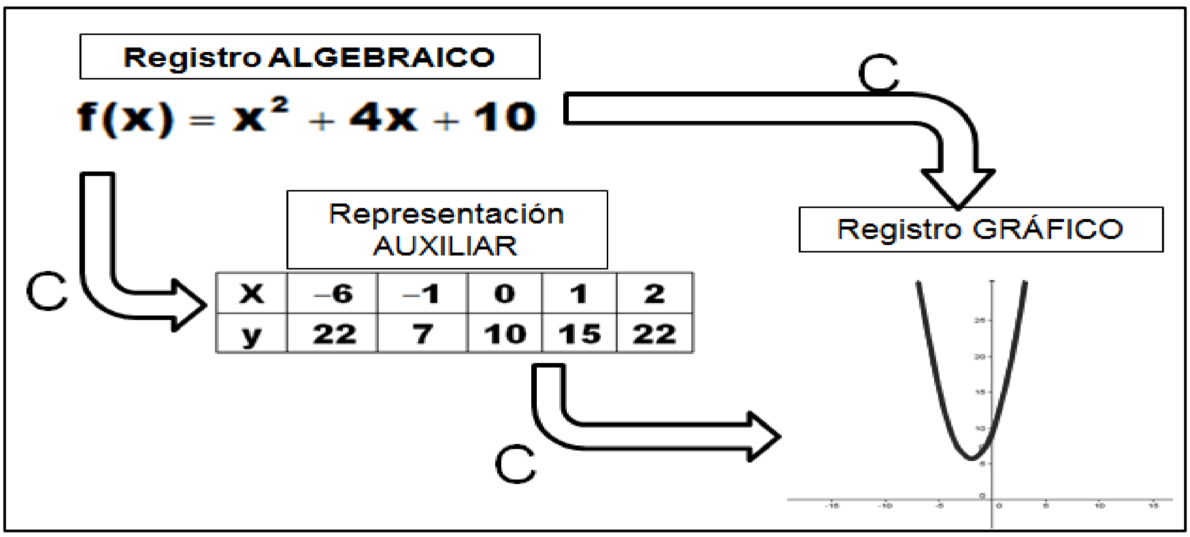


Dom(f) = R; Ran(f) = [k, +∞> *Dom(f) = R ; Ran(f) = < −∞, k]*

Cuando sobre la función cuadrática se aplica la TRRS, ocurren tratamientos o conversiones, según se muestra en la siguiente figura:

Figura 21

Análisis de conversiones (C) del registro algebraico al registro gráfico



Nota: Elaboración propia. (C = conversión).

En esta figura, se produce una actividad matemática (vista desde la EMR), parte desde un registro semiótico simbólico (visto desde la TRRS), la regla de correspondencia cumple el principio de realidad (visto desde la EMR) porque debe ser parte de la realidad cognitiva de los aprendizajes logrados, inicia la actividad matemática haciendo uso de un registro auxiliar (visto desde la TRRS) que a la vez corresponde a un modelo tipo esquema notacional (visto desde la EMR) produciéndose un cambio de registro semiótico que según la TRRS se denomina una conversión del registro simbólico al registro gráfico usando un registro auxiliar, el registro tabular. Esta actividad matemática adquiere un significado realista para el alumno en función a que, debido al aprendizaje logrado, en una o varias actividades anteriores haya logrado el aprendizaje de la función cuadrática a través de su regla de correspondencia y de su registro gráfico en forma parabólica.

III. MÉTODO

3.1 Tipo de Investigación

El tipo de investigación que realizaremos es de tipo aplicada, que es aquella que tiene como objetivo aplicar los conocimientos obtenidos una realidad o práctica concreta como las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, para modificarla y transformarla para mejorarla hasta donde sea posible. En Educación este tipo de investigación es relevante para toda la comunidad educativa que tiene un interés especial en mejorar la práctica de la enseñanza y aprendizaje de todas las materias del currículo educativo. Así mismo la información que obtenemos de la investigación aplicada es muy útil para incrementar el bagaje de conocimientos y teorías de investigación básica donde ambas, la investigación básica e investigación aplicada se complementan mutuamente para explicar el universo educativo en sus características estáticas y dinámicas inherentes a esta ciencia (Martínez, 2007). Esta práctica educativa esperamos se vea mejorada a través de la coordinación entre los principios de la EMR y de la TRRS en favor del logro los aprendizajes de Matemáticas.

La presente investigación se realiza en el enfoque cuantitativo, según Navarro et al. (2017), "el enfoque cuantitativo permite aplicar pruebas estandarizadas (test) y cuestionarios obteniendo información numérica relevante para la investigación" (p. 21).

La investigación corresponde a un estudio correlacional, este tiene como finalidad conocer la relación o grado de asociación existente entre dos o más conceptos, categorías o variables en un contexto en particular. Estos estudios correlacionales, "al evaluar el grado de asociación entre dos o más variables que se sustentan en hipótesis sometidas a prueba" (Hernández et al. 2010, p. 123). Este estudio correlacional permitirá establecer estadísticamente la existencia de una relación significativa entre las variables:

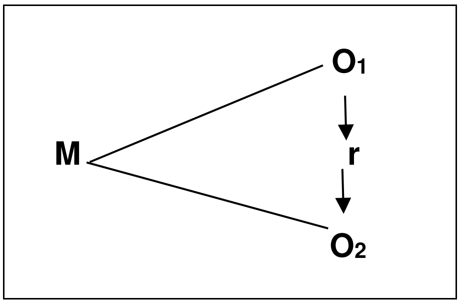
V1: La coordinación entre el Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS.

V2: Logro del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas.

El diseño de la investigación en el enfoque cuantitativo se esquematiza del siguiente modo figural:

Figura 22

Esquema de la relación Muestra-Variables



Donde:

M = Muestra: Estudiantes de la Maestría de Didáctica de la Física y Matemática de una universidad pública, año 2021.

O_1 = Información sobre la variable V1: La coordinación entre el Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS.

O_2 = Información sobre la variable V2: Logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas.

r = Índice de correlación estadística

La investigación tiene un diseño no experimental, porque no se controlan las variables independientes, esto porque las actividades ocurren de manera natural. Se basa en la observación de los procesos de aprendizajes, sin condiciones ni estímulos a los que se exponen los sujetos de estudio.

Así mismo, esta investigación es transversal porque la recolección de datos será en un único momento, como lo señala Velásquez y Rey (1999):

> Las investigaciones transversales investigan el objeto en un punto determinado del tiempo, del cual se toma la información que será utilizada en el estudio. Esta información puede referirse a uno o varios objetos de estudio. Les interesa la descripción o explicación del fenómeno en un momento específico, mas no su evolución. (p. 134)

3.2 Población y Muestra

Una población es la reunión de todos los elementos o casos, estos pueden ser individuos, objetos o acontecimientos, que cumplen ciertas características comunes y que se involucran en lo que pretendemos generalizar los resultados de la investigación. A esta totalidad también es conocida como población objetivo o universo. La población objetivo también llamada población de estudio, en la mayoría de los casos, difiere del universo de la población, por el interés al cual se orienta el estudio (MacMillan y Schumacher, 2005).

La muestra de nuestra investigación se elige por el muestreo probabilístico, donde los sujetos se extraen de la población de estudio, se conoce la probabilidad de selección de cada unidad elemental, aunque estas probabilidades, no necesariamente sean iguales. Este tipo de muestreo se realiza para proporcionar estimaciones válidas para la población a partir de una muestra seleccionada. Esto se interpreta que lo que se describe para la muestra también será válido para la población, con cierto grado de error. Se elige el muestreo aleatorio simple, donde los sujetos se selecciona a partir de la población con la misma probabilidad de ser elegidos. Este método se usa con más frecuencia cuando la población es pequeña (MacMillan y Schumacher, 2005).

Para calcular el tamaño de la muestra (*n*) se aplica la fórmula estadística, cuando el tamaño poblacional (*N*) es conocido:

$$n = \frac{\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q} \cdot N}{e^2 \cdot (N-1) + \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}$$

Donde:

N corresponde al valor del tamaño de la población.

$\hat{p}$ es la probabilidad de éxito de una variable del estudio.

$\hat{q}$ es el complemento de la probabilidad de éxito $\hat{p}$, se cumple que: $\hat{p} + \hat{q} = 1$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es un valor para la distribución normal estándar, se tomará 1,96 para un nivel de confianza de 95%.

e, es el error máximo de estimación.

Tabla 02

Valores para Z de la distribución normal estándar

$Z_{0,965}$	$Z_{0,970}$	$Z_{0,975}$	$Z_{0,980}$	$Z_{0,985}$	$Z_{0,990}$	$Z_{0,995}$
1,81	1,88	1,96	2,05	2,17	2,33	2,58

El tamaño de la muestra (*n*) se obtuvo a partir de una población de 125 estudiantes de la Maestría de una universidad pública. Se usó un nivel de confianza (*NC*) del 95 %, un error máximo de estimación (*e*) del 5 % y se sabe además que la probabilidad de éxito ($\hat{p}$) y la probabilidad de fracaso ($\hat{q}$) están en la relación: $\hat{p} = \hat{q} = 0{,}5$

Reemplazando valores:

$$n = \frac{(1{,}96)^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 125}{0{,}05^2 \cdot (125-1) + (1{,}96)^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 94{,}50 \approx 95 \text{ personas}$$

3.2.1 Criterios de selección para integrar la muestra

Criterios de inclusión

- Estudiantes de la maestría de Didáctica de la Física y Matemática.
- Estudiantes de otras maestrías de Educación Matemática.
- Docentes de Matemáticas que deseen participar voluntariamente.

Criterios de exclusión

- Estudiantes de otras maestrías distintas a la maestría de Didáctica de la Física y Matemática.
- Estudiantes matriculados de la maestría de Didáctica de la Física y Matemática que por problemas tecnológicos u otros no pudieron participar.
- Estudiantes de la maestría de Didáctica de la Física y Matemática que no desearon participar voluntariamente.

3.3 Operacionalización de las Variables

La operacionalización de variables permite la conversión de variables complejas en variables empíricas. En esta operacionalización se definen las dimensiones y se construyen los indicadores que se utilizan para la medición de las variables. Partimos de los conceptos, que tienen un carácter general y complejo, se elaboran los indicadores, que tienen un carácter particular y específico, y se culmina con la elaboración de los índices, nuevamente con un carácter complejo. Los indicadores hacen que el concepto abstracto sea observado de forma más concreta (Abero et al., 2015).

3.3.1 Variables

En nuestra investigación consideramos dos variables:

V1: La coordinación entre el Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS.

V2: Logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

3.3.2 Definición Conceptual de las Variables

VAR-1: La coordinación entre el Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS.

Prediger et al (2008), propone que, al comparar teorías, estas muestran sus similitudes y diferencias fuertes, "las similitudes son puntos para vincular (coordinar) y las diferencias fuertes pueden hacer que se hagan visibles las fortalezas individuales de cada teoría" (p. 4).

La EMR tiene 6 principios: P1: actividad, P2: realidad, P3: niveles, P4: entrelazamiento, P5: interactividad, P6: orientación. Por criterio de delimitación de la investigación, de los principios de la EMR analizaremos solamente el principio de realidad (P2), que a través de la fenomenología didáctica aporta el sentido "realista" de los aprendizajes en los estudiantes. (Drijvers, 2020b). Nos propone cuatro formas realistas que tiene el estudiante para el logro de los aprendizajes:

R1. Realista en el sentido de factible en nuestra práctica educativa (realidad académica). Lo que se hace real como resultado de los aprendizajes adquiridos.

R2. Realista en el sentido de relacionado con la vida real (del mundo físico, de la vida cotidiana).

R3. Realista en el sentido de lo que tiene significado para los estudiantes.

R4. Realista en el sentido de darse cuenta, percibir, ser consciente de, imaginar; algo que el estudiante le da sentido en una realidad abstracta.

Por criterio de delimitación de la investigación, de estos principios realistas analizaremos solamente los principios realistas R1 y R2, que están más relacionados a los enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La TRRS tiene cuatro registros: RS1: literal; RS2: simbólico; RS3: figural; RS4: cartesiano y tres transformaciones semióticas: T1: tratamiento, T2: conversión directa y T3: conversión inversa.

Por criterio de delimitación de la investigación, de los principios de la TRRS analizaremos solamente los principios referidos a las transformaciones semióticas como el tratamiento (T1), la conversión directa (T2) y la conversión inversa (T3), porque es a través de las trasformaciones semióticas de registros donde radica la mayor dificultad que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2011).

VAR-2: Logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar. El Razonamiento Cuantitativo tiene cuatro dimensiones:

D1: Interpretación, el alumno interpreta la información dada en las distintas representaciones semióticas: textual, figural, gráfico, cartesiano o simbólico.

D2: Representación, el alumno representa una información textual en una representación simbólica o gráfica que permita la actividad matemática o las transformaciones semióticas necesarias.

D3: Cálculo, el alumno realiza la actividad matemática o transformación semiótica necesaria para la resolución del problema o de alguna interrogante planteada.

D4: Análisis y Comunicación, el alumno realiza el análisis de la solución obtenida y verifica con la correspondencia de la interrogante planteada y comunica de forma textual con uso de las unidades respectivas. Esta comunicación puede ser producto del análisis realizado.

3.3.3 Definición Operacional de las Variables

A través de los principios realistas R1 y R2 en coordinación con las transformaciones semióticas T1, T2 y T3 aplicadas al objeto matemático de la función cuadrática, se estudiarán la influencia de seis coordinaciones: R1-T1; R1-T2; R1-T3; R2-T1; R2-T2 y R2-T3; para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo.

En esta operacionalización se definen las dimensiones y se construyen diez indicadores que se utilizan para la medición de las variables V1 y V2. Para la variable 1 se tienen dos dimensiones definidas por los principios de realidad de la EMR: Coordinación del Principio Realista R1 de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y Coordinación del Principio Realista R2 de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS.

Tabla 03

Definición operacional de las variables

Variable 1	Dimensión	Indicadores	Items No.
Coordinación entre los Principios de las Teorías EMR y TRRS	Coordinación del Principio Realista R1 de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS	**I1.** Aplica la coordinación del principio realista R1 y la transformación semiótica T1 a una situación relacionada con la función cuadrática.	01
		I2. Aplica la coordinación del principio realista R1 y la transformación semiótica T2 a una situación relacionada con la función cuadrática.	02
		I3. Aplica la coordinación del principio realista R1 y la transformación semiótica T3 a una situación relacionada con la función cuadrática.	03

	Coordinación del Principio Realista R2 de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS	**I4.** Aplica la coordinación del principio realista R2 y la transformación semiótica T1 a una situación relacionada con la función cuadrática. **I5.** Aplica la coordinación del principio realista R2 y la transformación semiótica T2 a una situación relacionada con la función cuadrática. **I6.** Aplica la coordinación del principio realista R2 y la transformación semiótica T3 a una situación relacionada con la función cuadrática.	04 05 06
Variable 2	**Dimensión**	**Indicadores**	**Items**
Logro del Razonamiento Cuantitativo	Interpretación	**I7.** Interpreta un elemento de un objeto realista-semiótico, aplicado a una función cuadrática.	07
	Representación	**I8.** Representa mediante un registro semiótico un objeto realista-semiótico, aplicado a una función cuadrática.	08
	Cálculo	**I9.** Calcula sobre un objeto realista-semiótico, aplicado a una función cuadrática.	09
	Análisis y Comunicación	**I10.** Analiza los cálculos para comunicar sobre un objeto realista-semiótico, aplicado a una función cuadrática.	10

Nota. Elaboración propia.

3.4 Instrumentos

3.4.1 Técnicas de Investigación

La técnica de investigación nos indica cómo realizar la recogida de información en nuestra investigación. Según Hernández et al. (2010), la “técnica es el arte o la manera de reconocer el camino, […], juega un papel muy importante en el proceso de investigación científica, a tal grado que se le puede definir como la estructura del proceso de la investigación científica” (p. 83). En nuestra investigación aplicaremos la técnica del cuestionario, que por las condiciones de bioseguridad en el contexto de la pandemia del Covid-19 se aplicará en forma virtual a todos los participantes de la muestra de estudio.

3.4.2 Instrumentos de Investigación

Los instrumentos son los documentos elaborados a partir de los indicadores, “su propósito es llevar a buen fin cada entrevista; […] tiene que ser neutral, pero cordial y servicial” (Hernández et al, 2010, p. 266). En las instrucciones del cuestionario, debe indicarse el propósito general del estudio, las motivaciones y el tiempo general de respuesta, agradeciendo de antemano la colaboración. En nuestra investigación aplicaremos dos cuestionarios como instrumentos de investigación, el primero para recoger información sobre la variable V1 y el segundo sobre la variable V2.

Tabla 04

Ficha Técnica del Cuestionario

Título del cuestionario	Coordinación de principios de las Teorías EMR y TRRS para el logro del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en estudiantes del nivel escolar.
Autor	Zenón Eulogio Morales Martínez
Objetivo de la investigación	Determinar la relación significativa entre la coordinación entre los principios de las Teorías EMR y TRSS para logro del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas, en alumnos del nivel escolar
Número de ítems	10
Tiempo de aplicación del cuestionario	30 minutos
Sujetos de investigación	Participantes de la Maestría de Física y Matemática de universidad pública

El instrumento se elabora con el uso de la escala de Likert, donde:

1 = en inicio; 2 = en proceso; 3 = destacado

3.4.3 Instrumento de Medición de Enfoque Cuantitativo

Los instrumentos de medición se elaboran según los indicadores definidos en la operacionalización de variables.

CUESTIONARIO PARA DOCENTES DE MATEMÁTICAS

El cuestionario está preparado para recopilar información sobre la posible existencia de una relación significativa entre la coordinación de los principios de la EMR y TRRS, para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

Este instrumento de medición consta de tres partes:

- Información demográfica
- Cuestionario 1 sobre la variable 1
- Cuestionario 2 sobre la variable 2

El docente participante debe responder cada pregunta dando su mejor respuesta. Se aprecia y considera la sinceridad en las respuestas que usted elige. Sus respuestas se mantendrán en forma completamente confidencial.

Gracias por tomarse un tiempo para completar este cuestionario.

INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

I. Información demográfica de la muestra

1. Elija su género:

a. Masculino

b. Femenino

2. Elija su rango de edad:

a. 24 – 30 años
b. 31 – 35 años
c. 36 – 40 años
d. 40 a más años

3. Elija el número de años dedicados a la docencia:

a. 0 – 5 años

b. 6 – 10 años

c. 11 – 15 años

d. 16 a más años

II. Cuestionario 1

VAR-1: Coordinación entre los principios de las Teorías EMR y de la TRRS.

01. La regla de correspondencia de una función cuadrática es: $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$,

Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma:

$$f(x) = a(x + b)(x + c)$$

Usted elija la opción correcta que corresponda:

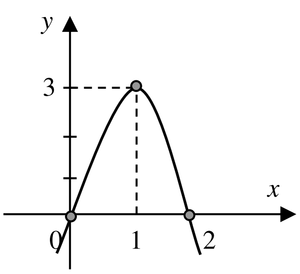
A) $f(x) = 2(x + 4)(x + 3)$

B) $f(x) = 2(x + 4)(x - 3)$

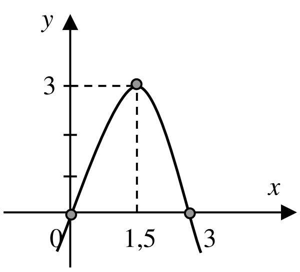
C) $f(x) = 2(x - 4)(x + 3)$

02. Graficar: $f(x) = -3(x - 1)^2 + 3$

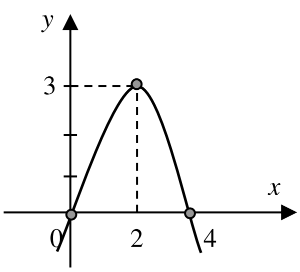
Elija la gráfica correspondiente.



A)

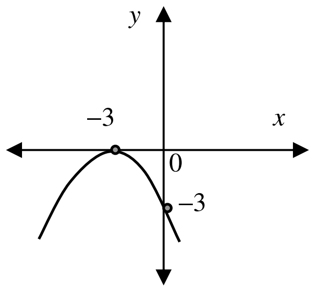


B)



C)

03. La regla de correspondencia de la función cuadrática es: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, para $a \neq 0$. Determine la regla de correspondencia para la gráfica mostrada:



A) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+3)^2 - 3$

B) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+3)^2$

C) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2$

04. El rendimiento de gasoil r (en km por litro) de un automóvil está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la regla de correspondencia: $r(v) = 4v - \frac{1}{20}v^2$, Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma:

$$r(v) = a(v+b)(v+c)$$

Usted elija la opción correcta que corresponda:

A) $r(v) = 4(v)(\frac{v}{80} - 1)$

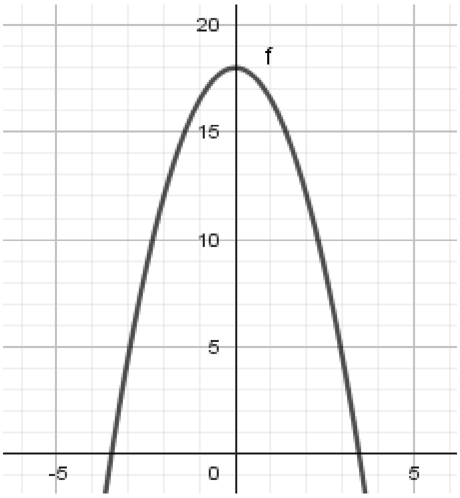
B) $r(v) = -4(v)(\frac{v}{80} + 1)$

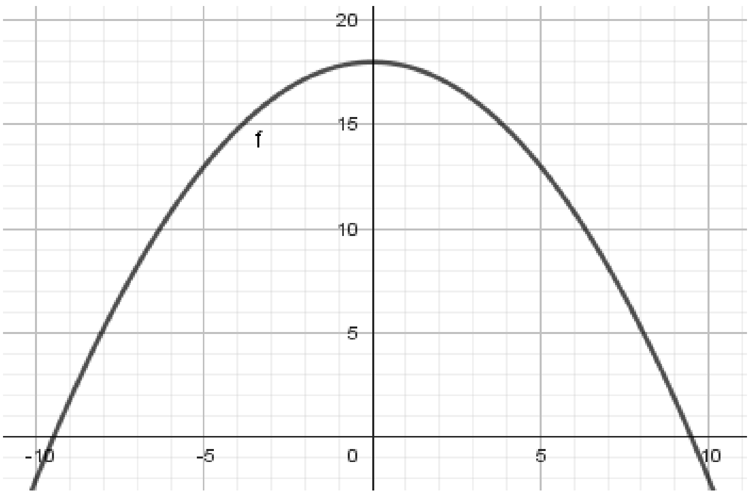
C) $r(v) = -4(v)(\frac{v}{80} - 1)$

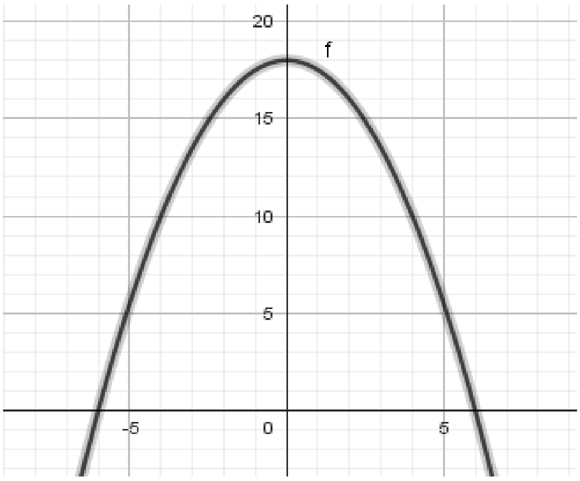
05. El arco de la ciudad de Tacna, ubicada en el sur del Perú, tiene una forma aproximada a la gráfica de una función cuadrática y su regla de correspondencia es:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 18.$$

Elija la gráfica correcta cuando dicha regla de correspondencia se represente en un plano cartesiano.

A) 

B) 

C) 

06. En el Circuito Mágico del Agua de Lima, se presentan arcos parabólicos que realizan un conjunto de grifos que lanzan agua:

Si la altura máxima que alcanza el agua es de 4m y la distancia horizontal en la base es de 6m. Considerando al punto medio de la base como el origen de coordenadas. Determine la regla de correspondencia de la parábola que describe la trayectoria del agua, teniendo en cuenta que la regla de correspondencia de la función cuadrática de vértice $V = (h, k)$ es: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, para $a \neq 0$.

A) $f(x) = -\frac{4}{9}\mathrm{x}^2 - 4$

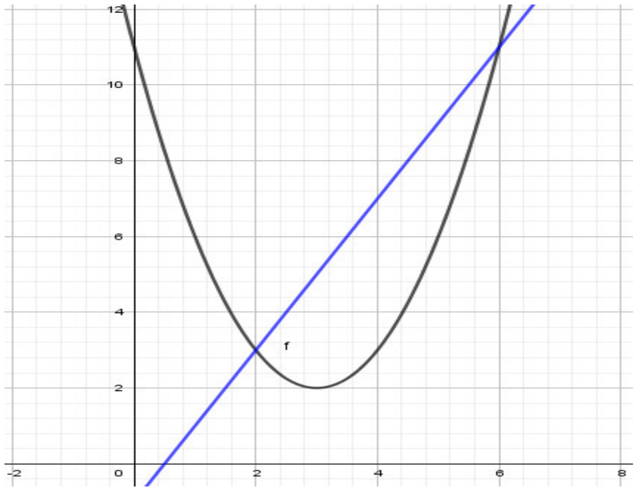
B) $f(x) = -\frac{4}{9}\mathrm{x}^2 + 4$

C) $f(x) = -\frac{9}{4}\mathrm{x}^2 + 4$

III. Cuestionario 2

VAR-2: Logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

07. Según la gráfica mostrada:



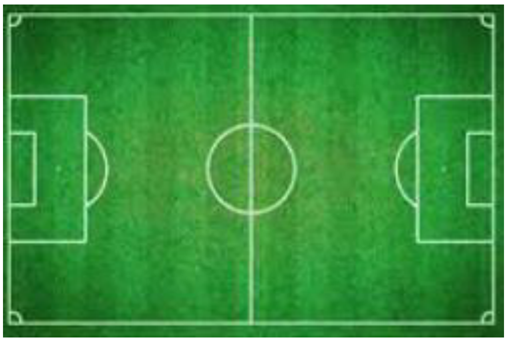
Indique la ordenada del vértice de la parábola que representa la función cuadrática.

A) $y = 2$ B) $x = 3$ C) (3;2)

08. Según la FIFA, la medida máxima de un campo de futbol es 90x120m

Si "x" representa la medida del ancho del campo de fútbol

(ancho = la menor medida del campo)



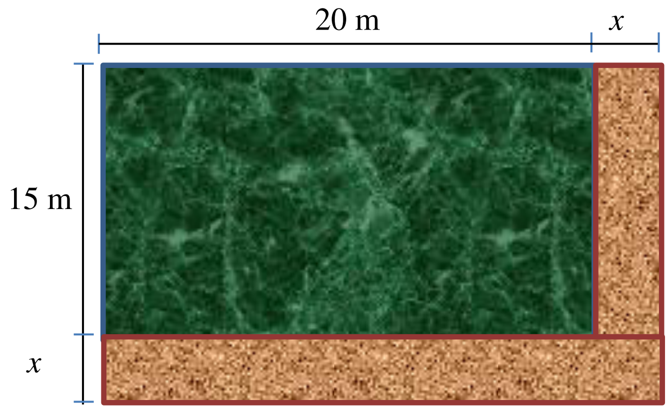
El área máxima, $A(x)$ del campo de fútbol según FIFA, en función de x se representa por la expresión:

A) $A(x) = x^2 + 30$

B) $A(x) = x^2 + 30x$

C) $A(x) = x + 30$

09. El césped del jardín del Sr. Jones mide 15 por 20 metros. El Sr. Jones decide extender el césped; para lograrlo a los dos lados añade una franja de igual anchura de "*x*" metros, como se muestra en la figura. Si el área del césped ampliado mide 374 m^2. Determine el valor de "*x*".

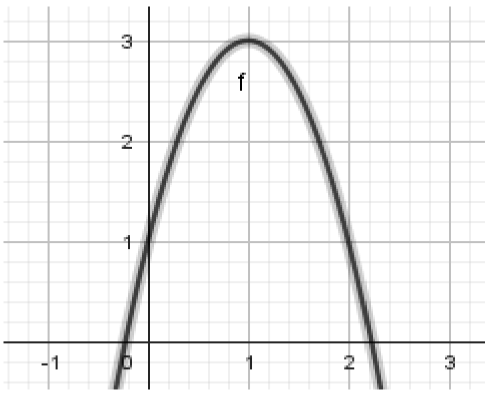


A) $x = 1$

B) $x = 2$

C) $x = 3$

10. Si la regla de correspondencia de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + 4x + 1$ y la relación que determina el vértice de la parábola que la representa es $h = -\frac{b}{2a}$ siendo, el valor de a es: (Considere la información de la gráfica)



A) 2
B) −1
C) −2

3.4.4 Validez del Instrumento

Según Hernández et al. (2010) “todo instrumento de investigación debe reunir tres requisitos esenciales: validez, confiabilidad y objetividad” (p. 232).

La validez “es el grado en el que un instrumento mide realmente la variable que se pretende medir” (Hernández et al. 2010, p. 266), es decir, el instrumento validado medirá realmente lo que el investigador quiere medir.

La validez del instrumento a aplicar fue realizada a cargo de 3 jueces expertos nacionales. Todos los jueces tienen el grado de Doctor en Educación o ramas afines, también tienen reconocida trayectoria en el ámbito académico. El procedimiento seguido para la validación del instrumento fue el siguiente:

1) Se eligen jueces de trayectoria reconocida, principalmente siendo expositores en congresos de Educación Matemática como RELME, CIBEM u otros.
2) Se envían los 5 documentos que sustentan esta validación como: la operacionalización de la variable, matriz de consistencia, rúbrica de evaluación, ficha de evaluación e instrumento de la investigación. Todos estos documentos se adjuntan en el Anexo.

Los jueces que participaron en esta validación y su s respectivos puntajes de una escala de 0 a 20 se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 05

Resultados de la Validación por Jueces expertos

Juez Experto	Grado académico	Puntaje que asigna
Dr. Roger Soto Quiroz	Doctor en Educación	20,00
Dra. Patricia Guillén Aparicio	Doctor en Educación	20,0
Dr. Alexander Bonifacio Castro	Doctor en Ciencias	17,80

3.4.5 Confiabilidad del Instrumento

La confiabilidad de un instrumento de medición "se refiere al grado que tiene el instrumento para producir los mismos resultados si se aplica en repetidas veces" (Hernández et al, 2010, p. 232). Habiendo distintos métodos para medir la confiabilidad, emplearemos el método de consistencia interna conocido como el coeficiente de alfa de Cronbach (α). La confiabilidad varía según el número de ítems que presente el instrumento de medición, toma valores de 0 a 1, al igual que el coeficiente de Aiken, para medir la validez, este alfa de Cronbach (α), cuando esté más cerca de 1 será más confiable, es aceptable valores mayores a 0,80.

El coeficiente de alfa de Cronbach (α), se determina por la relación:

$$\alpha = \frac{K}{K-1}\left(1 - \frac{\sum S_i^2}{S_T^2}\right)$$

Siendo:
α: Coeficiente alfa de Cronbach.
K: número de ítems.
S_i^2: Varianza de los ítems.
S_T^2: Varianza de la suma de ítems.

Tabla 06

Niveles de confiabilidad según el coeficiente de Alfa de Cronbach (α)

Valor α	Nivel de confiabilidad
[0,9 a 1,0]	Excelente
[0,8 a 0,9 [	Bueno
[0,7 a 0,8 [	Aceptable
[0,6 a 0,7 [	Cuestionable
[0,5 a 0,6 [	Pobre
[0,0 a 0,5 [	Inaceptable

Aplicando el coeficiente de alfa de Cronbach (α) a los resultados enviados por los jueces expertos, se obtuvo un α = 0,8182 lo que indica que nuestro instrumento de medición tiene un buen nivel de confiabilidad. Este valor es un promedio ponderado de los valores respectivos obtenidos para cada variable como se muestran en las siguientes tablas. El promedio ponderado de ambos valores es:

$$\alpha = \frac{0{,}807 \times 6 + 0{,}835 \times 4}{10} = 0{,}8182$$

Los valores del Coeficiente de Cronbach para las variables V1 y V2 se presentan en las siguientes tablas, obtenidas a partir del software estadístico SPSS:

Tabla 07

Valor del Coeficiente de Alfa de Cronbach (α) para la variable V1

Escala: VAR-1_Coordinación entre Principios de la EMR y TRRS

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	95	100,0
	Excluidos[a]	0	,0
	Total	95	100,0

a. Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,807	6

Tabla 08

Valor del Coeficiente de Alfa de Cronbach (α) para la variable V2

Escala: VAR-2_Logro del Razonamiento Cuantitativo

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	95	100,0
	Excluidos[a]	0	,0
	Total	95	100,0

a. Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,835	4

3.5 Procedimientos

3.5.1 Elaboración del Instrumento de Medición

- Se elabora el instrumento de medición con 10 ítems según la operacionalización de la variable.
- Se envía el instrumento con su rúbrica de evaluación para realizar la validez y confiabilidad del instrumento a cargo de los 3 jueces expertos.

3.5.2 Aplicación del instrumento de medición

- Se aplica el instrumento validado a los 95 sujetos de investigación determinados según el muestreo probabilístico. Esta aplicación se realiza con la técnica de la encuesta, a través de un Formulario de Google con alternativas múltiples, cuyo enlace se envía en forma virtual por correo electrónico.

- Se recepcionan los resultados en forma virtual a través del mismo Formulario Google, creando un Excel con los resultados enviados.
- Los resultados obtenidos son procesados empleando el software estadístico SPSS, para la obtención de los resultados estadísticos que serán analizados por el investigador, llegando a las conclusiones que se presentarán en adelante.

3.6 Análisis de Datos

Nuestra investigación es de tipo correlacional, donde al concluir la investigación debemos determinar si existe una relación significativa entre la variable V1: la coordinación entre el Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS y la variable V2: logro del Razonamiento Cuantitativo.

Para comprobar la existencia de esta relación significativa se harán dos pruebas:

1) Prueba de Normalidad:

Paso 1: Plantear las hipótesis de normalidad:

$$H_0: Los\ datos\ siguen\ una\ distribución\ normal$$

$$H_1: Los\ datos\ no\ siguen\ una\ distribución\ normal$$

Paso 2: Elección del nivel de significancia:

$$NC: Nivel\ de\ confianza = 95\ \% = 0{,}95$$

$$\alpha: Nivel\ de\ significancia = 5\ \% = 0{,}05$$

Paso 3: Elección del Test de Normalidad, depende del tamaño de la muestra (n)

$$Si\ n > 50, se\ aplica\ la\ Prueba\ de\ Kolmogorov - Smirnov$$

$$Si\ n \leq 50, se\ aplica\ la\ Prueba\ de\ Shapiro - Wilk$$

Paso 4: Criterio de decisión:

$$Si\ p - valor < 0{,}05, se\ rechaza\ la\ hipótesis\ H_o; no\ existe\ Normalidad$$

$$Si\ p - valor \geq 0{,}05, se\ acepta\ la\ hipótesis\ H_o;\ existe\ Normalidad$$

Paso 5: Resultados y conclusión

2) Prueba No-Paramétrica:

Si no existe normalidad, se aplicará una prueba no-paramétrica adecuada para variables categóricas: Prueba Chi-cuadrado.

Los datos se procesan con el software SPSS para determinar si existe una relación significativa entre las variables en estudio.

IV. RESULTADOS

4.1 Análisis de la Información Demográfica

Análisis 01: Sobre el género de los participantes

En el desarrollo del cuestionario participaron 70 docentes hombres y 25 docentes mujeres.

Los resultados sobre esta consulta se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 09

Distribución de los participantes en el estudio según género

Género	Frecuencia	Porcentaje
Hombre	70	73,68
Mujer	25	26,32
Total	95	100,0

Análisis 02: Sobre el rango de edad de los participantes

La mayoría de los docentes participantes tiene más de 35 años, según se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 10

Distribución de los participantes en el estudio según rango de edad

Rango de edad	Frecuencia	Porcentaje
24 – 30 años	15	15,79
31 – 35 años	15	15,79
36 – 40 años	20	21,05
40 a más años	45	47,37
Total	95	100,0

Análisis 03: Sobre la experiencia en la docencia

La mayoría de los docentes participantes tiene más de 10 años realizando la labor docente, esto favorece a la investigación porque es posible que los docentes al estar aspirando al grado de magister y tener una mayor experiencia docente se hayan encontrado con diversas dificultades de aprendizaje de sus alumnos. Estos años de docencia se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 11

Distribución de los participantes en el estudio según años de docencia

Años de docencia	Frecuencia	Porcentaje
0 – 5 años	10	10,53
6 – 10 años	25	26,32
11 – 15 años	35	36,84
16 a más años	25	26,32
Total	95	100,01

Los resultados del cuestionario son analizados en dos etapas, primero se le aplica la prueba de normalidad que permitirá la elección de la segunda prueba, si existe normalidad se elige una prueba paramétrica y si no existe normalidad se elige una prueba no paramétrica.

1) Para determinar la normalidad de la prueba se ralizan cinco pasos:

Paso 1: Plantear las hipótesis de normalidad:

$$H_0: Los\ datos\ siguen\ una\ distribución\ normal$$

$$H_1: Los\ datos\ no\ siguen\ una\ distribución\ normal$$

Paso 2: Elección del nivel de significancia:

$$NC: Nivel\ de\ confianza = 95\ \% = 0{,}95$$

$$\alpha: Nivel\ de\ significancia = 5\ \% = 0{,}05$$

Paso 3: Elección del Test de Normalidad, depende del tamaño de la muestra (n)

$$Si\ n > 50, se\ aplica\ la\ Prueba\ de\ Kolmogorov - Smirnov$$

$$Si\ n \leq 50, se\ aplica\ la\ Prueba\ de\ Shapiro - Wilk$$

Para nuestro estudio, como $n = 95$ aplicaremos la Prueba de Kolmogorov-Smirnov.

Paso 4: Critero de decisión:

$$Si\ p - valor < 0{,}05, se\ rechaza\ la\ hipótesis\ H_o; no\ existe\ Normalidad$$

$$Si\ p - valor \geq 0{,}05, se\ acepta\ la\ hipótesis\ H_o;\ existe\ Normalidad$$

Paso 5: Resultados y conclusión. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 12

Pruebas de Normalidad

Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
VARIABLE1	,318	95	,000	,691	95	,000
VARIABLE2	,457	95	,000	,562	95	,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Como la significancia obtenida en la prueba de Kolmogorov-Smirnov es 0,000, siendo este valor menor al valor de significancia previsto (0,05) se concluye que no existe normalidad.

V. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1 Análisis de Resultados del Cuestionario: Prueba Chi-cuadrado

En nuestro estudio, las variables son:

V1: La coordinación entre el Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS

V2: Logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

Por su naturaleza, ambas variables son categóricas y como la distribución de datos no cumple con la distribución normal, se elige una prueba no paramétrica: Chi-cuadrado. Esta prueba Chi-cuadrado se aplica tres veces para verificar la Hipótesis General del estudio y las dos Hipótesis Específicas.

5.2 Prueba Chi-Cuadrado para la Hipótesis General

A partir de la Hipótesis General de nuestra investigación, definimos su respectiva hipótesis alternativa ($\boldsymbol{H_1}$) y la hipótesis nula ($\boldsymbol{H_0}$):

$\boldsymbol{H_1}$: Existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

$\boldsymbol{H_0}$: No existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

Al aplicar la Prueba de Chi-cuadrado a las respuestas entregadas por los participantes en esta investigación, se obtienen los resultados mostrados en la siguiente tabla:

Tabla 13

Resumen del procesamiento de los casos aplicados a la hipótesis general

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Coordinación EMR-TRRS * Logro del Razonamiento Cuantitativo	95	100,0%	0	0,0%	95	100,0%

Tabla 14

Prueba de Chi-cuadrado de la hipótesis general

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	162,163[a]	30	,000
Razón de verosimilitudes	39,011	30	,125
Asociación lineal por lineal	26,706	1	,000
N de casos válidos	95		

a. 40 casillas (95,2%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

5.2.1 Interpretación de resultados sobre la Hipótesis General

Como en la Prueba de Chi-cuadrado para la Hipótesis General, se obtiene un valor de significancia es 0,000 que es menor al valor previsto de 0,05, entonces rechazamos la hipótesis nula ($\boldsymbol{H_0}$) y aceptamos la hipótesis alternativa ($\boldsymbol{H_1}$), esto se interpreta que existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar con un nivel de confianza del 95 %.

Esta relación significativa prueba que cuando se articulan los principios de diversas teorías de la educación matemática, como es el caso del principio de la realidad de los aprendizajes y la realidad del mundo real para realizar la actividad matemática, esta vez a la luz de la TRRS, se logran alcanzar las dimensiones de interpretación, representación, cálculo, análisis y comunicación que demuestran que se han logrado los aprendizajes de la función cuadrática, aplicando situaciones problemáticas del nivel escolar.

Tabla 15

Tabla de contingencia entre la coordinación del Principio de Realidad de EMR-TRRS y el logro del Razonamiento Cuantitativo

Tabla de contingencia Coordinación EMR-TRRS * Logro del Razonamiento Cuantitativo

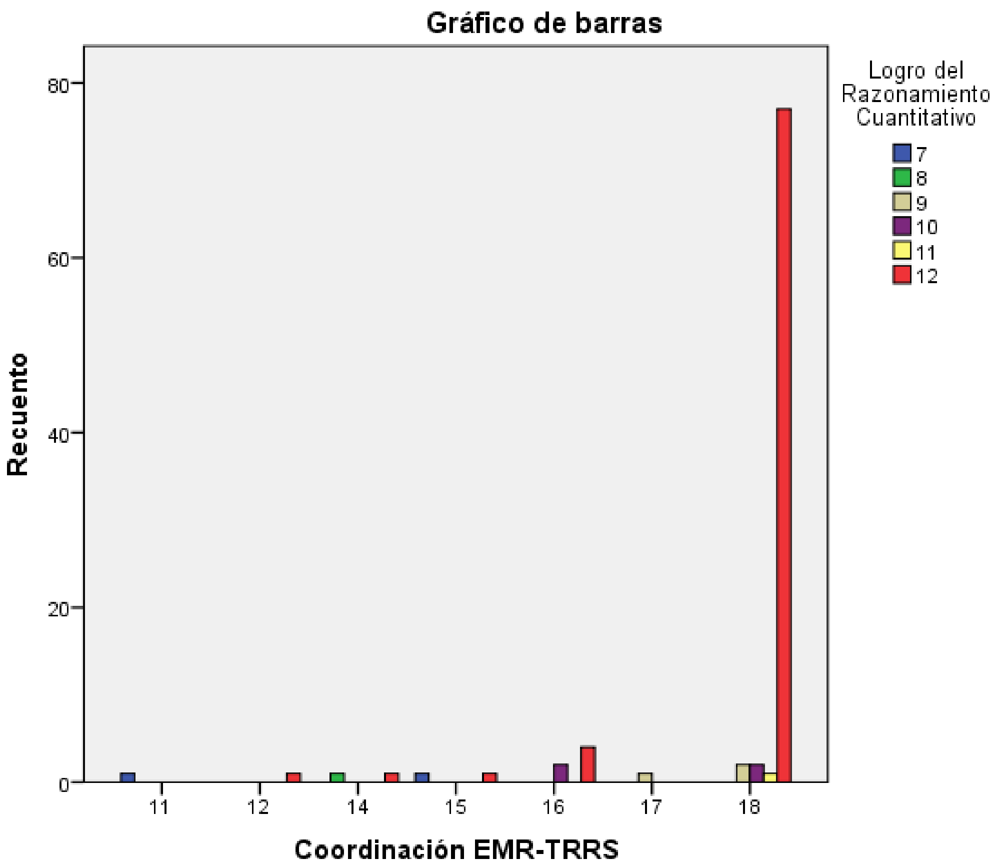
			Logro del Razonamiento Cuantitativo						Total
			7	8	9	10	11	12	
Coordinación EMR-TRRS	11	Recuento	1	0	0	0	0	0	1
		Frecuencia esperada	,0	,0	,0	,0	,0	,9	1,0
		% del total	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%
	12	Recuento	0	0	0	0	0	1	1
		Frecuencia esperada	,0	,0	,0	,0	,0	,9	1,0
		% del total	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%	1,1%
	14	Recuento	0	1	0	0	0	1	2
		Frecuencia esperada	,0	,0	,1	,1	,0	1,8	2,0
		% del total	0,0%	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%	2,1%
	15	Recuento	1	0	0	0	0	1	2
		Frecuencia esperada	,0	,0	,1	,1	,0	1,8	2,0
		% del total	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%	2,1%
	16	Recuento	0	0	0	2	0	4	6
		Frecuencia esperada	,1	,1	,2	,3	,1	5,3	6,0
		% del total	0,0%	0,0%	0,0%	2,1%	0,0%	4,2%	6,3%
	17	Recuento	0	0	1	0	0	0	1
		Frecuencia esperada	,0	,0	,0	,0	,0	,9	1,0
		% del total	0,0%	0,0%	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%
	18	Recuento	0	0	2	2	1	77	82
		Frecuencia esperada	1,7	,9	2,6	3,5	,9	72,5	82,0
		% del total	0,0%	0,0%	2,1%	2,1%	1,1%	81,1%	86,3%
Total		Recuento	2	1	3	4	1	84	95
		Frecuencia esperada	2,0	1,0	3,0	4,0	1,0	84,0	95,0
		% del total	2,1%	1,1%	3,2%	4,2%	1,1%	88,4%	100,0%

5.2.2 Interpretación de los niveles de logro de los participantes en la validación de la hipótesis general

En la tabla anterior se observa que al aplicar el cuestionario sobre la coordinación de la EMR-TRRS, se observa que el 2,2 % de los docentes participantes se encuentran en un nivel de inicio (obtienen puntajes de 11 y 12), un 4,2 % se encuentra en un nivel de proceso (obtienen puntajes de 14 y 15) y un 93,7 % se encuentra en un nivel destacado de la competencia (obtienen puntajes de 16, 17 y 18). Estos resultados son presentados mediante el gráfico de barras mostrado a continuación, donde se observa que unos 89 de los 95 docentes participantes alcanzan el nivel destacado en la competencia.

Figura 23

Distribución de los participantes según la Coordinación de EMR-TRRS y el Logro del Razonamiento Cuantitativo



5.3 Prueba Chi-cuadrado para la Hipótesis Específica 1

A partir de la Hipótesis Específica 1 de nuestra investigación, definimos su respectiva hipótesis alternativa ($\boldsymbol{H_1}$) y la hipótesis nula ($\boldsymbol{H_0}$):

$\boldsymbol{H_1}$: Existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

$\boldsymbol{H_0}$: No existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

Al aplicar la Prueba de Chi-cuadrado a las respuestas entregadas por los participantes en esta investigación, se obtienen los resultados mostrados en la siguiente tabla:

Tabla 16

Resumen del procesamiento de los casos aplicados a la hipótesis específica-1

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Coordinación R1-TRRS * Logro del Razonamiento Cuantitativo	95	100,0%	0	0,0%	95	100,0%

Tabla 17

Prueba de Chi-Cuadrado de la hipótesis específica-1

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	107,434[a]	15	,000
Razón de verosimilitudes	27,139	15	,028
Asociación lineal por lineal	28,786	1	,000
N de casos válidos	95		

a. 22 casillas (91,7%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

5.3.1 Interpretación de resultados sobre la Hipótesis Específica 1

Como en la Prueba de Chi-cuadrado para la Hipótesis Específica 1, se obtiene un valor de significancia es 0,000 que es menor al valor previsto de 0,05, entonces rechazamos la hipótesis nula ($\boldsymbol{H_0}$) y aceptamos la hipótesis alternativa ($\boldsymbol{H_1}$), esto se interpreta que existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar con un nivel de confianza del 95 %.

Esta relación significativa prueba que cuando se articulan los principios de diversas teorías de la educación matemática, como es el caso del principio de la realidad de los aprendizajes para realizar la actividad matemática, esta vez a la luz de la TRRS, se logran alcanzar las dimensiones de interpretación, representación, cálculo, análisis y comunicación que demuestran que se han logrado los aprendizajes de la función cuadrática, aplicando situaciones problemáticas del nivel escolar.

Tabla 18

Tabla de contingencia entre la Coordinación del Principio R1 de la EMR y las transformaciones de la TRRS, y el logro del Razonamiento Cuantitativo

Tabla de contingencia Coordinación R1-TRRS * Logro del Razonamiento Cuantitativo

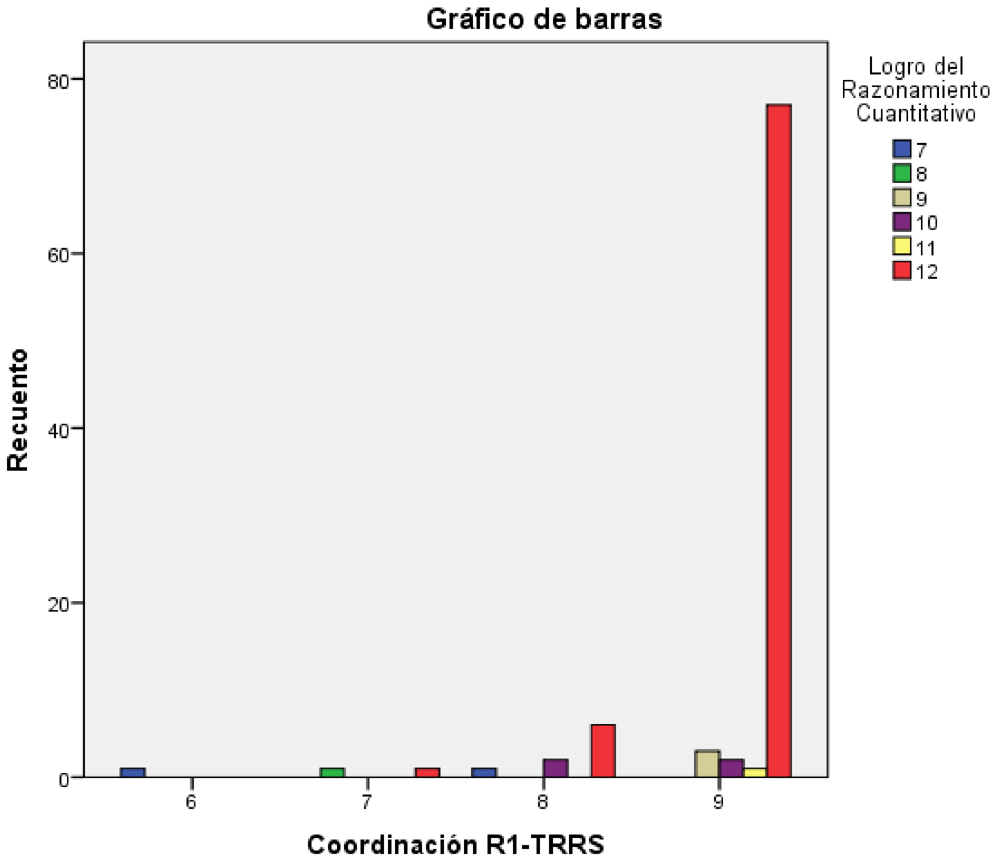
			Logro del Razonamiento Cuantitativo						Total
			7	8	9	10	11	12	
Coordinación R1-TRRS	6	Recuento	1	0	0	0	0	0	1
		Frecuencia esperada	,0	,0	,0	,0	,0	,9	1,0
		% del total	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%
	7	Recuento	0	1	0	0	0	1	2
		Frecuencia esperada	,0	,0	,1	,1	,0	1,8	2,0
		% del total	0,0%	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%	2,1%
	8	Recuento	1	0	0	2	0	6	9
		Frecuencia esperada	,2	,1	,3	,4	,1	8,0	9,0
		% del total	1,1%	0,0%	0,0%	2,1%	0,0%	6,3%	9,5%
	9	Recuento	0	0	3	2	1	77	83
		Frecuencia esperada	1,7	,9	2,6	3,5	,9	73,4	83,0
		% del total	0,0%	0,0%	3,2%	2,1%	1,1%	81,1%	87,4%
Total		Recuento	2	1	3	4	1	84	95
		Frecuencia esperada	2,0	1,0	3,0	4,0	1,0	84,0	95,0
		% del total	2,1%	1,1%	3,2%	4,2%	1,1%	88,4%	100,0%

5.3.2 Interpretación de los niveles de logro de los participantes en la validación de la hipótesis específica 1

En la tabla anterior se observa que al aplicar el cuestionario sobre la coordinación del Principio de realidad R1 de la EMR y TRRS, se observa que el 1,1 % de los docentes participantes se encuentran en un nivel de inicio (obtienen puntaje 6), un 2,1 % se encuentra en un nivel de proceso (obtienen puntaje de 7) y un 96,9 % se encuentra en un nivel destacado de la competencia (obtienen puntajes de 8 y 9). Estos resultados son presentados mediante el gráfico de barras mostrado a continuación, donde se observa que unos 92 de los 95 docentes participantes alcanzan el nivel destacado en la competencia.

Figura 24

Distribución de los participantes según la Coordinación del Principio R1 de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro del Razonamiento Cuantitativo



5.4 Prueba Chi-cuadrado para la Hipótesis Específica 2

A partir de la Hipótesis Específica 2 de nuestra investigación, definimos su respectiva hipótesis alternativa ($\boldsymbol{H_1}$) y la hipótesis nula ($\boldsymbol{H_0}$):

$\boldsymbol{H_1}$: Existe relación significativa entre la coordinación del Principio de realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

$\boldsymbol{H_0}$: No existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.

Al aplicar la Prueba de Chi-cuadrado a las respuestas entregadas por los participantes en esta investigación, se obtienen los resultados mostrados en la siguiente tabla:

Tabla 19

Resumen del procesamiento de los casos aplicados a la hipótesis específica-2

Resumen del procesamiento de los casos

	Casos					
	Válidos		Perdidos		Total	
	N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
Coordinación R2-TRRS * Logro del Razonamiento Cuantitativo	95	100,0%	0	0,0%	95	100,0%

Tabla 20

Prueba de Chi-Cuadrado de la Hipótesis Específica-2

Pruebas de chi-cuadrado

	Valor	gl	Sig. asintótica (bilateral)
Chi-cuadrado de Pearson	96,702[a]	20	,000
Razón de verosimilitudes	30,496	20	,062
Asociación lineal por lineal	22,284	1	,000
N de casos válidos	95		

a. 28 casillas (93,3%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es ,01.

5.4.1 Interpretación de resultados sobre la Hipótesis Específica 2

Como en la Prueba de Chi-cuadrado para la Hipótesis Específica 1, se obtiene un valor de significancia es 0,000 que es menor al valor previsto de 0,05, entonces rechazamos la hipótesis nula ($\boldsymbol{H_0}$) y aceptamos la hipótesis alternativa ($\boldsymbol{H_1}$), esto se interpreta que existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la

TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar con un nivel de confianza del 95 %.

Esta relación significativa prueba que cuando se articulan los principios de diversas teorías de la educación matemática, como es el caso del principio de la realidad del mundo real para realizar la actividad matemática, esta vez a la luz de la TRRS, se logran alcanzar las dimensiones de interpretación, representación, cálculo, análisis y comunicación que demuestran que se han logrado los aprendizajes de la función cuadrática, aplicando situaciones problemáticas del nivel escolar.

Tabla 21

Tabla de contingencia entre la Coordinación del Principio de Realidad R2 de la EMR y la TRRS, para el logro del Razonamiento Cuantitativo

Tabla de contingencia Coordinación R2-TRRS * Logro del Razonamiento Cuantitativo

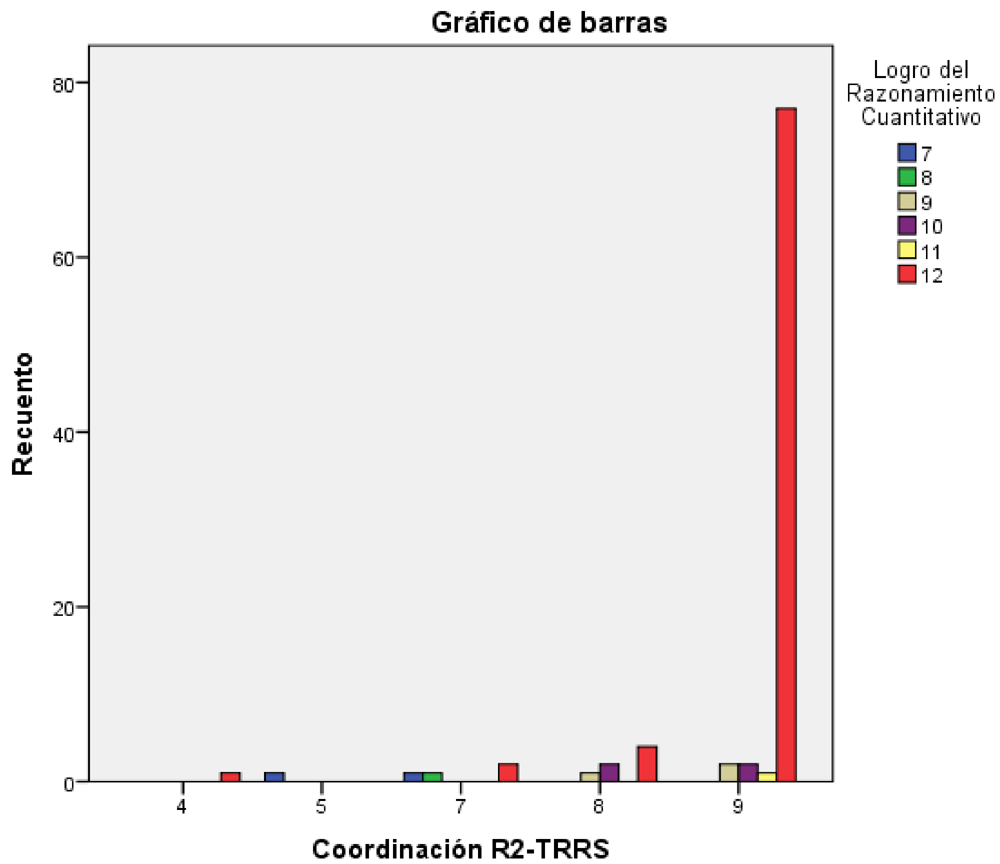
			Logro del Razonamiento Cuantitativo						Total
			7	8	9	10	11	12	
Coordinación R2-TRRS	4	Recuento	0	0	0	0	0	1	1
		Frecuencia esperada	,0	,0	,0	,0	,0	,9	1,0
		% del total	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%	1,1%
	5	Recuento	1	0	0	0	0	0	1
		Frecuencia esperada	,0	,0	,0	,0	,0	,9	1,0
		% del total	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,1%
	7	Recuento	1	1	0	0	0	2	4
		Frecuencia esperada	,1	,0	,1	,2	,0	3,5	4,0
		% del total	1,1%	1,1%	0,0%	0,0%	0,0%	2,1%	4,2%
	8	Recuento	0	0	1	2	0	4	7
		Frecuencia esperada	,1	,1	,2	,3	,1	6,2	7,0
		% del total	0,0%	0,0%	1,1%	2,1%	0,0%	4,2%	7,4%
	9	Recuento	0	0	2	2	1	77	82
		Frecuencia esperada	1,7	,9	2,6	3,5	,9	72,5	82,0
		% del total	0,0%	0,0%	2,1%	2,1%	1,1%	81,1%	86,3%
Total		Recuento	2	1	3	4	1	84	95
		Frecuencia esperada	2,0	1,0	3,0	4,0	1,0	84,0	95,0
		% del total	2,1%	1,1%	3,2%	4,2%	1,1%	88,4%	100,0%

5.4.2 Interpretación de los niveles de logro de los participantes en la validación de la hipótesis específica 2

En la tabla anterior se observa que al aplicar el cuestionario sobre la coordinación del Principio de realidad R1 de la EMR y TRRS, se observa que el 2,2 % de los docentes participantes se encuentran en un nivel de inicio (obtienen puntaje 4 y 5), un 4,2 % se encuentra en un nivel de proceso (obtienen puntaje de 7) y un 93,7 % se encuentra en un nivel destacado de la competencia (obtienen puntajes de 8 y 9). Estos resultados son presentados mediante el gráfico de barras mostrado a continuación, donde se observa que unos 89 de los 95 docentes participantes alcanzan el nivel destacado en la competencia.

Figura 25

Distribución de los participantes según la coordinación entre el Principio R2 de la EMR y TRRS, y el logro del Razonamiento Cuantitativo



VI. CONCLUSIONES

- En la aplicación del principio de la realidad académica (R1) de la EMR que se propone en los indicadores I1, I2 e I3, nos da un resultado de un 96,9 % de participantes con nivel destacado, estos logran realizar las transformaciones semióticas como tratamientos en el mismo registro algebraico; la conversión directa que es cambio del registro algebraico al registro gráfico y la conversión inversa como el cambio del registro gráfico al registro algebraico, aplicando conocimientos matemáticos previos de la función cuadrática considerado como un entorno realista académico, logrando las dimensiones del razonamiento cuantitativo, propuesto como logro a alcanzar en esta investigación. Esto cumple con lo que Font (2013) propone la necesidad de abordar el problema de comparar, coordinar e integrar los principios de las teorías en un nuevo marco que permitan hacer una educación matemática que disponga de herramientas necesarias y suficientes, producto de esta coordinación de teorías, para el logro de los aprendizajes en matemática.
- Al aplicar el principio realista R2 de la realidad del mundo real, propuesto todo lo que el mundo físico nos provee y que puede emplearse con fines educativos como eventos deportivos, actividades culturales, construcciones arquitectónicas o lo que produce la naturaleza, esa amplia gama de fenómenos físicos como la trayectoria parabólica producida por el agua cuando visitamos el Circuito Mágico del Agua de Lima, este principio se evalúa con los indicadores I4, I5 e I6 del cuestionario, que luego de su aplicación nos da un resultado de un 93,7 % de participantes que alcanzan el nivel destacado, lo que permite concluir que estos participantes logran la matematización horizontal de la función cuadrática, es decir logran realizar transformaciones semióticas en entornos reales, esta coordinación de principios realistas y semióticos permiten interpretar, representar, calcular, analizar y argumentar situaciones

problemáticas aplicadas a la función cuadrática. Se cumple la propuesta de Prediger et al. (2008) que señala que podemos ignorar algunas teorías para elegir otras, esto nos ha permitido hacer delimitaciones oportunas que favorecen a la investigación en el encuentro de esas similitudes que han permitido vincular principios para el logro de los aprendizajes propuestos.

- A partir del valor obtenido 0,000 de significación, permite afirmar la existencia de una relación significativa entre la coordinación entre los principios de la EMR y TRRS y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar. Nos permite afirmar que, a través de la coordinación, similitud, semejanzas, coincidencias o integración entre los principios de estas teorías, los participantes logran interpretar, representar, calcular, analizar y argumentar cuando se enfrentan a situaciones problemáticas en la que se involucran las funciones cuadráticas, en contextos realistas del mundo académico y del mundo físico. Esta conclusión coincide con los diversos alcances que va teniendo la EMR en el mundo, como lo señala Heuvel-Panhuizen (2019) y la propuesta de Duval (2005) sobre el éxito de la actividad matemática a través de las transformaciones semióticas con el uso de diversos registros que permiten la realidad académica propuesta por Drijvers (2020a).
- Así mismo se concluye que estos resultados permiten mostrar a la comunidad educativa que a partir de las similitudes entre estas teorías, se pueden vincular algunos de sus principios y lograr que las matemáticas sean aprendidas de un modo realista-semiótica, de forma más significativa y manipulable, para la disminución de las dificultades involucradas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

VI. RECOMENDACIONES

Ante la diversidad de las teorías de la educación matemática, los docentes disponen de diversos marcos teóricos que permiten explicar las dificultades que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizajes de conceptos abstractos como son las matemáticas. Estas teorías tienen diversos principios aplicables a diversas realidades culturales, diversos niveles educativos, diversidades naturales y geográficas, diversidades económicas y sociales. Es labor de los docentes decidir sobre qué principios de las teorías de la educación matemática son más adaptables a sus realidades, e incluso como se ha demostrado en esta investigación, la existencia de ciertas similitudes o coordinación entre principios de diversas teorías, en este caso, la EMR de la escuela holandesa y la TRRS de la escuela francesa.

En adelante, el término realidad para la educación matemática tiene una acepción más amplia, es importante poner atención a fortalecer o asegurar el logro de la realidad producida por los conocimientos previos que permiten construir nuevos aprendizajes, lo que aprendimos en la educación inicial forma conocimientos reales para la educación primaria, estos aprendizajes permiten construir conocimientos en educación secundaria, que forma las bases de los conocimientos que se aprenderán en la educación superior. En todos estos estadios de aprendizajes, la realidad del mundo real debe tener una participación importante, la vida cotidiana enriquece los aprendizajes así lo señala la fenomenología didáctica.

A la luz de los resultados obtenidos, ahora los maestros disponemos de un referente importante: la Metáfora del iceberg, que resume de una forma gráfica, cómo es que lograremos aprendizajes realistas. Sobre el uso de los registros semióticos es importante que dejemos de ser maestros que emplean un solo registro semiótico, teniendo en cuenta que en el uso de la diversidad de registros semióticos se espera el éxito de los aprendizajes.

VII. REFERENCIAS

Abero, L., Berardi, L., Capocasale, A., García S. y Rojas, R. (2015). *Investigación Educativa: Abriendo puertas al conocimiento*. Editorial del Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales, CLACSO.

Alsina, A. (2019). Hacia una transformación de futuros maestros de matemáticas: avances de investigación desde el modelo realista-reflexivo. *Revista Uni-pluriversidad*, 19(2), 60-79. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.05

Álvarez, J. (2021). *Propuesta de una secuencia didáctica para el aprendizaje de las transformaciones geométricas de rotación y traslación en el plano basado en las aprehensiones en el registro figural*. [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/19798

Bigalke, H. (1984). Thesen zur Theoriendiskussion in der Mathematikdidaktik. *Diario fur Mathematik-Didaktik, 5(3). 133-165.*

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Carrillo, F. I. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior*. [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/4634

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Psicología cognitiva y educación.

Claros, F. (2010). *Límite finito de una sucesión: Fenómenos que organiza*. [Tesis doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. España. https://digibug.ugr.es/handle/10481/5663

Crowther, G. (1959). *15 to 18: A report of the Central Advisory Council for Education*. Vol 1. http://www.educationengland.org.uk/documents/crowther1959-1.html.

D´Ambrosio, U. (24 a 28 julio de 2012). O estado do mundo e a Educação Matemática: Reflexões sobre o futuro. [Conferencia]. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-26, RELME-26*. Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Drijvers, P. (19 de febrero de 2020a). Instrumentación corporeizada: combina diferentes puntos de vista sobre el uso de la tecnología digital en la educación matemática. [Conferencia]. *Décimo Congreso Internacional de Educación Matemática*. Pontificia Universidad Católica del Perú. PUCP. Lima, Perú.

Drijvers, P. (20 de febrero de 2020b). Una visión realista de la educación matemática realista (EMR). [Conferencia]. *Décimo Congreso Internacional de Educación Matemática*. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. Lima, Perú.

Douady, R. (1993). Enseñanza de la dialéctica herramienta-objeto y conjuntos de marcos en la formación matemática de los maestros escolares. *Investigación en Educación matemática* No. 7.2, 5-32. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton, et al. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study*, pp. 273–280. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano*. Berna, Peter Lang.

Duval, R. (2005). Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En: Alcântara S. (2005) *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*. Papirus editora. Sao Paolo. Brasil.

Duval, R. (20 julio de 2011). Ideas claves para el análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. [Conferencia]. *Comité Interamericano de Educación Matemática*. Universidad Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Fessakis, G.; Karta, P. y Kozas, K. (2018). Diseños de caminos matemáticos para la mejora del aprendizaje móvil con la educación matemática realista en la educación primaria. *Revista de la Universidad de Aegean*, Rodas, Grecia. https://doi.org/10.3991/ijep.v8i2.8131.

Font, V. (16 al 20 de setiembre de 2013). Coordinación de Teorías en Educación Matemática. [Conferencia] *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, VII CIBEM*. Montevideo, Uruguay.

Fredriksen, H. (2020). Explorando la educación matemática realista en un contexto de aula invertida en el nivel terciario. *Revista Internacional de Educación Científica y Matemática*. https://doi.org.10.1007/s10763-020-10052-1

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1/2), 3-8.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of Mathematical structures.* Kluver Academic Publisher.

Freudenthal, H. (2005). *Revisiting mathematics education*. China lectures (Vol. 9). Springer Science & Business Media.

Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial*. [Tesis doctoral]. Universidad Politécnica de Valencia. España.

https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/68492/GALLART%20-%20La%20Modelizaci%C3%B3n%20como%20herramienta%20de%20evaluaci%C3%B3n%20competencial.pdf?sequence=1

Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (1): 117-150.

Grande, A. (2006). *O Conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Álgebra Linear*. [Tese Profissional em Ensino de Matemática]. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil. https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11123

Guzmán, I. (1998). Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. En: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, marzo, número 1. Distrito Federal, México.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la Investigación*. (6ta. Ed.). Mc Graw Hill Educación.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Fou-Lai Lin (Eds.). *Common sense in mathematics education*. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education (pp. 1- 43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Didactical phenomenology. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 174–176). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Heuvel-Panhuizen, M. (2019). *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics*. Utrecht University Utrecht, the Netherlands. Springer Nature Switzerland AG. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (30 de agosto de 2020). *Líneas de Investigación. Pontificia Universidad Católica del Perú*. https://irem.pucp.edu.pe/110/linea-3-curriculo-y-formacion-de-profesores

Iparraguirre, A. (2021). *Representaciones semióticas de inecuaciones lineales: Una propuesta didáctica para tercer grado de educación secundaria*. [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/179621

Macías, J. (2016). *Diseño y estudio de situaciones didácticas que favorecen el trabajo con registros semióticos*. [Tesis de doctorado]. Universidad Complutense de Madrid. España. https://docta.ucm.es/handle/20.500.14352/21470

MacMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa: Una Introducción Conceptual*. (5ta. Ed.). Pearson Educación.

Martínez, R.A. (2007). *La investigación en la práctica educativa: Guía metodológica de investigación para el diagnóstico y evaluación en los centros docentes*. Centro de Investigación y Documentación Educativa del Ministerio de Educación y Ciencia. España.

Ministerio de Educación, Minedu (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Perú.

Ministerio de Educación, Minedu (2019). *Cuadernos de Trabajo de Matemática: Resolvamos Problemas 5.* https://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/6867

Morales-Martínez, Z. (16 de setiembre de 2013). Proyecto de Museo Matemático: Una muestra de experiencias numéricas y geométricas [exposición]. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, Montevideo, Uruguay.

Muñoz C. y Santos A. (2020). *Procesos de matematización vinculados con el estudio de magnitudes a partir del contexto financiero, una propuesta para estudiantes de quinto grado de educación primaria del colegio Cristóbal Colón*. [Tesis de maestría]. Universidad distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia. https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/25606

National Council of Teachers of Mathematics, NCTM (2020). *Standards for the Preparation of Secondary Mathematics Teachers*. United States. www.nctm.org

Navarro, E., Jiménez, E., Rappoport, S. y Thoilliez, B. (2017). *Fundamentos de la Investigación y de la Innovación educativa*. UNIR Editorial. Universidad Internacional de la Rioja. España.

Niss, M. (2007). Reflexiones sobre el estado y las tendencias de la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de aquí a la utopía. En FK Lester, Frank K. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Reston: NCTM, 1293-1312.

Panizza, M. (2018). *Las transformaciones semióticas en los procesos de definición de objetos matemáticos*. [Tesis doctoral]. Universidad Nacional de Córdova. Argentina.
https://ffyh.unc.edu.ar/publicaciones/tienda/publicaciones-de-investigacion/seicyt-posgrado/tesis/las-transformaciones-semioticas-en-los-procesos-de-definicion-de-objetos-matematicos/

Papadakis, S., Kalogiannakis, M., y Zaranis, N. (2016). *Mejorar la enseñanza de las matemáticas en el jardín de la infancia con la Educación Matemática Realista*. Springer Science Business. New York.

Prediger, S.; Bikner, A. y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 40(2), 165-178.*

Proleón, D.G. (2018). *Un abordaje del multiplicador de Lagrange por medio de la teoría de registros de representación semiótica en estudiantes de Economía*. [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP.
https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/13415

Pontificia Universidad Católica del Perú (2012). *VI Coloquio Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: Didáctica de las Matemáticas: Avances y desafíos actuales*. Actas del Coloquio. Lima, Perú.
https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/110937

Rabardel, P. (1995). *Les hommens et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Arman Colin. An English version may be retrieved from http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1

Rodríguez, C. (2020). *Función cuadrática y la coordinación entre sus registros de representación semiótica en estudiantes de Humanidades*. [Tesis de Maestría]. Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. Lima, Perú. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/17248

Rojas, C. (2019). *Función por tramos: representaciones gráfica y algebraica en una secuencia didáctica mediada por el GeoGebra*. [Tesis publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú, PUCP. https://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/15040

Salgado, M. (2015). *La práctica docente en educación infantil desde el enfoque de la Educación Matemática Realista y los procesos matemáticos*. [Tesis doctoral]. Universidade de Santiago de Compostela. España. https://minerva.usc.es/xmlui/handle/10347/14741

Sanem, P. (2019). Investigación sobre la Educación Matemática Realista en Turquía. Tendencias: Un análisis de contenido temático. *Revista de la Universidad de Ahí Evran. Turquía*. DOI:10.29299/kefad.2019.20.02.001

Sepriyanti, N. y Putri, E. (2018). Desarrollo de dispositivos de aprendizaje matemático basado en educación matemática realista sobre probabilidad. *Al-Ta Lim Journal*, 25(1). Doi: http://dx.doi.org/10.15548/jt.v25i1.377

Servín, H. (2017). *Modelo de enseñanza del concepto de función bajo la luz de los modelos teóricos locales y la Educación Matemática Realista en la educación superior intercultural*. [Tesis doctoral]. Universidad Pedagógica Nacional. México D.F., México. http://200.23.113.51/pdf/34088.pdf

Sons, L. R. (1996). *Quantitative reasoning for college graduates: A complement to the Standards*. http://www.maa.org/programs/faculty-and-departaments/curriculum-departament-guidelines-recomendations/quantitative-literacy/quantitative-reasoning-college-graduates

Steiner, H. (1986). Áreas temáticas: Teoría de la educación matemática (TME). En M. Carss (Ed.), *Actas del Quinto Congreso Internacional de Educación Matemática (pp. 293-299). Boston, Basilea, Stuttgart: Birkhauser.*

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction* – The Wiskobas project. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Universidad Nacional Federico Villarreal (29 de agosto de 2021). *Líneas de Investigación de la UNFV. Propuesta definitiva de la Comisión de Trabajo*. http://www.unfv.edu.pe/vrin/lineas-de-investigacion

Velásquez, A. y Rey, N. (1999). *Metodología de la investigación científica*. Lima, Perú: San Marcos. https://isbn.cloud/9789972383045/metodologia-de-la-investigacion-cientifica/

VIII. ANEXOS

Anexo A: Matriz de Consistencia

Anexo B: Validación y Confiabilidad del Instrumento

Anexo C: Análisis de Confiabilidad del Instrumento

Anexo A: Matriz de Consistencia de la Investigación

Título: Coordinación del principio de realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar

PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN	OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN	HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN	VARIABLES E INDICADORES	METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN
Problema General: **PG:** ¿Existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar? **Problemas Específicos:** **PE1:** ¿Existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar? **PE2:** ¿Existe relación significativa entre la	**Objetivo General:** **OG:** Determinar si existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar. **Objetivos Específicos:** **OE1:** Determinar si existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.	**Hipótesis General:** **HG:** Existe una relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar. **Hipótesis Específicas:** **HE1:** Existe relación significativa entre la coordinación del Principio de Realidad académica R1 de la Teoría EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.	**V1:** La coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS **Dimensiones:** **D1:** Coordinación del Principio Realista R1 de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS **D2:** Coordinación del Principio Realista R2 de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS **V2:** Logro de las dimensiones del Razonamiento Cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas. **Dimensiones:** **D1:** Interpretación **D2:** Representación **D3:** Cálculo **D4:** Análisis y Comunicación	**Diseño Metodológico:** Diseño no experimental de nivel correlacional. **Tipo:** Investigación aplicada transversal – cuantitativa. **Población / Muestra:** 95 estudiantes de la maestría de Didáctica de la Física y Matemática de la escuela de posgrado de una universidad pública. **Instrumentos:** Cuestionarios Cuestionario 1: (6 ítems) Sobre la coordinación del Principio de Realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS. Cuestionario 2: (4 ítems) Sobre el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas.

coordinación entre el Principio de Realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la Teoría TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar?	**OE2:** Determinar si existe relación significativa entre la coordinación entre el Principio de Realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la Teoría TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.	**HE2:** Existe relación significativa entre la coordinación entre el Principio de Realidad del mundo real R2 de la Teoría EMR y de las transformaciones semióticas de la Teoría TRRS, y el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo aplicado a las funciones cuadráticas en el nivel escolar.		**Análisis de datos:** Prueba: Prueba Chi-cuadrado. Recursos tecnológicos: Excel SPSS

Anexo B: Validación del Instrumento

Ficha de Validación de Instrumentos
<u>Juicio de Experto</u>

Estimado Especialista:
Siendo conocedores de su trayectoria académica y profesional, me he tomado la libertad de nombrarlo JUEZ EXPERTO para revisar a detalle el contenido del instrumento de recolección de datos:

1. Cuestionario (**X**) 2. Guía de entrevista ( ) 3. Guía de focus group ( )

4. Guía de observación ( ) 5. Otro ____________ ( )

Presento la matriz de consistencia y el instrumento, la cual solicito revisar cuidadosamente, además le informo que mi proyecto de tesis tiene un enfoque:

1. Cualitativo ( ) 2. Cuantitativo (**X**) 3. Mixto ( )

Los resultados de esta evaluación servirán para determinar la validez de contenido del instrumento para mi proyecto de Tesis de Doctorado.

Título del proyecto de tesis:	**COORDINACIÓN DE PRINCIPIOS DE LAS TEORÍAS DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA EL LOGRO DE LAS DIMENSIONES DEL RAZONAMIENTO CUANTITATIVO SOBRE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS EN EL NIVEL ESCOLAR**
Línea de investigación:	Educación para la sociedad del conocimiento Universidad Nacional Federico Villarreal

Autor del proyecto:

Nombres y Apellidos:	Firma:
ZENÓN EULOGIO MORALES MARTÍNEZ	

Lima, diciembre del 2021

Tabla 01

Rúbrica para la validación de expertos

Criterios	Escala de valoración				
	1	2	3	4	5
1. SUFICIENCIA: Los ítems que pertenecen a una misma dimensión son suficientes para obtener la medición de ésta.	Los ítems no son suficientes para medir la dimensión o indicador.	Los ítems miden algún aspecto de la dimensión o indicador, pero no corresponden a la dimensión total.	Se deben incrementar algunos ítems para poder evaluar la dimensión o indicador completamente.	Los ítems son suficientes.	Los ítems son suficientes y precisos en medir la dimensión o indicador
2. CLARIDAD: El ítem se comprende fácilmente, es decir su sintáctica y semántica son adecuadas.	El ítem no es claro.	El ítem requiere varias modificaciones en el uso de las palabras de acuerdo con su significado o por la ordenación de las mismas.	Se requiere una modificación muy específica de algunos de los términos del ítem.	El ítem es entendible, tiene semántica y sintaxis adecuada.	El ítem es claro, tiene buena semántica y sintaxis adecuada.
3. COHERENCIA: El ítem tiene relación lógica con la dimensión o indicador que está midiendo.	El ítem no tiene relación lógica con la dimensión o indicador.	El ítem tiene una relación tangencial con la dimensión o indicador.	El ítem tiene una relación regular con la dimensión o indicador que está midiendo	El ítem se encuentra relacionado con la dimensión o indicador que está midiendo.	El ítem se encuentra completamente relacionado con la dimensión o indicador que está midiendo.
4. RELEVANCIA: El ítem es esencial o importante, es decir debe ser incluido.	El ítem puede ser eliminado sin que se vea afectada la medición de la dimensión	El ítem tiene alguna relevancia, pero otro ítem puede estar incluyendo lo que éste mide.	El ítem es importante, es decir debe ser incluido.	El ítem es relevante y debe ser incluido.	El ítem es esencial y muy relevante ´por lo que debe ser incluido.

Nota: Adaptado de: www.humana.unal.co/psicometria/files/7113/8574/5708/artículo3_juicio_de_experto_27-36.pdf y modificado por la Dra. Patricia Guillén

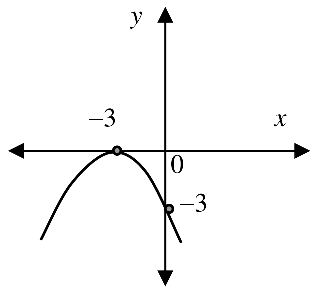
Tabla 02

Información del juez experto - 01

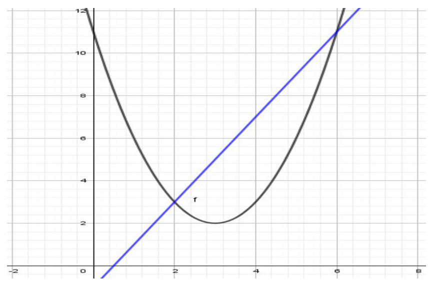
Nombres y Apellidos:	Roger Iván Soto Quiroz
Profesión:	Educación
Especialidad:	Matemática
Grado Académico	Doctor en Educación
Años de experiencia:	13
Cargo que desempeña actualmente:	Docente de Matemática Básica
Institución donde labora:	Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Firma:	Firma

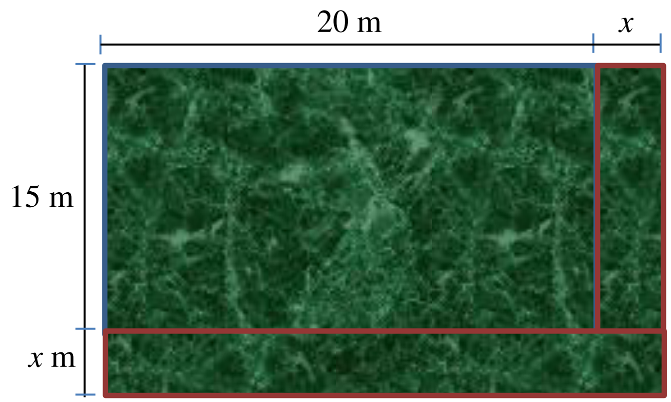
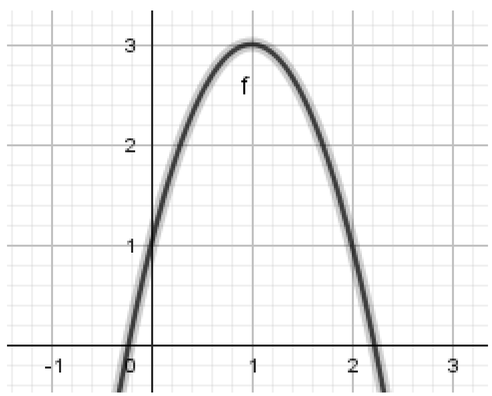
Tabla 03
Validación de expertos

Nombre del Instrumento por evaluar:	**Cuestionario sobre la coordinación de principios de las teorías de la educación matemática para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar**						
Autor del Instrumento	ZENÓN EULOGIO MORALES MARTÍNEZ						
Variable 1	**La coordinación del principio de realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS**						
Dimensión / Indicador	**Ítems**	**Suficiencia**	**Claridad**	**Coherencia**	**Relevancia**	**Tatol**	**Observaciones y/o recomendaciones**
D1	**Coordinación entre Principio R1-T1 y R1-T2**						
	01. La regla de correspondencia de una función cuadrática es: $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$, Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma: $$f(x) = a(x + b)(x + c)$$ Usted elija la opción correcta que corresponda:	5	5	5	5	20	
	02. Graficar: $f(x) = -3(x - 1)^2 + 3$ Elija la gráfica correspondiente	5	5	5	5	20	

D2	**Coordinación entre Principios Realista R1-T3 y R2-T1**						
	03. La regla de correspondencia de la función cuadrática es: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, para $a \neq 0$. Determine la regla de correspondencia para la gráfica mostrada:  	5	5	5	5	20	
	04. El rendimiento de gasoil r (en km por litro) de un automóvil está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la regla de correspondencia: $r(v) = 4v - \frac{1}{20}v^2$, Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma: $$r(v) = a(v+b)(v+c)$$ Usted elija la opción correcta que corresponda:	5	5	5	5	20	

D3	**Coordinación entre los principios R2-T2 y R2-T3**						
	05. El arco de la ciudad de Tacna, ubicada en el sur del Perú, tiene una forma aproximada a la gráfica de una función cuadrática y su regla de correspondencia es: $$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 18.$$  Elija la gráfica correcta cuando dicha regla de correspondencia se represente en un plano cartesiano.	5	5	5	5	20	
	06. En el Circuito Mágico del Agua de Lima, se presentan arcos parabólicos que realizan un conjunto de grifos que lanzan agua: 	5	5	5	5	20	

	Si la altura máxima que alcanza el agua es de 4m y la distancia horizontal en la base es de 6m. Considerando al punto medio de la base como el origen de coordenadas. Determine la regla de correspondencia de la parábola que describe la trayectoria del agua, teniendo en cuenta que la regla de correspondencia de la función cuadrática de vértice $V = (h, k)$ es: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, para $a \neq 0$.						
Variable 2	**Logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar**						
D1	**Interpretación**						
	07. Según la gráfica mostrada:  Indique la ordenada del vértice de la parábola que representa la función cuadrática.	5	5	5	5	20	
D2	**Representación**						
	08. Según la FIFA, la medida máxima de un campo de futbol es 90x120m Si "*x*" representa la medida del ancho del campo de fútbol (ancho = la menor medida del campo)  El área máxima, $A(x)$ del campo de fútbol según FIFA, en función de x es:	5	5	5	5	20	

D3	**Cálculo**						
	09. El césped del jardín del Sr. Jones mide 15 por 20 metros. El Sr. Jones decide extender el césped; para lograrlo a los dos lados añade una franja de igual anchura de “x” metros, como se muestra en la figura. Si el área del césped ampliado mide 374 m^2. Determine el valor de “x”. 	5	5	5	5	20	En el gráfico solo colocar x, ya se entiende que son metros
D4	**Análisis y Comunicación**						
	10. Si la regla de correspondencia de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + 4x + 1$ y la relación que determina el vértice de la parábola que la representa es $h = -\frac{b}{2a}$ siendo, el valor de a es: (Considere la información de la gráfica) 	5	5	5	5	20	

PUNTAJE PROMEDIO: 20

INFORME FINAL DEL EXPERTO - 01			
Nombres y Apellidos:	Roger Iván Soto Quiroz		
Aplicable	SI (X)	NO ( )	OBSERVADO ( )
Firma:			

Información del juez experto-02

Nombres y Apellidos:	Patricia Edith Guillen Aparicio
Profesión:	Docente
Especialidad:	Matemática - Física
Grado Académico	Dra. en Educación
Años de experiencia:	30 años
Cargo que desempeña actualmente:	Docente
Institución donde labora:	USMP
Firma:	

Tabla 03

Validación de expertos

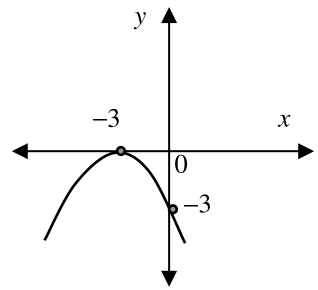
<table>
<tr><td>Nombre del Instrumento a evaluar:</td><td colspan="7">Cuestionario sobre la coordinación de principios de las teorías de la educación matemática para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar</td></tr>
<tr><td>Autor del Instrumento</td><td colspan="7">ZENÓN EULOGIO MORALES MARTÍNEZ</td></tr>
<tr><td>Variable 1</td><td colspan="7">La coordinación del principio de realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS</td></tr>
<tr><td>Dimensión / Indicador</td><td>Ítems</td><td>Suficiencia</td><td>Claridad</td><td>Coherencia</td><td>Relevancia</td><td>Tatol</td><td>Observaciones y/o recomendaciones</td></tr>
<tr><td>D1</td><td colspan="7">Coordinación entre principios R1-T1 y R1-T2</td></tr>
<tr><td></td><td>01. La regla de correspondencia de una función cuadrática es:
$f(x) = 2x^2 + 2x - 24$, Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma:
$$f(x) = a(x + b)(x + c)$$
Usted elija la opción correcta que corresponda:</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>02. Graficar: $f(x) = -3(x - 1)^2 + 3$
Elija la gráfica correspondiente</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>D2</td><td colspan="7">Coordinación entre Principios R1-T3 y R2-T1</td></tr>
<tr><td></td><td>

03. La regla de correspondencia de la función cuadrática es:

$f(x) = a(x-h)^2 + k$, para $a \neq 0$.

Determine la regla de correspondencia para la gráfica mostrada:



</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

04. El rendimiento de gasoil r (en km por litro) de un automóvil está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la regla de correspondencia:

$r(v) = 4v - \frac{1}{20}v^2$,

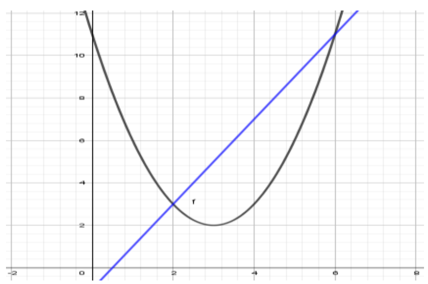
Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma:

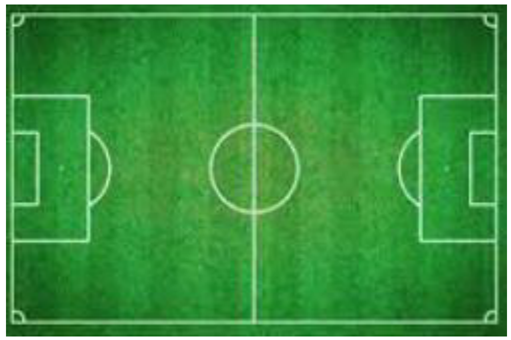
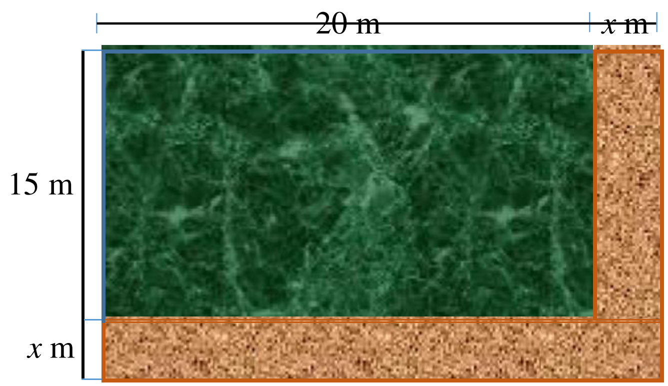
$$r(v) = a(v+b)(v+c)$$

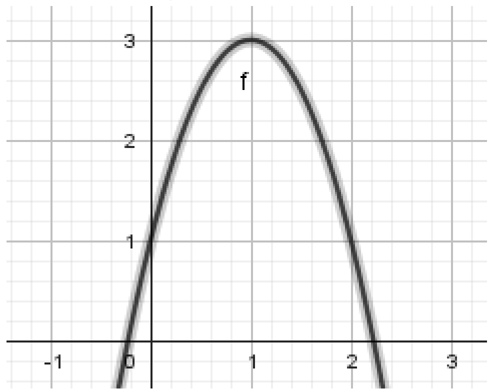
Usted elija la opción correcta que corresponda:

</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

D3	**Coordinación entre los principios R2-T2 y R2-T3**						
	05. El arco de la ciudad de Tacna, ubicada en el sur del Perú, tiene una forma aproximada a la gráfica de una función cuadrática y su regla de correspondencia es: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 18.$  Elija la gráfica correcta cuando dicha regla de correspondencia se represente en un plano cartesiano.	5	5	5	5	20	

	06. En el Circuito Mágico del Agua de Lima, se presentan arcos parabólicos que realizan un conjunto de grifos que lanzan agua:  Si la altura máxima que alcanza el agua es de 4m y la distancia horizontal en la base es de 6m. Considerando al punto medio de la base como el origen de coordenadas. Determine la regla de correspondencia de la parábola que describe la trayectoria del agua, teniendo en cuenta que la regla de correspondencia de la función cuadrática de vértice $V = (h, k)$ es: $(x) = a(x - h)^2 + k$, para $a \neq 0$.	5	5	5	5	20	
Variable 2	**Logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar**						
D1	**Interpretación**						
	07. Según la gráfica mostrada:  Indique la ordenada del vértice de la parábola que representa la función cuadrática.	5	5	5	5	20	

D2	**Representación**						
	08. Según la FIFA, la medida máxima de un campo de futbol es 90x120mSi "x" representa la medida del ancho del campo de fútbol (ancho = la menor medida del campo)  El área máxima, $A(x)$ del campo de fútbol según FIFA, en función de x es:	5	5	5	5	20	
D3	**Cálculo**						
	09. El césped del jardín del Sr. Jones mide 15 por 20 metros. El Sr. Jones decide extender el césped; para lograrlo a los dos lados añade una franja de igual anchura de "x" metros, como se muestra en la figura. Si el área del césped ampliado mide 374 m^2. Determine el valor de "x". 	5	5	5	5	20	

D4	**Análisis y Comunicación**						
	10. Si la regla de correspondencia de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + 4x + 1$ y la relación que determina el vértice de la parábola que la representa es $h = -\frac{b}{2a}$ siendo, el valor de a es: (Considere la información de la gráfica) 	5	5	5	5	20	

PUNTAJE PROMEDIO: 20

INFORME FINAL DEL EXPERTO - 02	
Nombres y Apellidos:	Patricia Edith Guillén Aparicio
Aplicable	SI (x) NO ( ) OBSERVADO ( )
Firma:	

Tabla 02

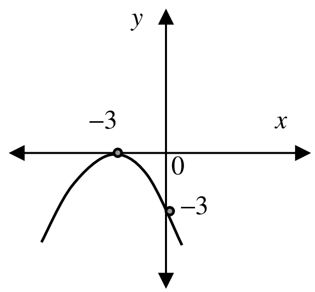
Información del juez experto - 03

Nombres y Apellidos:	ALEXANDER ABEL BONIFACIO CASTRO
Profesión:	LICENCIADO EN MATEMÁTICA
Especialidad:	MATEMÁTICA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA
Grado Académico	DOCTOR EN CIENCIAS MENCIÓN INGENIERÍA DE SISTEMAS
Años de experiencia:	14 AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE
Cargo que desempeña actualmente:	CATEDRÁTICO EN PRINCIPALES UNIVERSIDADES DE LIMA
Institución donde labora:	UPC, UNI, UPN
Firma:	

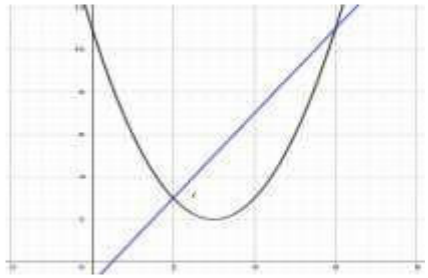
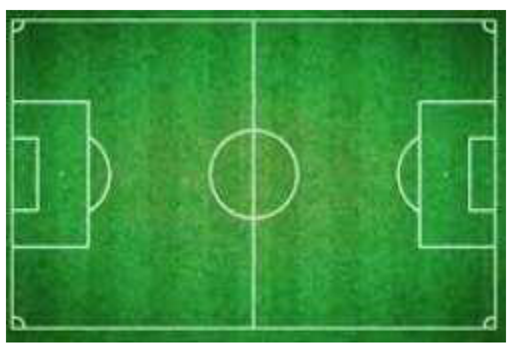
Tabla 03

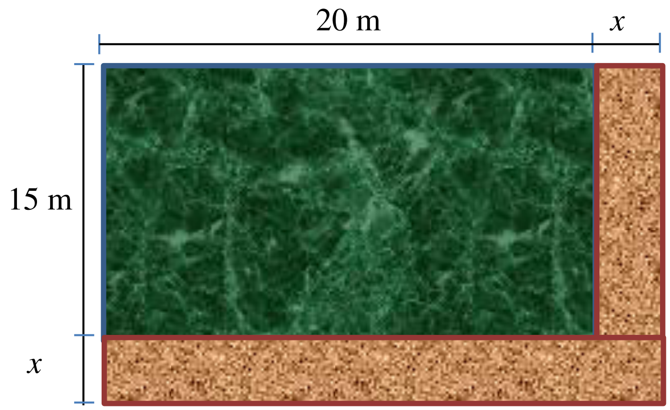
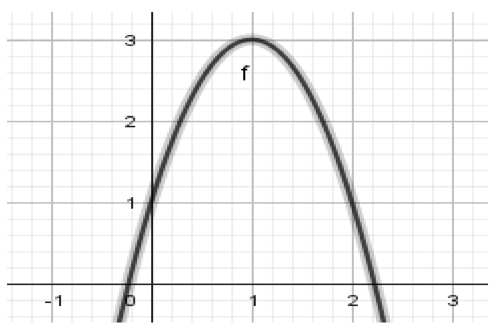
Validación de experto - 03

Nombre del Instrumento a evaluar:	**Cuestionario sobre la coordinación de principios de las teorías de la educación matemática para el logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar**						
Autor del Instrumento	ZENÓN EULOGIO MORALES MARTÍNEZ						
Variable 1	**La coordinación del principio de realidad de la EMR y las transformaciones semióticas de la TRRS**						
Dimensión / Indicador	**Ítems**	**Suficiencia**	**Claridad**	**Coherencia**	**Relevancia**	**Tatol**	**Observaciones y/o recomendaciones**
D1	**Coordinación de Principios R1-T1 y R1-T2**						
	1. La regla de correspondencia de una función cuadrática es: $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$, Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma: $f(x) = a(x + b)(x + c)$ Usted elija la opción correcta que corresponda:	4	5	4	5	18	
	2. Graficar: $f(x) = -3(x - 1)^2 + 3$ Elija la gráfica correspondiente	5	4	5	4	18	

D2	**Coordinación de Principios R1-T3 y R2-T1**						
	3. La regla de correspondencia de la función cuadrática es: $f(x) = a(x-h)^2 + k$, para $a \neq 0$. Determine la regla de correspondencia para la gráfica mostrada: 	4	4	4	5	17	
	4. El rendimiento de gasoil r (en km por litro) de un automóvil está relacionado con la velocidad v (en km/h) por la regla de correspondencia: $r(v) = 4v - \frac{1}{20}v^2$, Determine la regla de correspondencia en su forma factorizada de la forma: $$r(v) = a(v+b)(v+c)$$ Usted elija la opción correcta que corresponda:	4	5	4	5	18	
D3	**Coordinación entre los principios R2-T2 y R2-T3**						
	5. El arco de la ciudad de Tacna, ubicada en el sur del Perú, tiene una forma aproximada a la gráfica de una función cuadrática y su regla de correspondencia es: $$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 18.$$	5	4	5	4	18	

	 Elija la gráfica correcta cuando dicha regla de correspondencia se represente en un plano cartesiano.						
	6. En el Circuito Mágico del Agua de Lima, se presentan arcos parabólicos que realizan un conjunto de grifos que lanzan agua:  Si la altura máxima que alcanza el agua es de 4m y la distancia horizontal en la base es de 6m. Considerando al punto medio de la base como el origen de coordenadas. Determine la regla de correspondencia de la parábola que describe la trayectoria del agua, teniendo en cuenta que la regla de correspondencia de la función cuadrática de vértice $V = (h, k)$ es: $(x) = a(x-h)^2 + k$, para $a \neq 0$.	4	5	5	5	19	

Variable 2	**Logro de las dimensiones del razonamiento cuantitativo sobre las funciones cuadráticas en el nivel escolar**						
D1	**Interpretación**						
	7. Según la gráfica mostrada:  Indique la ordenada del vértice de la parábola que representa la función cuadrática.	4	4	4	5	17	
D2	**Representación**						
	8. Según la FIFA, la medida máxima de un campo de futbol es 90x120m Si “x” representa la medida del ancho del campo de fútbol (ancho = la menor medida del campo)  El área máxima, $A(x)$ del campo de fútbol según FIFA, en función de x es:	4	5	5	5	19	

D3	**Cálculo**						
	9. El césped del jardín del Sr. Jones mide 15 por 20 metros. El Sr. Jones decide extender el césped; para lograrlo a los dos lados añade una franja de igual anchura de “x” metros, como se muestra en la figura. Si el área del césped ampliado mide 374 m^2. Determine el valor de “x”. 	4	5	4	5	18	
D4	**Análisis y Comunicación**						
	10. Si la regla de correspondencia de una función cuadrática es $f(x) = ax^2 + 4x + 1$ y la relación que determina el vértice de la parábola que la representa es $h = -\frac{b}{2a}$ siendo, el valor de a es: (Considere la información de la gráfica) 	4	4	4	4	16	

PUNTAJE PROMEDIO: 17,80

INFORME FINAL DEL EXPERTO - 03	
Nombres y Apellidos: ALEXANDER ABEL BONIFACIO CASTRO	
Aplicable	SI (X) NO ( ) OBSERVADO ( )
Firma:	

Anexo C: Análisis de Confiabilidad del Instrumento

Escala: TODAS LAS VARIABLES

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	21	100,0
	Excluidos[a]	0	,0
	Total	21	100,0

a. Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,827	10

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
VAR00001	21,9524	20,848	,288	,830
VAR00002	22,1429	21,229	,181	,840
VAR00003	22,1429	20,729	,225	,838
VAR00004	22,7143	14,314	,959	,749
VAR00005	22,1429	19,629	,458	,816
VAR00006	21,9524	20,848	,288	,830
VAR00007	22,1905	19,562	,463	,816
VAR00008	22,8095	15,862	,897	,764
VAR00009	22,0476	20,748	,278	,831
VAR00010	22,7619	14,390	,975	,747

```
DATASET ACTIVATE Conjunto_de_datos5.
DATASET CLOSE Conjunto_de_datos6.
DATASET ACTIVATE Conjunto_de_datos7.
DATASET CLOSE Conjunto_de_datos5.
```